Math. P. 418 db
Peschka
(3

<36636735030017

<36636735030017

Bayer. Staatsbibliothek

Darstellende und projective Geometrie

nach dem

gegenwärtigen Stande dieser Wissenschaft

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse höherer Lehranstalten und das Selbstudium

von

Dr. GUSTAV AD. V. PESCHKA

k. k. Regierungsrath, ordentl. öffentl. Hochschul-Professor, Mitglied der k. k. Staatsprüfungs-Commission und der k. k. wissenschaftlichen Realschul-Prüfungs-Commission an der k. k. technischen Hochschule in Brünn etc.

Dritter Band.

Mit einem Atlas von 42 Tafeln.

WIEN.

Druck und Verlag von Carl Gerolds Sohn.

1884.

487 D

Darstellende und projective Geometrie

nach dem

gegenwärtigen Stande dieser Wissenschaft

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse höherer Lehranstalten und das Selbstudium

von

DR. GUSTAV AD. V. PESCHKA

k. k. Regierungsrath, ordentl. öffentl. Hochschul-Professor, Mitglied der k. k. Staats- und Diploms-Prüfungs-Commission an der k. k. technischen Hochschule in Brünn, emerit. o. ö. Professor der Mechanik und Maschinenlehre, des Maschinenwesens und des Maschinenbaues, Mitglied gelehrter, patriotischer und humanitärer Gesellschaften und Vereine, Besitzer der österr. großen goldenen Medaille für Wissenschaft und Kunst, des goldenen Verdienstkreuzes m. d. Krone, Ritter des h. Sachsen-Ernestinischen Hausordens zweiter Classe, des königl. Serb. St. Sava-Ordens, des Großh. Hessen'schen Verdienst-Ordens erster Classe, Philipp des Großmüthigen etc. etc. etc.

Dritter Band.

Mit einem Atlas von 42 Tafeln.

WIEN.

Druck und Verlag von Carl Gerolds Sohn.

1884.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Seiner

kaiserlichen und königlichen Hoheit

dem durchlauchtigsten

Kronprinzen Erzherzog Rudolph

in unwandelbarer Treue und Hingebung, in tiefster
Ehrfurcht und Unterthänigkeit

dankbarst und treu ergebenst gewidmet

von dem

Verfasser.

Übersetzung in andere Sprachen vorbehalten.

Vorwort zum dritten Bande.

Der vorliegende dritte Band meiner „Darstellenden und projectiven Geometrie“, welcher so wie jeder der früheren Bände ein für sich abgeschlossenes Ganzes bildet, ist ausschließlich den Flächen zweiten Grades gewidmet und wurde bei Bearbeitung derselben vorzugsweise deren graphische Behandlung in Berücksichtigung gezogen.

Eine Durchsicht der bisher erschienenen Werke und Lehrbücher über „Darstellende Geometrie“ — mit Ausnahme des rühmlichst bekannten Werkes von Prof. Dr. W. Fiedler — wird die Überzeugung schaffen, dass die Flächen zweiten Grades, namentlich aber die dreiachsigen, eine nur höchst spärliche Erwähnung fanden oder auch gänzlich unbeachtet blieben. Außer den Kegelflächen zweiten Grades wurden im allgemeinen höchstens nur noch das windschiefe Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid eingehender gewürdigt. Die Rotationsflächen zweiten Grades finden gewöhnlich in dem Capitel über „Rotationsflächen im allgemeinen“ ihren Platz und erfahren daher keineswegs jene graphische Durchbildung, deren sie infolge ihres Erzeugungsgesetzes fähig sind.

Ein Grund der Vernachlässigung der vorerwähnten Flächengattungen dürfte einerseits in dem Mangel einer zureichenden geometrischen Theorie, andererseits aber in der Nichtberücksichtigung der Methoden der projectivischen Geometrie zu suchen sein.

Der dritte Band meiner „Darstellenden und projectivischen Geometrie“ entsprang der Absicht, den diesbezüglichen Bedürfnissen nach Möglichkeit Rechnung zu tragen. Derselbe umfasst die graphische Behandlung der windschiefen Flächen, der Kugel, der Rotationsflächen zweiten Grades und der dreiachsigen Flächen zweiten Grades in wünschenswerter Vollständigkeit.

Was die Anordnung des Stoffes betrifft, so dürften hier folgende Bemerkungen am Platze sein. Nachdem die windschiefen Flächen zweiten Grades, infolge ihrer eigenthümlichen Erzeugungsart durch gerade Linien, sowohl in Bezug auf die Entwickelung ihrer besonderen Eigenschaften, als auch bezüglich der constructiven Behandlung verhältnismäßig die wenigsten Schwierigkeiten bieten, wurden diese vorangestellt und an diese erst, der Reihenfolge nach, die Kugel und die Kugelsysteme, die Rotations- und die dreiachsigen Flächen zweiten Grades angeschlossen.

Den betreffenden Constructionen wurden stets die erforderlichen theoretischen Betrachtungen vorausgeschickt, um für die constructive Durchführung der nachfolgenden Probleme das nothwendige Materiale zur Verfügung zu haben. — Hierbei erhalten gewisse, im zweiten Bande unseres Werkes, und zwar die in der „Theorie der Flächen zweiten Grades“ allgemein projectivisch nachgewiesenen Sätze, jene besonderen Formen, welche sie für graphische Zwecke geeignet, wichtig und bedeutungsvoll machen. Weiters werden die für durchzuführende Constructionen wertvollen metrischen Eigenschaften der Flächen zweiten Grades eingehend gewürdigt, besprochen und entwickelt.

Die Aufnahme der Kugelsysteme in das vorliegende Werk erscheint vollkommen gerechtfertigt, wenn man die Verwendung der hierbei gewonnenen Sätze auf die nachfolgenden Probleme „berührende Kugel betreffend“ beachtet, und überdies berücksichtigt, dass die bei den diesbezüglichen Untersuchungen auftretende „inverse Transformation“ sowohl an und für sich als Transformationsmethode, als auch in ihrer Anwendung auf die stereographische Projection von Bedeutung ist.

Im Anschlusse an die Kugelsysteme ist ein Capitel der „Cyclide“ gewidmet. Obzwar diese Fläche, streng genommen, in eine wissenschaftliche Arbeit über Flächen zweiten Grades nicht gehört, so ist doch andererseits einleuchtend, dass sich dieselbe wohl schwer an einer anderen Stelle des Buches, als bei der Kugeltheorie, einreihen ließe.

Was die constructiven Aufgaben selbst betrifft, so war ich, wie schon aus der Eintheilung und Anordnung des Gebotenen zu entnehmen ist, hauptsächlich auch bemüht, möglichst systematisch vorzugehen und dafür Sorge zu tragen, dass in jedem besonderen Falle durch zweckmäßige Wahl und entsprechende Verwertung vorausgeschickter, resp. abgeleiteter Eigenschaften die möglichst einfachste

und eleganteste Construction und Lösungsweise eines gestellten Problemes zum Ausdrucke gelange.

Eine willkommene Zugabe dürfte auch die Bestimmung, resp. Darstellung der Flächen zweiten Grades aus gegebenen Elementen und die Anwendung der besagten Flächen zur Construction einander doppelt berührender Kegelschnitte bilden. Der Vollständigkeit halber sind am Schlusse meiner Arbeit noch die wesentlichsten Eigenschaften der Büschel und Scharen von Flächen zweiten Grades mit Einschluss der confocalen Flächen abgeleitet und endlich auch, als Anhang, die wichtigsten Grundsätze für die stereographische Projection und deren Anwendung als Kartenprojection entwickelt worden.

Der vierte Band des vorliegenden Werkes, welcher die windschiefen Flächen höherer Ordnung, die Rotationsflächen, die Umhüllungsflächen, die Schraubenflächen und die Schattenconstructionen umfasst, befindet sich bereits unter der Presse und wird, infolge der freundlichen Zusicherung des hochachtbaren Herrn Verlegers, baldigst seiner Vollendung zugeführt werden.

Auch diesen dritten Band meiner „Darstellenden und projectiven Geometrie" kann ich nicht zum Abschlusse bringen, ohne vorher meinen Dank zu wiederholen, welcher der rühmlichst bekannten Verlagsbuchhandlung des P. T. Herrn Carl Gerold's Sohn in Wien für die Sorgfalt sowohl, welche der Ausstattung des Werkes zugewendet wurde, als auch für das jederzeit freundliche und bereitwillige Entgegenkommen im vollsten Sinne des Wortes gebürt. Ebenso anerkennend muss der Druckerei des Herrn Verlegers gedacht werden, welche mit seltener Umsicht den Druck meines Werkes leitete und es ermöglichte, dass trotz der mannigfachen und bedeutenden Schwierigkeiten, welche der Satz eines derartigen Buches bietet, derselbe nicht nur mit der erwünschten Raschheit vonstatten gieng, sondern auch die Zahl der unvermeidlichen Druckfehler und folglich auch die Menge der hierdurch bedingten Correcturen auf ein Minimum zusammenschmolz. Ich sage hiermit der Druckerei des Herrn Carl Gerold's Sohn in Wien, sowie der lithographischen Anstalt des Herrn H. Springer in Leipzig, welche den Druck der Figurentafeln im Auftrage des Herrn Verlegers besorgte und die schwierige Aufgabe, welche mit der Herstellung geometrischer Zeichnungen verbunden ist, in anerkennenswerter Weise löste, meinen verbindlichsten Dank. Schließlich drängt es mich noch meines gewesenen Schülers und Assistenten, des Herrn Otto Rupp zu gedenken, welcher infolge der vielen Anknüpfungspunkte, die zwischen Schüler und Professor stattfinden und des ununter-

brochenen wissenschaftlichen Verkehrs mit mir, häufig Gelegenheit fand, meine Arbeiten durch glückliche Ideen fördern und beschleunigen zu helfen.

Indem ich somit den dritten Band meiner „Darstellenden und projectivischen Geometrie“ der Öffentlichkeit übergebe, folge ich nur dem Zuge meines Herzens, wenn ich auf diesem Wege all den hochverehrten Gönnern und Freunden der Wissenschaft für die zahlreichen, aus nah und fern mir zugekommenen Beweise der Anerkennung, sowie für die gütige Aufnahme und nachsichtsvolle Beurtheilung meines Werkes den tiefgefühlten Dank darbringe und daran unmittelbar die innige Bitte anschließe: es möge mir dieses unschätzbare Wohlwollen auch für alle Folge erhalten bleiben — es ist dies ja der einzige Lohn für jahrelanges, rast- und ruheloses Mühen — und möge nun auch, meinem Streben entsprechend, dieser dritte Band meiner „Darstellenden und projectiven Geometrie“ mit der gleichen wohlwollenden Nachsicht und beglückenden Freundlichkeit entgegengenommen werden, deren sich meine bisherigen wissenschaftlichen Arbeiten erfreuten.

Brünn, im Juli 1884.

Prof. Dr. **Gust. Ad. V. Peschka.**

Inhalts-Verzeichnis.

Dritter Theil.

Die Flächen zweiten Grades.

Erster Abschnitt.

Windschiefe Flächen.

I. Capitel.

Erzeugung und Fundamental-Eigenschaften windschiefer Flächen im allgemeinen.

§. Seite

1. Einleitung . 3
2 — 9. Erzeugungsgesetz, Leitlinien, Richtungskegel, Tangentialebenen, asymptotische Ebenen, Centralpunkte und Strictionslinien windschiefer Flächen . 4

II. Capitel.

Das windschiefe Hyperboloid.

10—17. Fundamentale projectivische Erzeugung 11
18. Aufgabe . 17
19—31. Projectivische Eigenschaften der Fläche bezüglich ihrer Erzeugenden, ihrer Tangentialebenen, des Richtungskegels etc. 19
32. Aufgabe . 29
33—38. Verschiedene Erzeugungsarten des windschiefen Hyperboloides . . 30
39. Aufgabe . 36
40—54. Mittelpunkt, Durchmesser, Durchmesserebenen, Asymptotenkegel, conjugierte Durchmesser, Achsen, Hauptebenen eines windschiefen Hyperboloides und deren Eigenschaften 38
55—60. Besondere Erzeugungsarten; Aufgabe; Bestimmungen aus Punkten und Erzeugenden; Kreisschnitte eines windschiefen Hyperboloides . . 48

III. Capitel.

Das orthogonale Hyperboloid.

61—64. Eigenschaften des orthogonalen Hyperboloides und des orthogonalen Kegels . 54

IV. Capitel.

Der gleichseitige Kegel.

§. Seite

65 — 70. Definition und projectivische Eigenschaften des gleichseitigen Kegels; Eigenschaften eines Tetraeders und seiner Höhen. Besondere Tetraeder 59

V. Capitel.

Das gleichseitige Hyperboloid.

71 — 79. Projectivische Eigenschaften des gleichseitigen Hyperboloides. Projectivische Eigenschaften eines allgemeinen Tetraeders . . . 64

VI. Capitel.

Das hyperbolische Paraboloid.

80 — 96. Definition, projectivische Erzeugung, projectivische Eigenschaften, Tangentialebenen, ebene Schnitte, Durchmesser und Durchmesserebenen, Achse und Hauptebenen des Paraboloides 72

97 — 99. Verschiedene Erzeugungsarten des hyperbolischen Paraboloides . . 83

VII. Capitel.

Das gleichseitig-hyperbolische Paraboloid.

100—106. Projectivische Eigenschaften 85

107—112. Aufgabe. Das gleichseitige Hyperboloid und Paraboloid als geometrische Orte 89

VIII. Capitel.

Das windschiefe Rotationshyperboloid.

113. Erzeugung und besondere Eigenschaften desselben 99

IX. Capitel.

Darstellung des windschiefen Hyperboloides in verschiedenen Projectionsarten und Lösung einiger dasselbe betreffenden Aufgaben.

114. Darstellung in orthogonaler Projection durch zwei Hauptschnitte . 102

115—126. Aufgaben; Schnitte und Tangentialebenen betreffend. 106

127—135. Kegelschnittsconstructionen vermittelst windschiefer Hyperboloide. Aufgaben 130

136—141. Aufgaben. Besondere Constructionen für das Rotationshyperboloid. Bestimmung desselben aus verschiedenen Elementen 148

X. Capitel.

Aufgaben und Constructionen, das hyperbolische Paraboloid betreffend.

142—162. Aufgaben in Bezug auf ebene Schnitte, Tangentialebenen und Berührungscurven; Bestimmung des hyperbolischen Paraboloides aus gemischten Elementen 156

XI. Capitel.

Die Strictionslinien der Regelflächen zweiten Grades.

§. Seite
163. Die Strictionslinie des dreiachsigen Hyperboloides 183
164. Die Strictionslinie des Rotationshyperboloides 185
165. Die Strictionslinie des hyperbolischen Paraboloides 186

Zweiter Abschnitt.

Die Nichtregelflächen zweiten Grades.

166. Einleitung . 189

XII. Capitel.

Die Kugelfläche.

167—193. Allgemeine und besondere Eigenschaften einer Kugelfläche; der imaginäre Kugelkreis im Raume. Zusammenhang desselben mit metrischen Eigenschaften. Gemeinschaftliche Eigenschaften zweier Kugeln. Ähnlichkeit 192
194—207. Theorie der Potenzen bezüglich zweier, dreier und vierer Kugeln . 208

XIII. Capitel.

Das Kugelgebüsch.

208—220. Definitionen. Allgemeine Eigenschaften des Kugelgebüsches. Orthogonalkugel eines Kugelgebüsches. Kreisinvolutionen 218

XIV. Capitel.

Das Princip der reciproken Radien oder die inverse Transformation.

221—238. Allgemeine Eigenschaften inverser Gebilde. Stereographische Projection im allgemeinen. Inverse Beziehungen an Kugelgebüschen . 228

XV. Capitel.

Das Kugelbündel und das Kugelbüschel.

239—253. Definitionen. Allgemeine Eigenschaften. Inverse Beziehungen. Der Orthogonalkreis 242
254—267. Besondere, das Kugelbüschel betreffende Sätze 254
268—277. Das sphärische Kreisbüschel und Kreisbündel 262

XVI. Capitel.

Theorie der Kugelberührung und der Ähnlichkeitspunkte.

278—296. Eigenschaften jener Kugeln, welche zwei feste Kugeln unter gleichen Winkeln schneiden oder insbesondere orthogonal schneiden, resp. berühren. Hierbei auftretende ähnliche und inverse Beziehungen 267
297—304. Gegenseitige Beziehungen von drei Kugeln. Entwickelung der Eigenschaften in Bezug auf deren Ähnlichkeitspunkte und der unter gleichen Winkeln schneidenden und insbesondere berührenden Kugeln 285

§. Seite

305—309. Gegenseitige Beziehungen von vier Kugeln. Eigenschaften der dieselben unter gleichen Winkeln schneidenden und insbesondere berührenden Kugeln 293

XVII. Capitel.

Die Dupin'sche Cyclide.

310—328. Entwickelung der wichtigsten Eigenschaften der Cycliden auf Grund der Kugeltheorie 297

Dritter Abschnitt.

Die Rotationsflächen zweiten Grades.

XVIII. Capitel.

329. Definitionen und Eintheilung der Rotationsflächen zweiten Grades 311

330—339. Eigenschaften, welche allen Rotationsflächen zweiten Grades gemein sind . 312

340—351. Das bifocale oder überhöhte Ellipsoid; dessen affine Beziehung zur Kugel und dessen Brennpunkts-Eigenschaften 318

XIX. Capitel.

Das Sphäroid.

352—357. Affine Beziehung zur Kugel. Der Focalkreis des Sphäroides und dessen Eigenschaften 330

XX. Capitel.

Das Rotationsparaboloid.

358—366. Der Brennpunkt des Paraboloides. Collineare Beziehung der Fläche zur Kugel. Focalgeraden des umschriebenen Kegels 334

XXI. Capitel.

Die Rotationshyperboloide.

367. *a*) Das einfache Rotationshyperboloid. Hinweis auf die windschiefen Flächen . 342

368—383. *b*) Das zweitheilige oder bifocale Rotationshyperboloid; dessen Brennpunkts-Eigenschaften; der Asymptotenkegel und seine Eigenschaften. Collineare Beziehungen zwischen dem Hyperboloide und der Kugel 342

Vierter Abschnitt.

Die dreiachsigen Flächen zweiten Grades.

XXII. Capitel.

Entwickelung von Eigenschaften, welche für die graphische Darstellung von Wichtigkeit sind.

384—403. Collineation mit der Kugel; Kreisschnitte. Eigenschaften des Asymptotenkegels. Eigenschaften der Kreisschnitte und ihre Beziehungen zu den Hauptebenen 355

XXIII. Capitel.

Constructionen und Aufgaben, die Flächen zweiten Grades betreffend.

§. Seite

404—427. Aufgaben. Construction ebener Schnitte, Tangentialebenen, Berührungscurven; gemeinschaftliche Tangentialebenen zweier, resp. dreier Kugeln 375

428—441. Aufgaben. Vermischte Constructionen 401

442—494. Aufgaben. Construction berührender Kugeln unter verschiedenen Bedingungen 412

XXIV. Capitel.

Constructionsaufgaben, das Rotationsellipsoid betreffend.

495—511. Aufgaben. Schnitte des Ellipsoides mit Geraden und Ebenen; Tangentialebenen; umschriebene Kegel und Cylinder und deren Berührungscurven 459

512—527. Aufgaben. Construction des Ellipsoides aus gegebenen Stücken . . 478

528—541. Darstellung (Contour) eines Rotationsellipsoides in verschiedenen Projectionsarten. Kegelschnittsconstructionen, bei welchen Rotationsellipsoide zur Verwendung gelangen 495

XXV. Capitel.

Constructionsaufgaben bezüglich des bifocalen Rotationshyperboloides.

542—562. Aufgaben. Schnitte, Tangentialebenen, Berührungscurven . . . 527

563—564. Aufgaben. Contourbestimmung der Fläche in verschiedenen Projectionsarten 554

565—576. Aufgaben. Construction des Hyperboloides aus gegebenen Stücken . 559

577—578. Aufgaben. Constructionen doppelt berührender Kegelschnitte mittelst des Rotationshyperboloides 572

XXVI. Capitel.

Constructionsaufgaben in Bezug auf das Rotationsparaboloid.

579—594. Aufgaben. Schnitte, Tangentialebenen, Berührungscurven umschriebener Kegel und Cylinder 574

594—596. Aufgaben. Contourbestimmungen des Paraboloides in verschiedenen Projectionsarten 591

597—608. Aufgaben. Bestimmung eines Rotationsparaboloides aus verschiedenen Elementen . 594

609. Aufgabe. Kegelschnittsconstruction 602

XXVII. Capitel.

Constructionen und Aufgaben, das dreiachsige Ellipsoid betreffend.

610—648. Aufgaben. Schnitte, Tangentialebenen, Pole und Polarebenen, Berührungscurven, Kreisebenen, umschriebene Rotationscylinder, conjugierte Durchmesser 604

649—650. Aufgaben. Constructionen, wenn drei conjugierte Durchmesser gegeben sind 660

§. Seite

651—660. Aufgaben. Bestimmung des dreiachsigen Ellipsoides aus gegebenen Elementen 664

XXVIII. Capitel.

Constructionen und Aufgaben, das dreiachsige zweitheilige Hyperboloid betreffend.

661—688. Aufgaben. Schnitte, Tangentialebenen. Berührungscurven, Kreisschnitte, Pole und Polarebenen 677

XXIX. Capitel.

Constructionen und Aufgaben bezüglich des elliptischen Paraboloides.

689—709. Aufgaben. Schnitte, Tangentialebenen, Berührungscurven, Pole und Polarebenen, Kreisschnitte 711

710 - 715. Aufgaben. Bestimmung des elliptischen Paraboloides aus verschiedenen Elementen 741

XXX. Capitel.

Gegenseitiger Schnitt der Flächen zweiten Grades.

716—739. Entwickelung der Eigenschaften des Durchschnittes zweier Flächen zweiten Grades und die Degenerationen der Schnittcurve; Flächenbüschel zweiten Grades 746

XXXI. Capitel.

Die zwei Flächen zweiten Grades gemeinschaftlich umschriebene Developpable. Scharen von Flächen zweiten Grades. Confocale Flächen zweiten Grades.

740—755. Eigenschaften und Sätze; Construction des Schnittes zweier Flächen zweiten Grades 769

XXXII. Capitel.

Die stereographische Projection, ihre Verallgemeinerung für Flächen zweiten Grades und ihre specielle Anwendung als Kartenprojection.

756—762. Ableitung der diesbezüglichen Eigenschaften, Anwendung auf die Abbildung der Erdoberfläche. Construction der Meridian- und Parallelkreisnetze für gegebene Fälle 782

Dritter Theil.

Die Flächen zweiten Grades.

Dritter Theil.

Die Flächen zweiten Grades.

Erster Abschnitt.

Windschiefe Flächen.

I. Capitel.

Erzeugung und Fundamentaleigenschaften windschiefer Flächen im allgemeinen.

§. 1.

Einleitung.

Wenn sich eine Gerade nach irgend einem Gesetze stetig fortbewegt, so ist der geometrische Ort aller ihrer Lagen eine krumme Fläche, welche allgemein als eine „Regelfläche" oder „Linearfläche" bezeichnet wird.

Die Linearflächen werden durch eine wesentlich unterscheidende Eigenschaft in zwei Gruppen getheilt.

Ist nämlich das Erzeugungsgesetz so beschaffen, dass je zwei unmittelbar aufeinander folgende Lagen der beweglichen Geraden in einer und derselben Ebene liegen, sich also schneiden, oder was gleichbedeutend ist, zu einander parallel sind, so wird die Linearfläche eine „developpable" oder „aufwickelbare Fläche" genannt.

Die wichtigsten Eigenschaften der developpablen Flächen wurden im allgemeinen sowohl als auch im besonderen, bereits im II. Band unserer „Darstellenden und projectiven Geometrie" entwickelt.

Ist jedoch die Natur des Erzeugungsgesetzes eine derartige, dass irgend eine Lage der beweglichen Geraden von der unmittelbar folgenden nicht geschnitten wird, so heißt die Linearfläche eine „windschiefe Fläche" oder kurz eine „Regelfläche".

§. 2.

Erzeugungsgesetz windschiefer Flächen.

Zunächst wollen wir die wichtigsten Erzeugungsarten der windschiefen Flächen kennen lernen.

Da die Erzeugenden einer windschiefen Fläche gerade Linien, also Linien sind, welche ihre Gestalt während der Erzeugung der Fläche nicht ändern, so ist einleuchtend, dass es hinreichen werde eine gewisse Anzahl von Curven, welche auf der windschiefen Fläche liegen, als „Leitlinien" derselben anzunehmen.

Das Erzeugungsgesetz für eine windschiefe Fläche wird sodann durch die Bedingung festgestellt sein, dass die erzeugende Gerade in jeder ihrer Lage alle diese Leitlinien in je einem Punkte schneide.

Vor allem wird es darauf ankommen zu ermitteln, wie viele Curven beliebig im Raume und unabhängig von einander als „Leitcurven" für eine Regelfläche angenommen werden dürfen, um diese ein-deutig zu bestimmen.

Nachdem eine Fläche d. i. ein geometrisches Gebilde erzeugt werden soll, dessen Punkte nicht den ganzen unendlichen Raum erfüllen, so ist klar, dass behufs Bestimmung der Fläche jedenfalls mehr als zwei Curven als „Leitlinien" angenommen werden müssen. Bei Nichteinhaltung dieser Bedingung würde durch jeden Punkt des Raumes eine bestimmte Anzahl von Erzeugenden gehen, welches die gemeinschaftlichen Erzeugenden jener beiden Kegel wären, die aus dem oberwähnten Punkte als Scheitel derselben, über den beiden Leitcurven beschrieben werden können.

Andrerseits ist aber wieder leicht einzusehen und ebenso leicht nachzuweisen, dass die Anzahl der beliebig zu wählenden Leitcurven kleiner als vier sein müsste.

Setzen wir nämlich den möglichen Fall voraus, dass vier beliebige Raumcurven C_1, C_2, C_3 und C_4 existierten, und wählen wir auf einer derselben, etwa auf C_1 irgend einen Punkt x, so wird es eine bestimmte Anzahl von Geraden (die gemeinschaftlichen Erzeugenden der beiden Kegel (x, C_2) und (x, C_3) geben, welche die beiden Curven C_2 und C_3 schneiden. Da aber die vorerwähnten Geraden die vierte beliebig gewählte Leitlinie C_4 im allgemeinen nicht treffen werden, so geht schon aus diesem Umstande unmittelbar hervor, dass nicht durch jeden Punkt x der Curve C_1 eine Erzeugende geführt werden könne, welche mit jeder der noch übrigen drei Curven je einen Punkt gemein hat. Es gibt im Gegentheil nur gewisse Punkte

auf C_1, die dieser Bedingung genügen und daher auch nur eine bestimmte endliche Anzahl von Geraden, welche alle vier Curven gleichzeitig schneiden. Aus dieser einfachen Betrachtung folgt somit unmittelbar, dass behufs Erzeugung einer windschiefen Fläche drei beliebig angenommene, von einander unabhängige Leitcurven erforderlich seien. Wir gelangen mithin zu dem Satze:

1. „Eine windschiefe Fläche ist durch drei beliebig angenommene Leitcurven vollkommen bestimmt.“

§. 3.

Sind nun C_1, C_2 und C_3 drei Leitcurven für eine windschiefe Fläche, so können einzelne Erzeugenden derselben, d. h. Gerade, welche jede der drei Curven in je einem Punkte schneiden, folgendermaßen bestimmt werden.

Man betrachtet irgend einen willkürlichen Punkt x der einen Leitcurve, allenfalls der Curve C_1, als Scheitel zweier Kegel, deren Leitcurven beziehungsweise die Curven C_2 und C_3 sind. Diese beiden Kegel (x, C_2) und (x, C_3) begegnen sich in einer bestimmten Anzahl von Erzeugenden, deren jede eine Gerade repräsentiert, welche die drei gegebenen Curven C_1, C_2 und C_3 schneidet und daher eine Erzeugende der Regelfläche darstellt.

Hieraus folgt sofort, dass jede der drei Leitlinien eine vielfache Curve der Fläche sei. Der Grad ihrer Vielfachheit ist stets gleich der Anzahl der Erzeugenden, welche durch einen ihrer Punkte gehen.

Da die Erzeugenden einer windschiefen Fläche gerade Linien sind, jede gerade Linie aber einen reellen unendlich fernen Punkt besitzt, so folgt nothwendig, dass jede windschiefe Fläche sich in unendliche Entfernung erstrecke, d. h. dass der Schnitt einer windschiefen Fläche mit der unendlich fernen Ebene stets eine reelle Curve sei.

Es ist demgemäß in jedem Falle zulässig, eine der Leitcurven in unendlicher Entfernung zu wählen.

Nachdem ein Punkt in unendlicher Entfernung am zweckmäßigsten dadurch festgestellt wird, dass man ihm eine Gerade als Träger gibt (als deren unendlich ferner Punkt derselbe zu gelten hat), so wird eine Curve in der unendlich fernen Ebene durch eine unendlich große Schar von Geraden gegeben sein müssen.

Auch diesfalls wird es wieder am einfachsten sein, anzunehmen, dass alle diese Geraden durch einen im Endlichen gelegenen

Punkt gehen, oder mit anderen Worten, es wird am zweckmäßigsten sein, eine Curve in unendlicher Entfernung dadurch als gegeben zu betrachten, dass man sie als unendlich ferne Curve eines Kegels annimmt.

Eine windschiefe Fläche wird daher durch zwei Leitlinien C_1 und C_2 in endlicher Entfernung, und durch die unendlich ferne Curve C_∞ eines gegebenen Kegels R als dritte Leitlinie, vollkommen bestimmt sein.

Da jede Erzeugende der windschiefen Fläche die unendlich ferne Leitlinie C_∞ in einem Punkte u schneiden muss, durch diesen Punkt aber auch eine Erzeugende des Kegels R geht, so folgt weiter, dass sämmtliche Erzeugenden der windschiefen Fläche zu den Erzeugenden des Kegels R parallel sind.

Aus diesem Grunde wird der gegebene Kegel der „Richtungskegel" (cône directeur) der windschiefen Fläche genannt.

§. 4.

Nach der Art der Leitlinien unterscheidet man drei Haupttypen von Regelflächen.

a) Windschiefe Regelflächen mit drei krummen Leitlinien.

In diese Kategorie gehören auch jene Regelflächen, die durch zwei krumme Leitlinien und einen Richtungskegel gegeben sind.

b) Zwei krumme Leitlinien und eine Leitgerade.

Liegt die Leitgerade in unendlicher Entfernung, so wird dieselbe durch eine Ebene „die Richtebene" als Träger gegeben sein, zu welcher sodann die Erzeugenden der windschiefen Fläche parallel sein werden.

c) Windschiefe Flächen mit einer krummen Leitlinie und zwei Leitgeraden.

Liegt die eine der beiden Leitgeraden speciell in unendlicher Entfernung, d. h. ist die windschiefe Fläche durch eine Leitcurve, eine Leitgerade und eine Richtebene gegeben, so wird dieselbe ein „Conoid" genannt.

Sind die drei Leitlinien einer Regelfläche sämmtlich gerade Linien, so entsteht das sogenannte „windschiefe Hyperboloid."

Ist insbesondere die eine Leitgerade unendlich fern, d. h. sind zwei Leitgeraden und eine Richtebene gegeben, so heißt die windschiefe Fläche ein „hyperbolisches Paraboloid."

§. 5.

Bevor wir diese verschiedenen Typen von Regelflächen einer eingehenden Betrachtung unterziehen, mögen zunächst noch einige Definitionen und Eigenschaften für die windschiefe Regelfläche im allgemeinen aufgestellt beziehungsweise entwickelt werden.

Die Tangentialebene einer krummen Fläche in einem ihrer Punkte x enthält bekanntlich die Tangenten aller durch x gehenden auf der Fläche liegenden Curven in diesem Punkte.

Nachdem durch jeden Punkt x einer Regelfläche eine gerade Erzeugende geht, und diese als eine auf der Fläche liegende Curve, welche mit allen ihren Tangenten zusammenfällt, betrachtet werden kann, so folgt unmittelbar, dass die Tangentialebene einer windschiefen Fläche in einem ihrer Punkte x die durch diesen Punkt gehende Erzeugende enthalten müsse.

Um zu weiteren Resultaten betreffs der „Tangentialebene einer windschiefen Regelfläche“ zu gelangen, stellen wir folgende Betrachtung an.

Es sei g (Taf. I, Fig. 1) eine Erzeugende der windschiefen Fläche und g_1 die unmittelbar auf g folgende Erzeugende derselben Regelfläche. Ferner stelle B eine Ebene dar, welche zur Erzeugenden g senkrecht steht und dieselbe in einem Punkt γ schneide. Weiters repräsentiere γ' die orthogonale Projection von g_1 auf die Ebene B.

Da auf Grund der gemachten Voraussetzung die beiden Erzeugenden g und g_1 keinen Punkt gemein haben, so folgt, dass auch γ' nicht durch den Punkt γ gehen könne.

Ist x ein beliebiger Punkt der Erzeugenden g, so wird offenbar die Berührungsebene der Regelfläche in diesem Punkte x die Erzeugende g enthalten müssen.

Um noch ein weiteres Bestimmungsstück für diese Tangentialebene zu erhalten, denken wir uns durch x eine Ebene B_1 parallel zur Ebene B geführt. Diese Ebene schneidet die Regelfläche in einer Curve, welche sich als Ort der Durchschnittspunkte aller Erzeugenden mit der Ebene ergibt. Die Punkte x und x_1, in welchen die Ebene B_1 die Erzeugenden g und g_1 schneidet, sind selbstverständlich zwei Punkte der Schnittcurve, und da die Erzeugenden g und g_1, also auch die Punkte x und x_1 unendlich nahe aneinander liegen, so ist die Verbindungsgerade t von x und x_1 die Tangente der Schnittcurve im Punkte x.

Die Berührungsebene der Regelfläche im Punkte x ist somit durch die Erzeugende g und durch die Flächentangente t vollkommen bestimmt.

Wenn nun ξ' die Projection des Punktes x_1 auf die Ebene B darstellt, so ist $\gamma\xi' = \tau$ die Projection der Tangente t auf B. Gleichzeitig ist aber τ auch die Trace der Berührungsebene auf der Ebene B.

§. 6.

Die Ebene (g, t) berührt, wie sich unschwer nachweisen lässt, die windschiefe Fläche nur in dem einen Punkte x der Erzeugenden g.

Gesetzt, die Ebene (g, t) berühre die Fläche noch in einem anderweitigen Punkte y der Erzeugenden g. Legen wir, um zu richtiger Erkenntnis zu gelangen, durch y eine Ebene B_2 parallel zur Ebene B_1, so müsste diese die Berührebene (g, t) in einer Tangente $y\,y_1$ der Fläche schneiden, und diese Tangente müsste, ebenso wie die vorige, die Verbindungsgerade derjenigen Punkte y und y_1 sein, in welchen B_2 die beiden unendlichen nahen Erzeugenden g und g_1 schneidet. Es müsste also, mit anderen Worten, die Berührebene (g, t) die vier Punkte x, x_1, y, y_1, also die beiden Geraden g und g_1 enthalten, was aber, der Voraussetzung nach, indem sich die letzteren nicht schneiden, ganz unmöglich ist.

Daher der Satz:

2. „Die Tangentialebene einer windschiefen Fläche berührt diese nur in einem Punkte; alle anderen der Fläche und der Berührungsebene angehörigen Punkte sind einfache Schnittpunkte und bilden eine Curve, welche aus der Erzeugenden des Berührungspunktes, und dem Orte der Schnittpunkte aller übrigen Erzeugenden mit der Berührebene besteht.“

§. 7.

Behufs Feststellung einer weiteren Eigenschaft, stellen wir uns vor, dass der angenommene Berührungspunkt x (Taf. I, Fig. 1) die Erzeugende g durchlaufe. Dies vorausgesetzt wird sich nothwendig auch der Punkt x_1 auf g_1 und mithin auch seine Projection ξ' auf γ' fortbewegen. Selbstverständlich wird sich aber dann gleichzeitig auch die Gerade τ, als Verbindungslinie der Punkte ξ' und γ, um γ drehen müssen.

Nachdem τ die Trace der Berührungsebene auf der Ebene B darstellt, so folgt, dass die Berührebene sich um die Erzeugende g dreht, wenn der Berührungspunkt x die Gerade g durchläuft.

Es wird mithin einer jeden Ebene, welche durch g geht, ein Berührungspunkt x auf g entsprechen; d. h.

3. „Jede Ebene, welche durch eine Erzeugende einer windschiefen Fläche geht, berührt die letztere in einem Punkte dieser Erzeugenden.“

§. 8.

Wenden wir uns nun gewissen speciellen Lagen der Berührungspunkte und beziehungsweise der Tangentialebenen einer windschiefen Fläche längs einer Erzeugenden zu.

Setzen wir diesbezüglich vor allem voraus, der Berührungspunkt x rücke in unendliche Entfernung.

Tritt dieser Fall ein, so wird offenbar auch der mit ihm correspondierende Punkt x_1 im Unendlichen liegen und die Projection ξ' von x_1 wird durch den unendlich fernen Punkt von γ' repräsentiert erscheinen, während die Gerade τ durch die zu γ' Parallele τ_∞ vertreten wird.

Da τ_∞ gleichzeitig die Trace der Berührungsebene auf der Ebene B darstellt, so folgt, dass die Ebene, welche die windschiefe Fläche im unendlich fernen Punkte der Erzeugenden g berührt, zur nächstfolgenden Erzeugenden g_1 parallel sei.

Denkt man sich nun durch einen beliebigen Punkt δ im Raume Parallele zu allen Erzeugenden der Regelfläche geführt, so bilden diese bekanntlich den Richtungskegel der Fläche. Die zu g und g_1 parallelen Erzeugenden des Richtungskegels folgen unmittelbar aufeinander, und bestimmen die Berührungsebene des Richtungskegels längs der zu g parallelen Kegelerzeugenden.

Die Ebene, welche die Regelfläche im unendlich fernen Punkte von g berührt, ist mithin zu der genannten Berührebene des Richtungskegels parallel.

Eine Ebene, welche die windschiefe Fläche in dem unendlich fernen Punkte einer Erzeugenden berührt, heißt eine „asymptotische Ebene“ der Regelfläche.

Die vorstehende Betrachtung liefert sonach den Satz:

4. „*Die asymptotische Ebene einer Regelfläche für eine Erzeugende g ist parallel zu der Berührebene des Richtungskegels längs der zu g parallelen Erzeugenden.*“

Die eben aufgefundene Eigenschaft lässt sich auch direct auf folgende Weise ableiten.

Soll eine Ebene die Regelfläche in dem unendlich fernen Punkte u einer Erzeugenden berühren, so muss dieselbe außer der Erzeugenden g auch die Tangente t_u der unendlich fernen Curve C_∞ der Regelfläche im Punkte u enthalten. Nachdem aber die Curve C_u auch dem Richtungskegel angehört, so ist t_u gleichzeitig auch die unendlich ferne Gerade jener Berührungsebene des Richtungskegels, dessen Berührzeugende durch den Punkt u geht, und mithin zu g parallel ist.

Die asymptotische Ebene der Regelfläche für die Erzeugende g und die Berührebene des Richtungskegels längs der zu g parallelen Erzeugenden, haben daher die unendlich ferne Tangente t_u gemein, oder mit anderen Worten, sie sind zu einander parallel.

§. 9.

Denken wir uns weiters durch g jene Ebene gelegt, welche zur asymptotischen Ebene dieser Erzeugenden senkrecht steht. Besagte Ebene pflegt man die „Centralebene" der Regelfläche für die Erzeugende g zu nennen. Dieselbe berührt, ebenso wie jede andere durch g gehende Ebene, die windschiefe Fläche in einem Punkte der Erzeugenden g, welcher der „Centralpunkt" dieser Erzeugenden heißt.

Diesen Punkt zu bestimmen, sei unsere nächste Aufgabe.

Da die Centralebene der Erzeugenden g zu der asymptotischen Ebene derselben Erzeugenden senkrecht steht, so wird auch deren Trace τ_c auf der Ebene B zur Trace τ_∞, also auch zu γ' normal sein.

Andererseits ist aber τ_c auch die Projection einer in der Berührungsebene liegenden Flächentangente t_c. Letztere wird einfach erhalten, wenn man den Punkt ξ_c', in welchem γ' von τ_c getroffen wird, in die Gerade g_1 nach x_c' zurückprojiciert und durch x_c' die Parallele t_c zu τ_c zieht. Die Gerade t_c schneidet nun auch die Erzeugende g in einem Punkte x_c und dieser Punkt stellt nichts anderes, als den Berührungspunkt der Centralebene (g_1, t_{c1}) d. i. den gesuchten Centralpunkt x_c dar.

Ferner findet man aber, dass die Gerade t_c die Linie des kürzesten Abstandes der beiden Erzeugenden g und g_1 repräsentiert, dass mithin der Centralpunkt x_c derjenige Punkt der Erzeugenden g ist, welcher von g_1 den kürzesten Abstand besitzt. Wir erhalten somit den Satz:

5. „*Der Centralpunkt einer Erzeugenden irgend einer Regelfläche ist derjenige Punkt dieser Erzeugenden, welchem von der unmittelbar folgenden Erzeugenden der kleinste Abstand entspricht.*"

Der geometrische Ort der Centralpunkte aller Erzeugenden einer Regelfläche wird die „Strictionslinie" der Regelfläche genannt.

Es mag gleich an dieser Stelle, zur Vermeidung allenfallsigen Irrthums, hervorgehoben werden, dass zwar die Punkte der Erzeugenden, welche von den betreffenden unmittelbar folgenden Erzeugenden

den kleinsten Abstand besitzen, dem vorhergehenden Satze zufolge, Punkte der Strictionslinie sind, dass aber die kürzesten Abstände je zweier unmittelbar aufeinander folgenden Erzeugenden der Regelfläche nicht auch Elemente der Strictionslinie repräsentieren. Der Fall, dass die Linien des kürzesten Abstandes wirklich Elemente der Strictionslinie sind, tritt nur bei besonderen Flächengattungen auf, so beispielsweise — wie in der Folge nachgewiesen werden soll — bei den geraden Conoiden.

Die Ebenen, welche die windschiefe Fläche in den unendlich fernen Punkten ihrer Erzeugenden berühren — das heißt die asymptotischen Ebenen der windschiefen Fläche — umhüllen eine aufwickelbare Fläche, welche als die asymptotische Developpable der gegebenen Regelfläche bezeichnet wird.

Auf die Ermittelung und Erörterung weiterer Eigenschaften der Regelflächen werden wir nach der Besprechung und Entwickelung der wichtigsten Sätze über das Hyperboloid und das Paraboloid zurückkommen.

II. Capitel.

Das windschiefe Hyperboloid.

§. 10.

Ein windschiefes, einfaches oder einmanteliges Hyperboloid ist eine windschiefe Regelfläche, deren Erzeugenden drei gegebene feste Geraden, „die Leitgeraden“, schneiden.

Die gegebenen Leitgeraden, welche wir, als in centraler Projection dargestellt, voraussetzen, seien l_1, l_2, l_3 (Taf. I, Fig. 2*a* und 2*b*). Einzelne Lagen von Erzeugenden des Hyperboloides können, wie folgt, construiert werden.

a) Wir nehmen auf einer der drei Leitgeraden, etwa auf l_3 einen beliebigen Punkt a_3 an und suchen die durch diesen Punkt gehende Erzeugende.

Nachdem die zu bestimmende Erzeugende die Leitlinie l_1 schneiden soll, so muss dieselbe in der durch a_3 und l_1 (Taf. I, Fig. 2*a*) bestimmten Ebene $e'_b e'_v$ liegen. In gleicher Weise findet man, dass

die gesuchte Erzeugende auch in der durch a_3 und die Leitgerade l_2 bestimmten Ebene $e^2_b e^2_v$ liegen müsse, da die verlangte Erzeugende auch diese Leitgerade zu schneiden hat.

Die Schnittgerade g_a der beiden Ebenen e^1 und e^2 ist somit jene Gerade, welche beide Bedingungen erfüllt, denn sie schneidet sowohl die Gerade l_1 in einem Punkte a_1, als auch die Gerade l_2 in einem Punkte a_2.

Endlich schneidet die Gerade g_a auch die dritte Gerade l_3, da sie durch den auf derselben angenommenen Punkt a_3 geht. Es ist somit g_a eine Erzeugende des Hyperboloides.

b) Denken wir uns durch eine der drei Leitlinien, allenfalls durch l_3 (Taf. I, Fig. 2*b*) eine beliebige Ebene $e_b e_v$ gelegt und bestimmen deren Schnittpunkte a_1 und a_2 mit den beiden anderen Leitgeraden l_1 und l_2.

Die Verbindungsgerade g_a der Punkte a_1 und a_2 schneidet die Leitgeraden l_1 und l_2 in eben diesen Punkten; sie schneidet aber auch die dritte Leitgerade l_3 in einem Punkte a_3, da die letztere mit g_a in einer und derselben Ebene $e_b e_v$ liegt. Die Gerade DV oder g_a stellt daher wieder, sowie im vorhergehenden Falle, eine Erzeugende des Hyperboloides dar.

§. 11.

Die beiden eben entwickelten höchst einfachen Constructionen bilden das Fundament für alle weiteren Eigenschaften des Hyperboloides.

Dass die auf die angedeutete Weise entstehende Fläche in der That eine windschiefe sei, d. h. dass eine beliebige Erzeugende derselben von der unmittelbar folgenden nicht geschnitten wird, haben wir zunächst noch nachzuweisen.

Seien l_1, l_2 und l_3 (Taf. I, Fig. 3) die drei Leitgeraden, von welchen, der Voraussetzung nach, keine zwei in einer und derselben Ebene liegen. Ferner seien g_a und g_b zwei Erzeugende des Hyperboloides, welche die Leitgeraden l_1, l_2 und l_3 beziehungsweise in den Punkten a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3 schneiden mögen.

Die beiden Erzeugenden g_a und g_b können unmöglich in einer und derselben Ebene liegen, da in dieser Ebene auch die sechs Punkte a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 und b_3 und mithin auch die Geraden l_1, l_2 und l_3 liegen müssten, was der Voraussetzung widerspricht.

Wie ersichtlich, lässt sich überhaupt kein solches Paar von Erzeugenden der Fläche finden und lassen sich mithin auch keine un-

mittelbar benachbarten Erzeugenden ermitteln, welche sich schneiden könnten, so dass also mit Recht behauptet werden kann, dass die nach obigem Principe erzeugte Fläche eine windschiefe Fläche sei.

§. 12.

Die vorher für die Feststellung der Lage einer Erzeugenden des Hyperboloides entwickelte Construction führt direct zu den projectivischen Eigenschaften der bezeichneten Fläche.

Nimmt man auf einer der drei Leitlinien l_1, l_2 und l_3 des Hyperboloides, beispielsweise auf l_3 einen Punkt a_3 an, so ist, wie unter a), §. 10, gezeigt wurde, die Schnittgerade g_a jener Ebenen e^1 und e^2, welche durch a_3 und die Leitlinie l_1 oder beziehungsweise l_2 gehen, eine Erzeugende des Hyperboloides.

Durchläuft der Punkt a_3 die Gerade l_3, so dreht sich die denselben enthaltende Ebene e^1 um die feste Gerade l_1, oder mit anderen Worten, die Ebene e^1 erzeugt ein der Punktreihe $l_3(a_3\ldots)$ perspectivisches Ebenenbüschel $l_1(e^1\ldots)$.

In gleicher Weise findet man, dass auch die Ebene e^2 ein der Punktreihe $l_3(a_3\ldots)$ perspectivisches Ebenenbüschel $l_2(e^2\ldots)$ mit der Achse l_2 erzeugt.

Die beiden Ebenenbüschel $l_1(e^1\ldots)$ und $l_2(e^2\ldots)$ sind daher unter einander projectivisch und zwar entsprechen sich in denselben solche Ebenen e^1 und e^2, welche durch den nämlichen Punkt $a_3\ldots$ der Reihe $(a_3\ldots)$ gehen.

Andererseits ist aber die Schnittgerade g_a zweier solcher entsprechender Ebenen eine Erzeugende des Hyperboloides. Hieraus folgt direct der Satz:

6, „Das windschiefe Hyperboloid, dessen Leitlinien drei sich kreuzende Geraden l_1, l_2, l_3 sind, wird erzeugt durch die Schnittlinien der entsprechenden Ebenen zweier projectivischer Ebenenbüschel, deren Achsen zwei von den drei Leitgeraden sind und welche zu der Punktreihe auf der dritten Leitgeraden perspectivisch sind.“

§. 13.

Durch näheres Eingehen auf die unter b), §. 10, angegebene Construction des Hyperboloides gelangen wir zu einem gleich wichtigen Resultate. An der betreffenden Stelle fanden wir, dass die Verbindungslinie jener Punkte a_1 und a_2, in welchen die beiden Leitgeraden l_1 und l_2 von einer durch die dritte Leitgerade l_3 gelegten Ebene e geschnitten werden, eine Erzeugende des Hyperboloides darstelle.

Betrachten wir die besagte Ebene e als Element eines Ebenenbüschels $l_3(e\ldots)$ mit der Achse l_3, so können wir auch die Punkte a_1 und a_2 als Elemente zweier Punktreihen $l_1(a_1\ldots)$ und $l_2(a_2\ldots)$ auf den Geraden l_1 und l_2 auffassen, und zwar jener Punktreihen, welche sich im Schnitte dieser Geraden mit dem Ebenenbüschel $l_3(e\ldots)$ ergeben.

Da aber einerseits derartige Punkte a_1 und a_2 der beiden Punktreihen, welche in einer und derselben Ebene e des Büschels $l_3(e\ldots)$ liegen, einander entsprechen und andererseits die Verbindungslinie solcher Punkte a_1 und a_2 eine Erzeugende des Hyperboloides repräsentiert, so folgt unmittelbar der Satz:

7. „*Das windschiefe Hyperboloid, dessen Leitgeraden drei sich kreuzende Geraden* l_1, l_2 *und* l_3 *sind, wird erzeugt durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte jener beiden Punktreihen auf zwei dieser Leitgeraden, welche zu dem Ebenenbüschel, welches die dritte Leitgerade zur Achse hat, perspectivisch sind.*"

§. 14.

Es liegt nun die Frage nahe, ob nicht überhaupt die Schnittgeraden entsprechender Ebenen zweier projectivischen Ebenenbüschel mit sich kreuzenden Achsen und die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier projectivischer Punktreihen auf sich kreuzenden Trägern, ein Hyperboloid erzeugen.

Dass dies in der That der Fall ist, zeigen nachstehende Betrachtungen.

Die Geraden l_1 und l_2, von welchen wir annehmen, dass sie nicht in einer und derselben Ebene liegen, seien die Achsen zweier projectivischer Ebenenbüschel.

Ferner wollen wir $e^1_a e^2_a$, $e^1_b e^2_b$, $e^1_c e^2_c$ als drei Paare entsprechender Ebenen dieser Büschel voraussetzen. Die entsprechenden Ebenen e^1_a und e^2_a mögen sich in einer Geraden g_a, e^1_b und e^2_b in einer Geraden g_b und $e^1_c e^2_c$ in einer Geraden g_c schneiden.

Denken wir uns nun eine Gerade l_3 construiert, welche die drei Geraden g_a, g_b und g_c schneidet, und benennen wir die betreffenden Schnittpunkte beziehungsweise mit a, b und c.

Die Gerade l_3 wird von den beiden projectivischen Ebenenbüscheln $l_1(e^1_a e^1_b e^1_c\ldots)$ und $l_2(e^2_a e^2_b e^2_c\ldots)$ in zwei projectivischen Reihen geschnitten. Nachdem aber der Punkt a auf l_3 der Geraden g_a, mithin auch den beiden entsprechenden Ebenen e^1_a und e^2_a angehört, so stellt derselbe zwei entsprechende zusammenfallende Punkte der genannten Punktreihen vor. Das gleiche gilt auch von den Punkten

b und c, so zwar, dass die beiden Reihen, in welchen die Gerade l_3 von den projectivischen Ebenenbüscheln l_1 und l_2 geschnitten werden, in a, b und c drei Paare entsprechender zusammenfallender Punkte besitzen.

Dieses Ergebnis sagt aber bekanntlich nichts anderes aus, als dass die beiden Reihen identisch seien, und dass daher auch alle anderen Paare entsprechender Punkte derselben zusammenfallen, oder mit anderen Worten, dass zwei einander entsprechende Ebenen der beiden projectivischen Ebenenbüschel l_1 und l_2 durch einen und denselben Punkt der Geraden l_3 gehen.

Durch diese einfachen Erörterungen ist klar gelegt, dass die Schnittlinien entsprechender Ebenen der beiden projectivischen Ebenenbüschel l_1 und l_2 nicht nur die Achsen l_1 und l_2 dieser Büschel, sondern auch die Gerade l_3 schneiden, woraus unmittelbar weiter folgt, dass dieselben ein windschiefes Hyperboloid erzeugen. Es gilt mithin der Satz:

8. *„Die Schnittlinien entsprechender Ebenen zweier projectivischer Ebenenbüschel mit sich kreuzenden Achsen erzeugen immer ein windschiefes Hyperboloid.“*

§. 15.

Die vorstehende Betrachtung führt noch zu einem anderweitigen sehr wichtigen Satze. Es wurde im Vorhergehenden nachgewiesen, dass alle Erzeugenden des Hyperboloides, d. s. die Schnittlinien entsprechender Ebenen der beiden Büschel l_1 und l_2, die Gerade l_3 schneiden.

Bezeichnete Gerade wurde folgendermaßen construiert. Wir suchten zunächst die Schnittgeraden g_a, g_b und g_c beliebiger drei Paare entsprechender Ebenen der beiden Büschel l_1 und l_2, d. h. drei beliebige Erzeugende des Hyperboloides, wählten hierauf eine Gerade l_3 derart, dass die drei Erzeugenden g_a, g_b und g_c von derselben geschnitten wurden, und fanden schließlich, dass die bezeichnete Gerade l_3 auch von allen anderen Erzeugenden $g\ldots$ geschnitten werde.

Nun gibt es aber eine unendlich große Schar solcher Geraden l_3, welche die drei Erzeugenden g_a, g_b und g_c schneiden. Diese Geraden bilden in ihrer Gesammtheit ein einmantliges windschiefes Hyperboloid, dessen Leitlinien die drei Erzeugenden g_a, g_b und g_c sind. Jede dieser Geraden l_3 wird, wie der Entwickelung deutlich zu entnehmen ist, von sämmtlichen Erzeugenden $g\ldots$ geschnitten.

Hieraus ist weiters zu ersehen, dass es außer den Erzeugenden $g\ldots$ noch eine zweite unendliche Schar von Geraden l_3 gibt, welche gleichfalls auf dem Hyperboloid liegen, demselben also angehören, und

deren jede die Eigenschaft besitzt, von allen Erzeugenden g der Fläche geschnitten zu werden.

Man bezeichnet die Schar der Geraden g als „Erzeugende des ersten Systems“ und jene Schar der Geraden l_3 als „Erzeugende des zweiten Systems« der Fläche. Es folgt sonach der Satz:

9. „Das windschiefe Hyperboloid besitzt zwei Systeme von geradlinigen Erzeugenden; jede Erzeugende des einen Systemes schneidet sämmtliche Erzeugenden des anderen Systemes.“

Als Ergebnis unserer Erörterungen und der erzielten Resultate folgt somit auch, dass man beliebige drei Erzeugende des einen Systems, stets als Leitlinien für das andere System und umgekehrt annehmen kann.

§. 16.

In ähnlicher Weise kann nunmehr auch der Nachweis erbracht werden, dass die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier projectivischen Punktreihen auf zwei sich kreuzenden Trägern ein Hyperboloid erzeugen.

Die Träger der beiden projectivischen Punktreihen $l_1 (a_1 \ldots)$ und $l_2 (a_2 \ldots)$ seien wieder l_1 und l_2.

Wenn wir alle Punkte $a_1 \ldots$ der Reihe l_1 durch Ebenen projicieren, welche durch die Gerade l_2 gehen, so entsteht ein Ebenenbüschel $l_2 (e_1 \ldots)$, welches zur Reihe l_1 perspectivisch ist. Ebenso kann man die Reihe $l_2 (a_2 \ldots)$ durch ein Ebenenbüschel $l_1 (e_1 \ldots)$ aus der Achse l_1 projicieren.

Nachdem die beiden Punktreihen projectivisch sind, so sind es auch die zu ihnen perspectivischen Ebenenbüschel $l_1 (e_1 \ldots)$ und $l_2 (e_2 \ldots)$.

Entsprechende Ebenen der beiden Büschel sind solche, welche zwei entsprechende Punkte der beiden Reihen enthalten.

Setzen wir demgemäß voraus, es seien a_1 und a_2 zwei entsprechende Punkte der beiden Reihen $l_1 (a_1 \ldots)$ und $l_2 (a_2 \ldots)$, so sind die Ebenen (l_2, a_1) und (l_1, a_2) entsprechende Ebenen der beiden projectivischen Büschel $l_2 (e_2 \ldots)$ und $l_1 (e_1 \ldots)$.

Ferner ist einleuchtend, dass die Schnittgerade dieser Ebenen nur die Verbindungsgerade $a_1 a_2$ sein könne, dass also die Fläche, welche durch die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte a_1 und a_2 der projectivischen Reihen hervorgebracht wird, identisch mit jener Fläche ist, welche durch die Schnittlinien entsprechender Ebenen der beiden projectivischen Ebenenbüschel $l_2 (e_2 \ldots)$ und $l_1 (e_1 \ldots)$ erzeugt wird.

Nachdem aber diese Fläche (nach Satz 8) ein windschiefes Hyperboloid ist, so folgt der Satz:

10. „Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier projectivischer Punktreihen auf zwei sich kreuzenden Trägern sind Erzeugende eines windschiefen Hyperboloides.“

Den bisherigen Betrachtungen und den daraus entwickelten Sätzen ist zu entnehmen, dass das Hyperboloid wesentlich projectivischer Natur sei, und dass von diesem Gesichtspunkte aus die meisten Eigenschaften desselben mit ungewöhnlicher Leichtigkeit abgeleitet und festgestellt werden können.

§. 17.

Auf Grund des vorher erbrachten Nachweises gelangten wir zu dem Schlusse, dass eine Gerade, welche drei Erzeugende eines Hyperboloides schneidet, eine Erzeugende des zweiten Systems derselben Fläche darstelle, also ganz der Fläche angehöre.

Da man aber durch jeden Punkt der besagten Fläche, stets eine Erzeugende des einen Systems, als auch eine solche des anderen Systems führen kann, so kann anstandslos weiter gefolgert werden, dass eine Gerade, welche mit dem Hyperboloide drei Punkte gemein hat, der Fläche ganz und gar angehören muss.

Es ist daher einleuchtend, dass eine Gerade, welche nicht auf dem Hyperboloide liegt, mit dem letzteren höchstens zwei Punkte gemein haben kann, dass also das Hyperboloid eine Fläche zweiter Ordnung sei.

Zu demselben Resultate werden wir jedoch auch direct durch die Lösung der nachstehenden Aufgabe geführt.

§. 18.

1. Aufgabe. **„Es sind vier Gerade, von welchen kein Paar sich schneidet, und von welchen keine drei zu einer und derselben Ebene parallel sind, gegeben; es sind jene Geraden zu bestimmen, welche alle vier Geraden schneiden.“**

Die gegebenen vier Geraden seien (g_1, g_1'), (g_2, g_2'), (g_3, g_3') und (h, h'), (Taf. I, Fig. 4). Betrachten wir irgend welche drei von diesen Geraden, beispielsweise g_1, g_2 und g_3, als die Leitgeraden eines windschiefen Hyperboloides.

Dass unter dieser Voraussetzung die gestellte Aufgabe identisch ist mit jener, „die Erzeugenden des Hyperboloides zu construieren, welche eine Gerade h schneiden“, oder was auf dasselbe hinausläuft, „die Schnittpunkte der Geraden h mit dem Hyperboloide zu ermitteln“, ist an und für sich klar.

Behufs Erreichung des vorgegebenen Zweckes dürfte es am vortheilhaftesten sein, das Hyperboloid, wie vorher erläutert, durch zwei projectivische Ebenenbüschel zu erzeugen.

Betrachten wir im vorliegenden Falle die beiden Leitgerade g_2 und g_3 als Achsen der erzeugenden projectivischen Ebenenbüschel, und die Leitgerade g_1 als den Träger der Punktreihe, zu welcher diese Ebenenbüschel perspectivisch sind.

Zwei entsprechende Ebenen der beiden Büschel, d. h. solche Ebenen, welche durch einen und denselben Punkt von g_1 gehen, schneiden sich in einer Geraden, welche die drei gegebenen Geraden g_1, g_2 und g_3 trifft, und mithin eine Erzeugende des Hyperboloides repräsentiert. Weiters treffen aber die beiden projectivischen Ebenenbüschel g_2 und g_3 die Gerade h in zwei projectivischen Punktreihen, und nachdem bekanntlich zwei auf einer und derselben Geraden liegende Punktreihen stets zwei Doppelpunkte besitzen, so ist einleuchtend, dass es auch auf der Geraden h zwei bestimmte Punkte — die Doppelpunkte der vorgenannten Reihen — gibt, durch deren jeden zwei entsprechende Ebenen der Büschel g_2 und g_3 und folglich auch eine Erzeugende des Hyperboloides geht.

Dieser einfachen Betrachtung entnehmen wir unmittelbar, dass die Gerade h das Hyperboloid in zwei Punkten treffe, dass also diese Fläche von der zweiten Ordnung, als windschiefe Fläche daher vom zweiten Grade sei.

Was die Construction der beiden Schnittpunkte von h mit dem Hyperboloide anbelangt, oder mit anderen Worten, was die Construction der beiden Geraden, welche h, g_1, g_2, g_3 schneiden, betrifft, so dürfte folgendes Verfahren am einfachsten zum Ziele führen.

Wir nehmen, den eben angestellten Erörterungen gemäß, auf g_1 drei beliebige Punkte (A, A'), (B, B'), (C, C') an, und bestimmen die betreffenden Schnittpunkte (a, a'), (b, b'), (c, c') und (a_1, a_1'), (b_1, b_1'), (c_1, c_1') der durch diese Punkte und durch die Gerade g_2 beziehungsweise g_3 gelegten Ebenen mit der Geraden h. Es genügt diesfalls entweder bloß die horizontalen oder bloß die verticalen Projectionen dieser Schnittpunkte zu ermitteln. In Figur 4, Taf. I, wurde der folgende Weg eingeschlagen.

Um beispielsweise den Schnittpunkt (a, a') der Geraden h mit der durch (g_3, g_3') und (A, A') gehenden Ebene zu construieren, denkt man sich durch (A, A') eine Parallele (λ, λ') zu (g_3, g_3') gezogen, und ohne erst die Tracen der Ebene (g_3, λ) zu suchen, ihren Schnitt mit h auf die bekannte Weise mittelst einer durch (h, h') gelegten verticalprojicierenden Ebene bestimmt. Nach Vollzug dieser ein-

fachen Operation sind nunmehr die Doppelpunkte (D_1, D_1') und (D_2, D_2') der beiden durch die drei Elementenpaare (a, a'), (a_1, a_1'); (b, b') (b_1, b_1'); (c, c'), (c_1, c_1') gegebenen projectivischen Punktreihen auf h festzustellen.

Die horizontalen Projectionen D_1' und D_2' dieser Doppelpunkte sind auch Doppelpunkte der beiden Reihen $a', b', c' \dots$ und $a_1', b_1', c_1' \dots$ Dieselben wurden nach der Steiner'schen Methode mittelst Zuhilfenahme eines festen, beliebig angenommenen Kreises K construiert.

Die Punkte (D_1, D_1') und (D_2, D_2') sind bereits die Schnittpunkte der Geraden (h, h') mit dem Hyperboloide $(g_1 g_2 g_3)$. Die beiden durch diese Punkte gehenden Erzeugenden (l_1, l_1') und (l_2, l_2') des Hyperboloides ergeben sich offenbar als die Schnitte der bezüglichen Ebenenpaare $(g_2 D_1)$, $(g_3 D_1)$ und $(g_2 D_2)$, $(g_3 D_2)$.

§. 19.

Denken wir uns zwei beliebige projectivische Ebenenbüschel im Raume, deren Achsen zwei sich kreuzende Geraden g_2 und g_3 sein mögen.

Die Schnittgeraden entsprechender Ebenen dieser Büschel werden eine windschiefe Fläche erzeugen, welche, wie sich unschwer nachweisen lässt, vom zweiten Grade ist.

Nehmen wir nämlich eine beliebige Gerade h an, so bestimmen die beiden projectivischen Ebenenbüschel auf derselben zwei projectivische Punktreihen, welche im allgemeinen zwei Doppelpunkte besitzen. Durch jeden dieser Doppelpunkte gehen zwei einander entsprechende Ebenen der Büschel g_2 und g_3, mithin also eine Erzeugende der Fläche. Die Gerade h hat demgemäß mit der durch die beiden projectivischen Büschel g_2 und g_3 erzeugten windschiefen Fläche zwei Punkte — die vorerwähnten Doppelpunkte — gemein, ist somit eine Fläche vom zweiten Grade.

Es ist naheliegend, zu untersuchen, ob eine derartige Fläche zweiten Grades, welche von den Schnittlinien entsprechender Ebenen zweier projectivischen Ebenenbüschel g_2 und g_3 hervorgebracht wird, nicht auch ein windschiefes Hyperboloid sei, d. h. eine Fläche ist, welche durch jene Gerade erzeugt wird, die drei gegebene Geraden g_1, g_2 und g_3 schneidet.

Um für die Richtigkeit der ausgesprochenen Vermuthung den Beweis zu erbringen, wird es offenbar genügen, zu zeigen, dass die Schnittlinien entsprechender Ebenen der Büschel g_2 und g_3, außer den Achsen g_2 und g_3 dieser Büschel, noch eine dritte Gerade g_1, die zu bestimmen sein wird, schneiden. Wie der nachstehenden Betrachtung entnommen werden kann, ist dies in der That der Fall.

Seien nämlich e^1_2, e^1_3; e^2_2, e^2_3; e^3_2, e^3_3 drei Paare entsprechender Ebenen der beiden Büschel g_2 und g_3, und l_1, l_2, l_3 die durch dieselben bestimmten Erzeugenden. Denken wir uns nun eine von den unendlich vielen Geraden, welche die drei Erzeugenden l_1, l_2, l_3 schneiden, construiert, und sei allenfalls g_1 eine dieser Geraden. Letztere treffe die vorangeführten Erzeugenden l_1, l_2 und l_3 beziehungsweise in den Punkten a_1, a_2 und a_3.

Die beiden projectivischen Ebenenbüschel g_2 und g_3 bestimmen auf g_1 zwei projectivische Punktreihen. Den gemachten Voraussetzungen gemäß besitzen diese beiden letzterwähnten Punktreihen drei Doppelpunkte a_1, a_2 und a_3, da durch jeden dieser Punkte zwei entsprechende Ebenen, und zwar die Ebenen e^1_2, e^1_3; e^2_2, e^2_3; e^3_2, e^3_3 der Büschel g_2 und g_3 gehen.

Die besagten beiden Punktreihen sind infolge dessen identisch, d. h. durch jeden einzelnen Punkt der Geraden g_1 gehen zwei entsprechende Ebenen der Büschel g_2 und g_3, oder, was dasselbe ist, die Gerade g_1 wird von sämmtlichen Erzeugenden der windschiefen Fläche getroffen. Wir erhalten sonach den Satz:

11. „Die Schnittlinien entsprechender Ebenen zweier projectivischen Ebenenbüschel mit sich nicht schneidenden Achsen erzeugen ein windschiefes Hyperboloid.“

§. 20.

Zu dem eben aufgestellten Satze kann nun leicht ein zweiter „reciproker Satz“ gefunden werden.

Wählen wir diesbezüglich auf zwei sich nicht schneidenden Geraden g_2 und g_3 zwei projectivische Punktreihen; beispielsweise also auf g_2 die Punktreihe $a, b, c \ldots$ und auf g_3 die zu der ersteren projectivische Punktreihe $a_1, b_1, c_1 \ldots$. Die Verbindungsgeraden aa_1, bb_1, $cc_1 \ldots$ entsprechender Punkte dieser Reihen erzeugen eine windschiefe Fläche, welche ein Hyperboloid sein muss.

Denkt man sich nämlich die Punktreihe $a_1, b_1, c_1 \ldots$ durch ein Ebenenbüschel projiciert, dessen Achse g_2 ist, und die Punktreihe $a, b, c \ldots$ durch ein Ebenenbüschel projiciert, dessen Achse g_3 ist, so sind auch die genannten Büschel projectivisch, indem sich solche Ebenen (g_2, a_1) und (g_3, a) entsprechen, welche durch entsprechende Punkte a und a_1 der Reihen g_2 und g_3 gelegt sind.

Die Schnittgerade zweier entsprechenden Ebenen dieser Büschel ist aber offenbar keine andere als die Verbindungsgerade der correspondierenden Punkte a und a_1.

Die Verbindungslinien entsprechender Punkte der beiden Reihen g_2 und g_3 erzeugen somit eine windschiefe Fläche, welche als das Erzeugnis der Schnittgeraden entsprechender Ebenen zweier projectivischen Ebenenbüschel mit den Achsen g_2 und g_3 aufgefasst werden kann. Mit Rücksicht auf den vorhergehenden Satz ergibt sich sonach der folgende:

12. „Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier projectivischen Punktreihen auf zwei sich nicht schneidenden Trägern erzeugen ein windschiefes Hyperboloid.“

§. 21.

Durch vorhergegangene Untersuchungen wurde nachgewiesen, dass, wenn l_1, l_2 und l_3 die Schnittgeraden dreier Paare entsprechender Ebenen $e_2^1 e_3^1$; $e_2^2 e_3^2$ und $e_2^3 e_3^3$ zweier projectivischen Ebenenbüschel g_2 und g_3 sind, irgend eine Gerade g_1, welche l_1, l_2, l_3 schneidet, also alle Geraden $g_4, g_5 \ldots$, welche die nämliche Eigenschaft besitzen, auch von sämmtlichen Schnittgeraden $l_4, l_5 \ldots$ der übrigen Paare entsprechender Ebenen der Büschel g_2 und g_3 geschnitten werden.

Das von den Büscheln g_2 und g_3 erzeugte Hyperboloid besitzt somit außer den Erzeugenden $l_1, l_2, l_3 \ldots$ noch ein zweites System von Geraden $g_1, g_2, g_3, g_4 \ldots$, deren jede von sämmtlichen Geraden l geschnitten wird. Hieraus folgt der bereits aufgestellte Satz:

13. „Ein windschiefes Hyperboloid besitzt zwei Systeme von geradlinigen Erzeugenden. Sämmtliche Erzeugenden des einen Systems werden von sämmtlichen Erzeugenden des anderen Systems geschnitten. Erzeugende, welche dem nämlichen System angehören, schneiden sich niemals.“

Nimmt man drei sich kreuzende Geraden g_1, g_2 und g_3 als Leitlinien für ein windschiefes Hyperboloid an, so können, nach dem vorstehenden Satze, die zu dem Systeme g gehörigen Erzeugenden construiert werden, indem man zunächst drei Geraden l_1, l_2, l_3 ermittelt, welche g_1, g_2 und g_3 schneiden, und hierauf die als „Erzeugenden“ gefundenen Geraden l_1, l_2 und l_3 als „Leitlinien“ für die nunmehr zu suchenden Geraden g_4, $g_5 \ldots$ betrachtet.

§. 22.

Seien g_1, g_2 und g_3 drei beliebige Erzeugenden des einen Systems; $l_1, l_2, l_3, l_4 \ldots$ irgend welche Erzeugenden des zweiten Systems, und nennen wir a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3; d_1, d_2, d_3 die Punkte, in welchen g_1, g_2 und g_3 beziehungsweise von $l_1, l_2, l_3, l_4 \ldots$ geschnitten werden.

Betrachten wir g_1 als die Achse eines Ebenenbüschels, dessen Ebenen die Erzeugenden $l_1, l_2, l_3, l_4 \ldots$ enthalten, so ist augenscheinlich, dass dieses Ebenenbüschel die Geraden g_2 und g_3 in denselben Punktreihen $a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots$ und $a_3, b_3\ c_3\ d_3 \ldots$ schneidet, welche durch die Erzeugenden $l_1, l_2, l_3, l_4 \ldots$ auf diesen Geraden bestimmt werden.

Nachdem aber die Punktreihen $a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots$ und $a_3, b_3, c_3, d_3 \ldots$ auf den Geraden g_2 und g_3 durch ein und dasselbe Ebenenbüschel g_1 bestimmt werden, so sind dieselben projectivisch. Da ferner die Geraden g_2 und g_3 als beliebige Erzeugende des einen Systems vorausgesetzt wurden, so gilt das eben Bewiesene offenbar auch für irgend ein beliebiges anderes Paar von Erzeugenden desselben Systems, also für alle Erzeugenden g.

Zu gleichem Resultate hätte man selbstverständlich auch gelangen müssen, wenn man in der angestellten Betrachtung die Erzeugenden der Systeme g und l vertauscht haben würde. Es gilt folglich der Satz:

14. „Sämmtliche Erzeugenden des einen Systems werden von den Erzeugenden des zweiten Systems in projectivischen Punktreihen geschnitten."

Diesem Satze steht reciprok ein Satz gegenüber, welcher, im Grunde genommen, den Ausgangspunkt aller vorhergehenden Untersuchungen bildete. Derselbe lautet:

15. „Die Ebenenbüschel, welche zu Achsen die Erzeugenden des einen Systems (g) haben, und die Erzeugenden des anderen Systems (l) enthalten, sind sämmtlich zu einander projectivisch. In besagten Ebenenbüscheln entsprechen sich solche Ebenen, welche eine und dieselbe Erzeugende l enthalten."

§. 23.

Nachdem bekanntlich die Berührungsebene einer krummen Fläche in einem ihrer Punkte die Tangenten aller auf der Fläche liegenden, durch den Berührungspunkt gehenden Curven enthält, und andererseits eine auf einer Fläche liegende Gerade in jedem ihrer Punkte als Tangente der Fläche betrachtet werden muss, so folgt insbesondere für das Hyperboloid unmittelbar der Satz:

16. „Die Berührungsebene eines windschiefen Hyperboloides in einem Punkte desselben ist jene Ebene, welche die durch den Berührungspunkt gehenden Erzeugenden beider Systeme enthält."

Ist demnach ein Hyperboloid durch drei Leitgeraden g_1, g_2 und g_3 gegeben und ist l_1 eine beliebige Erzeugende, so wird man die

einem Punkte p von l_1 entsprechende Berührungsebene B construieren, indem man zunächst noch zwei andere Erzeugenden l_2 und l_3 des Systemes l ermittelt, hierauf die Gerade g' bestimmt, welche durch p geht und l_2, l_3 schneidet, mithin also die durch p gehende, zum System g_1, g_2, g_3 gehörige Erzeugende darstellt und sodann durch l_1 und g' eine Ebene legt.

§. 24.

Besagte Construction lässt sich jedoch noch vereinfachen, wenn man von einem Satze ausgeht, welcher für die Theorie der windschiefen Flächen überhaupt von größter Wichtigkeit ist und nunmehr in Nachstehendem für das windschiefe Hyperboloid entwickelt werden soll.

Nehmen wir behufs des zu liefernden Nachweises an, dass g_1 und g_2 zwei beliebige Erzeugenden eines windschiefen Hyperboloides repräsentieren, und dass l_1, l_2, l_3 und l_4... beliebige Erzeugenden des anderen Systemes, welche g_1 und g_2 (nach Satz 14) in zwei projectivischen Punktreihen a_1, b_1, c_1, d_1... und a_2, b_2, c_2, d_2... treffen, darstellen.

Das Ebenenbüschel, welches die Erzeugende g_1 zur Achse hat und sämmtliche Erzeugenden l_1, l_2, l_3, l_4... enthält, schneidet die Erzeugende g_2 in derselben Punktreihe a_2, b_2, c_2, d_2..., welche l_1, l_2, l_3, l_4... auf g_2 bestimmen. Das Ebenenbüschel $g_1 (l_1 l_2 l_3 l_4 \ldots)$ ist sonach perspectivisch zu der Punktreihe a_2, b_2, c_2, d_2... und mithin auch projectivisch zur Punktreihe a_1, b_1, c_1, d_1...

Nachdem aber die Ebenen (g_1, l_1), (g_1, l_2), (g_1, l_3), (g_1, l_4)... des Büschels g_1 unmittelbar die Berührungsebenen des Hyperboloides in den Punkten a_1, b_1, c_1, d_1... der Erzeugenden g_1 darstellen, so ergibt sich der Satz:

17. „Das Büschel der Berührungsebenen eines Hyperboloides in den Punkten einer und derselben Erzeugenden ist projectivisch zu der Reihe der betreffenden Berührungspunkte.“

§. 25.

Gestützt auf den vorstehenden Satz lässt sich sofort ein zweiter ableiten.

Berücksichtigt man nämlich, dass zwei projectivische Grundgebilde stets stetig sind, d. h. dass jedem Elemente des einen ein bestimmtes Element des anderen entspricht, so ist einleuchtend, dass jeder durch eine Erzeugende eines Hyperboloides gehen-

den Ebene (nach obigem Satze) ein bestimmter Punkt auf dieser Erzeugenden entspricht. Daher folgt unmittelbar der Satz:

18. „Jede Ebene, welche durch eine geradlinige Erzeugende eines Hyperboloides geht, berührt letzteres in einem gewissen Punkte dieser Erzeugenden.“

§. 26.

Der Satz 17) erlaubt uns, die **Berührungsebene** eines **windschiefen Hyperboloides** in einem auf dieser Fläche **gegebenen Punkte** in höchst einfacher Weise zu construieren.

Die drei Leitlinien eines Hyperboloides seien durch $g_{1\,d_1}^{\,v_1}$, $g_{2\,d_2}^{\,v_2}$ und $g_{3\,d_3}^{\,v_3}$ (Taf. I, Fig. 5) bestimmt.

Um einen Punkt auf der genannten Fläche zu finden, bestimmen wir zunächst eine Erzeugende l_δ^φ, d. i. eine Gerade, welche g_1, g_2, g_3 schneidet, einfach dadurch, dass man durch g_1 eine beliebige Ebene $B^1_v B^1_b$ legt, deren Schnittpunkte a_2 und a_3 mit g_2 und g_3 ermittelt und durch eine Gerade l_δ^φ verbindet, welche g_1 in einem Punkte a_1 treffen wird.

Nehmen wir auf l_δ^φ einen beliebigen Punkt p an, so stellt dieser bereits einen Punkt des Hyperboloides dar.

Soll in dem Punkte p die Berührungsebene des Hyperboloides construiert werden, so ist bloß zu erwägen, dass auf der Erzeugenden l_δ^φ bereits drei Punkte a_1, a_2, a_3 und überdies die diesen Punkten entsprechenden Berührungsebenen (g_1, l), (g_2, l) und (g_3, l) bekannt sind. Die Bildflächtracen B^1_b, B^2_b, B^3_b dieser Ebenen werden selbstverständlich durch die Verbindungsgeraden δd_1, δd_2, δd_3 dargestellt.

Nach Satz 17) wird es sich nun darum handeln, in dem Büschel l diejenige Ebene zu ermitteln, welche mit den drei Ebenen B^1, B^2 und B^3 dasselbe **Doppelverhältnis**, wie der Punkt p mit den drei Punkten a_1, a_2 und a_3 bildet.

Die Bildflächtrace B_b^p der zu suchenden Ebene wird daher auch in dem Strahlenbüschel δ mit B^1_b, B^2_b, B^3_b einen Vierstrahl repräsentieren, welcher dasselbe Doppelverhältnis besitzt, wie die vier Punkte p, a_1, a_2 und a_3 und demnach, nach der uns bereits geläufigen „Methode der Vervollständigung projectivischer Grundgebilde“ leicht gefunden werden kann.

Zieht man durch φ eine Parallele B_v^p zu B_b^p, so erhält man durch $B_b^p B_v^p$ die gesuchte Berührungsebene sofort dargestellt.

§. 27.

Da (nach Satz 18) jede Ebene, welche durch eine Erzeugende eines Hyperboloides gelegt wird, eine Berührungsebene des letzteren repräsentiert, so ist einleuchtend, dass der Kegel, welcher aus einem Punkte P außerhalb der Fläche dieser letzteren umschrieben ist, von jenen Ebenen eingehüllt wird, welche durch den Punkt P und die einzelnen Erzeugenden des Hyperboloides geführt werden können.

Denkt man sich nun das Hyperboloid durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2 zweier projectivischer Punktreihen auf zwei sich kreuzenden Trägern g_1 und g_2 erzeugt, so erhellt sofort, dass der dem Hyperboloide aus einem Punkte P außerhalb desselben umschriebene Kegel von jenen Ebenen eingehüllt wird, welche durch den Punkt P und die Erzeugenden, mithin durch je zwei entsprechende Punkte a_1 und a_2, b_1 und b_2, c_1 und c_2 der Reihen g_1 und g_2 gehen.

Besagte Ebenen enthalten sonach auch entsprechende Strahlen a_1P und a_2P_2; b_1P und b_2P; c_1P und c_2P... jener beiden Strahlenbüschel $P(a_1b_1c_1\ldots)$ und $P(a_2b_2c_2\ldots)$, welche aus dem Punkte P die Punktreihen $a_1b_1c_1\ldots$ und $a_2b_2c_2\ldots$ projicieren.

Nachdem aber, wie bekannt, die Ebenen, welche entsprechende Strahlen zweier projectivischen Strahlenbüschel in verschiedenen Ebenen jedoch mit gemeinschaftlichem Scheitel, verbinden, einen Kegel zweiten Grades umhüllen, so folgt der Satz:

19. „*Der aus einem Punkte außerhalb einem windschiefen Hyperboloide umschriebene Kegel ist vom zweiten Grade.*“

Diesem Satze steht der folgende Satz dual gegenüber:

20. „*Der Durchschnitt einer Ebene mit einem windschiefen Hyperboloide ist stets ein Kegelschnitt.*“

In dem Falle, als die schneidende Ebene die Fläche berührt, degeneriert dieser Kegelschnitt in zwei Gerade, und zwar wie bereits nachgewiesen wurde, in die zwei durch den Berührungspunkt gehenden Erzeugenden beider Systeme.

§. 28.

Dass der einem Hyperboloide aus einem Punkte außerhalb umschriebene Kegel vom zweiten Grade sei und der ebene Schnitt eines Hyperboloides immer ein Kegelschnitt ist, kann auch direct aus dem Umstande gefolgert werden, dass die Fläche selbst vom zweiten Grade ist, also mit jeder Geraden des Raumes zwei Punkte gemein hat, und dass durch jede Gerade zwei Tangentialebenen gelegt werden können.

Nachdem das Hyperboloid durch gerade Linien erzeugt wird und jede gerade Linie einen reellen unendlich fernen Punkt besitzt, so folgt, dass das Hyperboloid von der unendlich fernen Ebene in einer reellen Curve, welche nach dem vorstehenden Satze ein Kegelschnitt sein muss, geschnitten wird.

Es kann selbstverständlich der Fall eintreten, dass dieser Kegelschnitt in unendlicher Entfernung ein eigentlicher Kegelschnitt ist, oder aber, dass derselbe in zwei Gerade zerfällt, d. h. dass die unendlich ferne Ebene die Fläche berührt und somit gleichzeitig mit derselben zwei Erzeugende verschiedener Systeme gemein hat.

In diesem letzteren Falle wird das windschiefe Hyperboloid insbesondere ein „hyperbolisches Paraboloid" genannt. Diesem Specialfalle wollen wir aber dermalen, da derselbe in der Folge einer eingehenden Besprechung unterzogen werden wird, keine weitere Aufmerksamkeit zuwenden.

§. 29.

Es wurde bereits gezeigt, dass jedes windschiefe Hyperboloid von der unendlich fernen Ebene in einem reellen und eigentlichen Kegelschnitte geschnitten wird.

Denkt man sich nun zu jeder einzelnen Erzeugenden des Hyperboloides durch irgend einen festen Punkt S eine Parallele gezogen, so werden alle diese Parallelen einen Kegel erzeugen, welcher durch den unendlich fernen Kegelschnitt des Hyperboloides geht und mithin ein Kegel zweiten Grades sein wird.

Diese Eigenschaft kann übrigens auch direct nachgewiesen werden, wenn man sich das windschiefe Hyperboloid durch zwei projectivische Ebenenbüschel mit sich nicht schneidenden Achsen g_1 und g_2 erzeugt denkt.

Nimmt man nämlich parallel zu g_1 und g_2 zwei sich in einem Punkte P schneidenden Geraden γ_1 und γ_2 an und denkt man sich durch γ_1 und γ_2 Ebenen gelegt, welche zu je zwei entsprechenden Ebenen der Büschel g_1 und g_2 parallel laufen, so erhält man zwei neue Ebenenbüschel mit den Achsen γ_1 und γ_2, welche gleichfalls zu einander projectivisch sind.

Die Schnittlinien entsprechender Ebenen dieser Büschel γ_1 und γ_2 erzeugen, wie wir bereits wissen, einen Kegel zweiten Grades, dessen Scheitel der den beiden Achsen γ_1 und γ_2 gemeinschaftliche Punkt S ist.

Andererseits ist aber, der Voraussetzung gemäß, ein beliebiges Paar entsprechender Ebenen der Büschel γ_1 und γ_2 parallel zu einem Paare entsprechender Ebenen der Büschel g_1 und g_2; es wird mithin auch jede Erzeugende des Kegels S parallel zu einer Erzeugenden des Hyperboloides sein müssen.

Nachdem wir einen Kegel, dessen Erzeugenden zu den Erzeugenden einer windschiefen Fläche parallel sind, einen „Richtungskegel" der windschiefen Fläche nennen, so kann das Ergebnis der eben angestellten Betrachtungen in einem aus dem Satze 20) hervorgehenden Specialsatze ausgesprochen werden:

21. „Der Richtungskegel eines windschiefen Hyperboloides ist ein Kegel zweiten Grades."

Dieser Satz ist namentlich bei der central-projectivischen Darstellung eines Hyperboloides von Wichtigkeit.

Denkt man sich nämlich den Scheitel des Richtungskegels eines central-projectivisch darzustellenden Hyperboloides mit dem Projectionscentrum zusammenfallend, so wird der Schnitt dieses Richtungskegels mit der Bildebene offenbar den geometrischen Ort der Fluchtpunkte aller Erzeugenden des Hyperboloides, oder kurz gesagt, die „Fluchtcurve" des Hyperboloides darstellen.

Dem obigen Satze zufolge ist die Fluchtcurve eines windschiefen Hyperboloides stets ein Kegelschnitt.

§. 30.

Durch jeden Punkt eines Hyperboloides gehen immer zwei Erzeugenden, welche verschiedenen Systemen angehören.

Durch die unendlich fernen Punkte des Hyperboloides werden demgemäß auch zwei, verschiedenen Systemen angehörige Erzeugenden gehen, oder mit anderen Worten: jeder Erzeugenden eines Hyperboloides entspricht im anderen Systeme eine zu ihr parallele Erzeugende.

Dies kann auch folgendermaßen direct klar gelegt werden.

Ist g_1 eine beliebige Erzeugende des Hyperboloides, so haben wir bloß zu untersuchen, ob eine Erzeugende im anderen Systeme existiere, welche zu g_1 parallel ist.

Behufs dieser Untersuchung nehmen wir noch eine zweite dem Systeme g angehörende Erzeugende g_2 an.

Nach Satz 14) bestimmen die Erzeugenden l_1, l_2, l_3... des zweiten Systemes auf g_1 und g_2 zwei projectivische Punktreihen a^1_1, a^1_2, a^1_3... und a^2_1, a^2_2, a^2_3... Dem unendlich fernen Punkte

a^1_u der Reihe auf g_1 entspricht sodann auf der Reihe g_2 ein Punkt a^2_u, welcher, da die beiden Reihen nicht ähnlich sind, in endlicher Entfernung liegen muss. Die Verbindungslinie $a^1_u a^2_u$ ist sodann offenbar die zu g_1 parallele Erzeugende der Schar l_1, l_2, l_3... Hieraus folgt der Satz:

22a. „Jeder Erzeugenden des einen Systemes entspricht eine parallele Erzeugende im zweiten Systeme“
oder:

22b. „Die Erzeugenden beider Systeme sind paarweise parallel.

§. 31.

Diejenige Ebene, welche durch zwei parallele Erzeugenden eines Hyperboloides geht, berührt die genannte Fläche in dem gemeinschaftlichen unendlich fernen Punkte dieser Erzeugenden. Jede solche Ebene wird eine „asymptotische Ebene“ des Hyperboloides genannt.

Berücksichtigt man, dass die Berührungsebene einer krummen Fläche alle Curven berührt, welche auf der Fläche durch den Berührungspunkt gezogen werden können, so folgt, dass die asymptotische Ebene einer Erzeugenden g des Hyperboloides, d. h. diejenige Ebene, welche das Hyperboloid in dem unendlich fernen Punkte u_g dieser Erzeugenden berührt, außer dieser Erzeugenden g und der ihr parallelen Erzeugenden l des zweiten Systems auch die Tangente t_u des unendlich fernen Kegelschnittes des Hyperboloides im Punkte u_g enthält.

Erwägt man ferner, dass der Richtungskegel des Hyperboloides den unendlich fernen Kegelschnitt des letzteren enthält, dass also die Tangente t_u auch eine unendlich ferne Tangente des Richtungskegels ist, so findet man sofort, dass jede Berührungsebene des Richtungskegels zu einer asymptotischen Ebene des Hyperboloides parallel ist.

Selbstverständlich wird besagte Berührebene zu der asymptotischen Ebene jener Erzeugenden des Hyperboloides parallel sein, welche zu der betreffenden Berührungserzeugenden des Richtungskegels parallel läuft. Mithin besteht der Satz:

23. „Die asymptotischen Ebenen eines windschiefen Hyperboloides sind parallel zu den Berührungsebenen des Richtungskegels, u. z. ist die asymptotische Ebene, welche einer Erzeugenden des Hyperboloides entspricht, stets parallel zu derjenigen Ebene, welche den Kegel längs der zur genannten Erzeugenden parallelen Geraden berührt.“

2. *Aufgabe.* Ein windschiefes Hyperboloid ist durch drei gerade Leitlinien $g_{1\,d_1}^{v_1}$, $g_{3\,d_2}^{v_2}$, $g_{2\,d_3}^{v_3}$ gegeben; es ist eine Erzeugende der Fläche, und hierauf deren asymptotische Ebene zu ermitteln."

Um eine Erzeugende l_δ^φ (Taf. I, Fig. 6) des Hyperboloides zu erhalten, legen wir durch die Leitgerade g_1 eine beliebige Hilfsebene $e_v\, e_b$, bestimmen deren Schnittpunkte a_2 und a_3 mit den Leitgeraden g_2 und g_3, und verbinden diese Schnittpunkte durch eine Gerade l.

Der Fluchtpunkt φ dieser Erzeugenden ist ein Punkt der Fluchtcurve des Hyperboloides. Ein Gleiches gilt von den Fluchtpunkten v_1, v_2 und v_3 der gegebenen Leitgeraden g_1, g_2 und g_3.

Die asymptotische Ebene der Erzeugenden l_δ^φ enthält selbstverständlich die Tangente t_φ des dem Hyperboloid angehörigen unendlich fernen Kegelschnittes im Punkte φ.

Es ist daher einleuchtend, dass die Centralprojection dieser Tangente t_φ, d. h. die Fluchttrace A_v der zu suchenden asymptotischen Ebene, die Tangente des Fluchtkegelschnittes im Punkte φ sein müsse.

Nachdem bereits vier Punkte v_1, v_2, v_3 und φ des Fluchtkegelschnittes bekannt sind, so wird man behufs Bestimmung des letzteren, noch einen fünften Punkt φ_1 desselben zu construieren haben. Am einfachsten ergibt sich besagter Punkt, wenn man noch eine zweite Erzeugende l_1 und deren Fluchtpunkt φ_1 ermittelt.

Führt man hierauf an den durch die fünf Punkte v_1, v_2, v_3, φ und φ_1 bestimmten Fluchtkegelschnitt, vermittelst der bekannten aus dem Paskal'schen Satze folgenden Construction im Punkte φ die Tangente A_v, so wird diese die Fluchttrace der zu suchenden asymptotischen Ebene repräsentieren. Die Bildflächtrace derselben ist die Gerade A_b, welche durch δ parallel zu A_v gezogen wird.

Einfacher gestaltet sich die Construction, wenn man die asymptotische Ebene eines durch drei Leitlinien g_1, g_2 und g_3 (Taf. I, Fig. 7) gegebenen windschiefen Hyperboloides, für eine dieser drei Leitlinien, etwa für g_1, zu ermitteln hätte.

Es ist nämlich in diesem Falle sehr leicht, die zu g_1 parallele Erzeugende $l_\delta^{v_1}$ des zweiten Systems zu bestimmen. Letztere ist offenbar diejenige Gerade, welche g_2 und g_3 schneidet und zu g_1 parallel läuft, sich somit als die Schnittgerade der durch g_2 beziehungsweise g_3 zu g_1 parallel gelegten Ebenen e_2 und e_2 ergibt.

Die Ebene $A_b\, A_v$, welche man durch g_1 und die gefundene Erzeugende $l_\delta^{v_1}$ des zweiten Systems legt, ist, wie unmittelbar aus der Definition folgt, bereits die verlangte asymptotische Ebene.

§. 33.

Verschiedene Erzeugungsarten des windschiefen Hyperboloides.

Aus den beiden fundamentalen Erzeugungsweisen des windschiefen Hyperboloides:

a) als Erzeugnis der Schnittgeraden entsprechender Ebenen zweier projetivischen Ebenenbüschel mit sich nicht schneidenden Achsen, und

b) als Erzeugnis der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier projectivischen Punktreihen, auf zwei sich nicht schneidenden Trägern, können nunmehr anderweitige Erzeugungsweisen gefolgert werden, von welchen, an dieser Stelle, etliche entwickelt werden sollen.

Nachdem der geometrische Ort der Schnittpunkte einer Ebene mit sämmtlichen Erzeugenden eines windschiefen Hyperboloides, d. i. der ebene Schnitt dieser Fläche, ein Kegelschnitt ist, so kann man zunächst die Frage aufwerfen, ob ein Kegelschnitt K, und zwei denselben schneidende, aber nicht in seiner Ebene liegende Geraden g_1 und g_2 als die drei Leitlinien für ein windschiefes Hyperboloid betrachtet werden können.

Denken wir uns einen beliebigen Punkt a des Kegelschnittes K angenommen, so wird man die durch diesen Punkt gehende Erzeugende l der windschiefen Fläche $(g_1\, g_2\, K)$, als den Schnitt der beiden durch a und g_1 beziehungsweise g_2 gelegten Ebenen erhalten.

Bezeichnen wir die Schnittpunkte der Geraden g_1 und g_2 mit dem Leitkegelschnitte K, mit s_1 und s_2, so ist einleuchtend, dass die Ebene des Leitkegelschnittes von den beiden Ebenen (g_1, a) und (g_2, a) in den Geraden $s_1\, a$ und $s_2\, a$ geschnitten werde.

Verändert der Punkt a seine Lage auf dem Kegelschnitte K, so beschreiben die Geraden $s_1\, a$ und $s_2\, a$ zwei projectivische (den Kegelschnitt K erzeugende) Strahlenbüschel und folglich die Ebenen (g_1, a) und (g_2, a) zwei projectivische Ebenenbüschel mit den Achsen g_1 und g_2.

Nachdem einerseits die Schnittgerade entsprechender Ebenen dieser beiden Büschel g_1 und g_2, sowohl den Kegelschnitt K, als auch die Geraden g_1 und g_2 trifft, und andererseits das Erzeugnis zweier projectivischen Ebenenbüschel mit zwei sich kreuzenden Achsen g_1 und g_2, ein windschiefes Hyperboloid ist, so folgt auf Grund der angestellten Betrachtungen der Satz:

24. „Die windschiefe Fläche, deren Leitlinien ein Kegelschnitt und zwei sich gegenseitig nicht schneidende Geraden sind, von welchen jedoch jede den Kegelschnitt in je einem Punkte trifft, ist ein windschiefes Hyperboloid.“

Der vorstehende Satz gestattet insoferne eine Specialisierung, als man den Kegelschnitt K in unendlicher Entfernung annehmen, denselben also durch einen Richtungskegel vertreten voraussetzen kann. An die Stelle der beiden den Kegelschnitt schneidenden Geraden treten sodann zwei Gerade, welche den unendlich fernen Kegelschnitt schneiden, also zu zwei Erzeugenden des Richtungskegels parallel laufen. Es ergibt sich somit der Specialsatz:

25a). „Die Geraden, welche zu den Erzeugenden eines Kegels zweiten Grades parallel sind, und zwei feste Geraden, deren jede zu einer Erzeugenden des Kegels parallel läuft, schneiden, sind sämmtlich Erzeugende eines windschiefen Hyperboloides."

Oder mit anderen Worten:

25b). „Ein windschiefes Hyperboloid ist durch seinen Richtungskegel und durch zwei seiner Erzeugenden, welche nothwendig zu zwei Erzeugenden des Richtungskegels parallel sein und dem nämlichen Systeme angehören müssen, vollständig bestimmt."

§. 34.

Wendet man vorstehenden Satz auf die Darstellung eines windschiefen Hyperboloides in centraler Projection an, wobei das Projectionscentrum als Scheitel des Richtungskegels, und die Fluchtcurve als Leitlinie dieses Richtungskegels anzunehmen ist, so lässt sich unmittelbar der folgende Satz feststellen:

26. „In centraler Projection ist ein windschiefes Hyperboloid durch die Angabe des Fluchtkegelschnittes und der Centralprojectionen zweier Erzeugenden (Fluchtpunkt und Durchstoßpunkt der letzteren) vollkommen bestimmt. Die Fluchtpunkte dieser Erzeugenden müssen nothwendig auf dem Fluchtkegelschnitte liegen."

§. 35.

Die zweite der vorangeführten fundamentalen Erzeugungsarten des Hyperboloides bietet die Veranlassung sowohl, als auch die nothwendigen Behelfe zur Entwicklung der folgenden Erzeugungsweisen.

Es stelle S (Taf. I, Fig. 8) den Scheitel und K den ebenen Schnitt eines Kegels zweiten Grades dar, ferner seien g_1 und g_2 zwei nicht in einer und derselben Ebene liegende Tangenten des oberwähnten Kegels; es ist die windschiefe Fläche zu untersuchen, welche durch die Bewegung einer Geraden entsteht, die stets die beiden festen Tangenten g_1 und g_2 schneidet und nebstbei den Kegel (S, K) berührt.

Irgend eine Erzeugende l dieser Fläche ergibt sich durch folgende Construction. Man legt an den Kegel (S, K) eine beliebige

Berührungsebene e; dieselbe schneidet die festen Tangenten g_1 und g_2 beziehungsweise in den Punkten a_1 und a_2. Die Verbindungsgerade $a_1 a_2$ oder l dieser Punkte liegt sodann offenbar ihrer ganzen Länge nach in der Berührungsebene e, ist daher eine Tangente des Kegels (S, K) und mithin auch eine Erzeugende der Regelfläche.

Denken wir uns weiters durch den Kegelscheitel S und durch die Gerade g_1 resp. g_2 die beiden Tangentialebenen T_1 und T_2 des Kegels gelegt, so schneiden diese die Ebene E des Kegelschnittes K in zwei Tangenten t_1 und t_2 von K. Ebenso schneidet die Berührungsebene e die Ebene E in einer Tangente τ des Kegelschnittes K.

Ferner wird die Ebene e die beiden Berührungsebenen T_1 und T_2 in zwei Geraden treffen, von welchen die erstere die drei Punkte S, a_1, α_1, die zweite dagegen die drei Punkte S, a_2, α_2 enthält und beziehungsweise α_1 und α_2 die Schnittpunkte von τ mit t_1 und t_2 darstellen.

Ändert die Berührungsebene e ihre Lage, so wird sich auch die Tangente τ längs des Kegelschnittes K fortbewegen und werden deren Schnittpunkte α_1 und α_2 mit den beiden festen Tangenten t_1 und t_2 zwei projectivische Reihen beschreiben.

In gleicher Weise werden auch von den beiden Punkten a_1 und a_2, als Projectionen der Punkte α_1 und α_2 vom Kegelscheitel S aus auf g_1 und g_2, zwei projectivische Punktreihen beschrieben werden.

Die Verbindungsgerade l zweier entsprechenden Punkte a_1 und a_2 dieser beiden Punktreihen erzeugt daher ein windschiefes Hyperboloid. Man erhält hiernach den Satz;

27. „*Bewegt sich eine Gerade derart, dass sie in jeder Lage einen gegebenen Kegel zweiten Grades berührt und überdies zwei feste sich nicht schneidende Tangenten dieses Kegels trifft, so erzeugt dieselbe ein windschiefes Hyperboloid.*“

§. 36.

Dem soeben aufgestellten Satze kann noch eine andere Fassung gegeben werden.

Setzen wir diesbezüglich die Ebene E des Kegelschnittes K als Bildebene und den Kegelscheitel S als Projectionscentrum voraus.

Die Geraden t_1 und t_2 sind sodann die Projectionen zweier Erzeugenden (oder Leitgeraden) des Hyperboloides; die Geraden τ... dagegen die Projectionen der Erzeugenden l des zweiten Systemes.

Jede Berührungsebene e des Kegels (S, K) enthält eine Erzeugende des Hyperboloides und repräsentiert demgemäß auch eine Berührungsebene des letzteren.

Der Kegel (S, K) ist demnach dem Hyperpoloide umschrieben und dessen Schnitt K mit der Bildebene wird somit für S als Projectionscentrum die Contour des Hyperboloides darstellen.

Hieraus geht hervor, dass, sobald das Projectionscentrum S und der Kegelschnitt K bekannt sind, auch der Kegel (S, K) vollkommen bestimmt sei; dass ferner die Geraden g_1 und g_2 räumlich gegeben erscheinen, falls ihre Projectionen t_1 und t_2 mit den bezüglichen Durchstoß- und Fluchtpunkten angenommen werden. Selbstverständlich müssen die Projectionen t_1 und t_2 Tangenten des Kegelschnittes K sein.

Nachdem durch g_1, g_2 und (S, K) das Hyperboloid vollkommen bestimmt ist, folgt der Satz:

28. „Ein windschiefes Hyperboloid ist in centraler Projection vollkommen bestimmt, sobald die Contour desselben auf der Bildebene (ein Kegelschnitt) und zwei Erzeugende desselben gegeben sind. Die Projectionen der letzteren müssen nothwendig Tangenten des Contourkegelschnittes sein.“

Es ist unschwer einzusehen, dass der Satz 27) seine volle Giltigkeit beibehält, wenn man für den Kegel (S, K) einen Cylinder substituiert. Hiernach ist aber auch einleuchtend, dass der vorstehende Satz keine Einschränkung erfährt, wenn das Projectionscentrum in unendliche Ferne rückt, d. i. wenn an die Stelle der Centralprojection die Parallelprojection tritt.

§. 37.

Zwei sich kreuzende Geraden g_1 und g_2 im Raume, welche die Achsen zweier Ebenenbüschel repräsentieren sollen, liegen als gegeben vor.

Bevor wir noch den Zweck dieser Bestimmungsstücke näher kennzeichnen und die mit denselben anzustellenden Untersuchungen präcisieren, wollen wir uns gleich von vornherein gewisse Annahmen erlauben, welche zur Übersichtlichkeit und bequemeren Darstellung der nachher auszuführenden Operationen nicht unwesentlich beitragen dürften.

Wählen wir also zunächst die Projectionsebene E derart, dass dieselbe zu einer der gegebenen Geraden, etwa zu g_1 senkrecht stehe. Die orthogonale Projection der Geraden g_1 auf diese Ebene erscheint sodann als Punkt, welcher offenbar gleichzeitig den Durchschnitt s_1 von g_1 mit der Projectionsebene E darstellt.

Die Projection der zweiten Geraden g_2 auf die nämliche Ebene möge, da sich diesbezüglich kein Irrthum einschleichen kann, gleichfalls mit g_2 bezeichnet werden, während wir den Durchstoßpunkt der Geraden g_2 mit der Projectionsebene E, s_2 nennen wollen.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen und Vorbereitungen wollen wir jene windschiefe Fläche näher untersuchen, welche sich als Ort der Schnittgeraden solcher Ebenen der beiden obangeführten Büschel g_1 und g_2 (Taf. II, Fig. 9) ergeben, die auf einander senkrecht stehen.

Denken wir uns durch s_1 eine beliebige Gerade α_1 gezogen, so kann diese selbstverständlich auch als die Bildflächtrace einer durch g_1 gehenden Ebene, als welche wir α_1 thatsächlich auffassen wollen, betrachtet werden.

Auf die letztangedeutete Ebene fällen wir eine durch die Gerade g_2 gehende senkrechte Ebene. Die Bildflächtrace α_2 dieser Ebene muss einerseits durch den Punkt s_2 gehen und andererseits senkrecht zu α_1 sein, da die Ebene (g_1, α_1) bildflächprojicierend ist. Der Schnittpunkt a der beiden Tracen α_1 und α_2 liegt daher auf der Peripherie des über $s_1 s_2$ als Durchmesser beschriebenen Kreises K.

Hieraus ist zu ersehen, dass die beiden Ebenenbüschel (g_1, α_1) und (g_2, α_2), welche derart auf einander bezogen sind, dass je zwei entsprechende Ebenen derselben auf einander senkrecht stehen, die Bildebene in zwei Strahlenbüscheln α_1 und α_2 schneiden werden, welche einen Kreis K erzeugen und folglich projectivisch sind.

Es sind demzufolge auch die beiden Ebenenbüschel (g_1, α_1) und (g_2, α_2) projectivisch und die Schnittlinien entsprechender, d. i. auf einander senkrecht stehender Ebenen der beiden Büschel, erzeugen ein windschiefes Hyperboloid.

Suchen wir weiters den Schnitt dieses Hyperboloides mit der Bildebene, so finden wir unmittelbar, dass derselbe direct durch den vorgenannten Kreis K bestimmt werde. Denn der Punkt a gehört als Schnitt der Bildflächtracen α_1 und α_2 zweier entsprechender Ebenen der beiden Büschel g_1 und g_2 einer Erzeugenden des Hyperboloides, als auch der Bildebene an und ist somit ein Punkt der Schnittcurve.

Erwägen wir ferner, dass als Bildebene eine beliebige zur Geraden g_1 senkrechte Ebene gewählt wurde und beachten wir endlich, dass man in Bezug auf die Gerade g_2 die nämliche Untersuchung anstellen und durchführen könne, wie mit der Geraden g_1, so ergibt sich der Satz:

29. *„Der geometrische Ort der Schnittgeraden zweier Ebenen, welche durch zwei feste, sich kreuzende Geraden gehen und auf einander senkrecht stehen, ist ein windschiefes Hyperboloid. Jede Ebene, welche auf der einen oder auf der anderen der beiden festen Geraden senkrecht steht, schneidet das Hyperboloid in einem Kreise."*

§. 38.

Denken wir uns wieder zwei sich kreuzende Geraden g_1 und g_2 im Raume, überdies aber einen festen Punkt C gegeben und construieren wir einen rechten Winkel, dessen Scheitel der feste Punkt C ist und dessen Schenkel die Geraden g_1 und g_2 in zwei Punkten a_1 resp. a_2 schneiden mögen.

Ein den vorgegebenen Bedingungen entsprechender rechter Winkel kann folgendermaßen leicht bestimmt werden.

Den einen Schenkel desselben können wir offenbar beliebig annehmen. Letzteres kennzeichnen wir dadurch, dass wir unmittelbar irgend einen Punkt a_1 von g_1 mit C verbinden. Nachdem aber der zweite Schenkel Ca_2 auf Ca_1 senkrecht stehen soll, muss er in der Ebene A liegen, welche durch C senkrecht zu Ca_1 geführt wird. Derselbe ergibt sich daher als Verbindungsgerade des Punktes C mit jenem Punkte a_2, in welchem die Ebene A die Gerade g_2 trifft.

Schreitet der Punkt a_1 auf der Geraden g_1 fort, so findet man leicht, dass die Ebene A ein zur Reihe a_1 projectivisches Ebenenbüschel A beschreibt und daher auch die Gerade g_2 in einer zur Reihe a_1 projectivischen Reihe a_2 schneidet.

Denken wir uns im Punkte C auf die Ebene E, welche durch den Punkt C und die Gerade g_1 bestimmt ist, eine senkrechte Gerade z gezogen, so ist klar, dass jede Ebene A, welche durch C senkrecht auf eine in E liegende Gerade Ca_1 geführt wird, die Gerade z enthalten müsse. Ferner wird der Schnitt der Ebene A mit der Ebene E eine durch C gehende, zu Ca_1 senkrechte Gerade sein.

Bewegt sich daher der Punkt a_1 auf g_1 fort, so beschreibt der Strahl Ca_1 ein zur Reihe $a_1 \ldots$ perspectivisches Strahlenbüschel, und die zu Ca_1 senkrechte Schnittgerade der Ebenen A und E ein zum Büschel $C(a_1 \ldots)$, also auch zur Reihe a_1 projectivisches Strahlenbüschel.

Nachdem aber dieses Strahlenbüschel der Schnitt des Ebenenbüschels $z(A \ldots)$ mit der Ebene E ist, so ist auch das von der Ebene A beschriebene Ebenenbüschel und mithin auch die Punktreihe a_2, welche sich als Schnitt dieses Ebenenbüschels mit der Geraden g_2 ergibt, zur Reihe a_1 projectivisch.

Man sieht also, dass, wenn sich ein rechter Winkel $a_1 C a_2$ um seinen Scheitel C derart dreht, dass seine beiden Schenkel zwei feste sich kreuzende Geraden g_1 und g_2 in zwei Punkten a_1 beziehungsweise a_2 schneiden, diese Punkte auf g_1 und g_2 zwei projectivische Punktreihen beschreiben.

Die Verbindungslinien l entsprechender Punkte a_1 und a_2 dieser Reihen erzeugen bekanntlich ein Hyperboloid.

Denkt man sich den Punkt C als Projectionscentrum, so kann das Ergebnis der eben angestellten Betrachtung in folgendem Satze ausgesprochen werden:

30. „*Die Verbindungsgeraden solcher Punktepaare auf zwei festen sich nicht schneidenden Geraden, welche von einem festen Punkte (Projectionscentrum) aus unter rechtem Winkel gesehen werden, beschreiben ein windschiefes Hyperboloid.*"

§. 39.

3. Aufgabe. Zwei projectivische Ebenenbüschel sind durch drei Paare entsprechender Ebenen gegeben; dieselben sind in eine derartige gegenseitige Lage zu bringen, dass entsprechende Ebenen auf einander senkrecht stehen.

Behufs Vereinfachung der durchzuführenden Constructionen nehmen wir an, dass die beiden Ebenenbüschel g_1 und g_2 durch zwei zu ihren Achsen senkrechte Schnitte, d. i. durch zwei Strahlenbüschel (Dreistrahlen) gegeben seien. Die Letzteren wählen wir in beliebiger gegenseitiger Lage in der horizontalen Projectionsebene. Die projectivische Beziehung der beiden Ebenenbüschel, also auch der sie vertretenden Strahlenbüschel S_1 und S_2 (Taf. II, Fig. 10*a* u. 10*b*), möge durch die drei Paare entsprechender Strahlen a_1 und a_2; b_1 und b_2; c_1 und c_2 festgestellt sein.

Denken wir uns nun durch irgend einen Punkt S der horizontalen Projectionsebene zu a_1, b_1 und c_1 die drei senkrechten Strahlen α_1, β_1 und γ_1 geführt, so wird, wie sich im Verlaufe unserer Besprechung herausstellen wird, die gestellte Aufgabe auf jene „durch die drei Strahlen $S(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1)$ ein Ebenenbüschel derart zu legen, dass dessen senkrechter Schnitt mit dem Strahlenbüschel $S_2 (a_2 b_2 c_2)$ congruent ist", zurückgeführt erscheinen.

Denken wir uns diesbezüglich a_2, b_2 und c_2 (Taf. II, Fig. 10*a*) durch eine beliebige Gerade r in den Punkten A, B und C geschnitten, beschreiben über AB, beziehungsweise BC, als Sehnen, die Kreise k_1 und k_2, welche beziehungsweise die Winkel (α_1, β_1) und (β_1, γ_1)

fassen, und verbinden den Schnittpunkt σ dieser Kreise durch die drei Strahlen α', β', γ' mit den Punkten A, B und C, so werden diese selbstverständlich einen zu dem Dreistrahle $\alpha\beta\gamma$ congruenten Dreistrahl bilden.

Construieren wir nun den Kreis k_3, welcher durch S_2 und σ geht, und seinen Mittelpunkt auf r hat, so schneidet derselbe die genannte Gerade r in den beiden Punkten M und N. Die Strahlen m_2 und n_2, beziehungsweise μ' und ν', welche die Punkte M und N mit den Scheiteln s_2, resp. σ verbinden, sind die einander entsprechenden Rechtwinkelstrahlen in den beiden perspectivischen Büscheln $S_2\,(a_2 b_2 c_2)$ und $\sigma\,(\alpha'\beta'\gamma')$.

Es ist offenbar gleichgiltig, ob man die Dreistrahlen $S_2\,(a_2 b_2 c_2)$ und $\sigma\,(\alpha'\beta'\gamma')$ oder die Dreistrahlen $S_2\,(a_2 m_2 n_2)$ und $\sigma\,(\alpha'\mu'\nu')$ in eine solche gegenseitige Lage bringt, dass $S_2\,(a_2 m_2 n_2)$ der senkrechte und $\sigma\,(\alpha'\mu'\nu')$ überhaupt ein Schnitt eines und desselben Ebenenbüschels werde.

Um das Angedeutete zu erreichen, bringen wir den Dreistrahl $\sigma\,(\alpha'\mu'\nu')$ in eine solche Lage $S_2\,(\alpha''\mu''\nu'')$, dass σ mit S_2, und die Strahlen μ'' und ν'' beziehungsweise mit m_2 und n_2 zusammenfallen. Der Strahl α' mag dabei in die Lage α'' und jener β' in die Lage β'' gelangen.

Drehen wir nun die Ebene des Dreistrahles $S_2\,(\alpha''\mu''\nu'')$ so lange um m_2, bis a_2 die orthogonale Projection von α'' wird. Letzteres wird durch die Drehung eines Punktes z_0 von α'' in der zu m_2 senkrechten Ebene R bewerkstelligt. Die Ebene des gedrehten Strahlenbüschels schließt mit dem zur Bildebene senkrechten Projectionsstrahle den Winkel φ ein und besitzt, der Construction gemäß, die Gerade m_2 als Bildflächtrace.

Das bildflächprojicierende Ebenenbüschel $S_2\,(a_2 b_2 c_2)$ und das gedrehte Strahlenbüschel sind somit in die oberwähnte perspectivische Lage gebracht.

Überträgt man endlich die Gerade R nach R_1 (Taf. II, Fig. 10 b) derart, dass R_1 mit α_1 und β_1 die nämliche relative Lage wie R mit α'' und β'' besitzt, so wird durch diese bereits die Richtung der orthogonalen Projection der Achse g_2 des gesuchten Ebenenbüschels $S\,(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ dargestellt. Die Achse g_2 selbst hat zur Projection eine zu R_1 parallele durch S gehende Gerade und schließt mit der Projectionsebene den Winkel φ ein.

Das Ebenenbüschel $g_2\,(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ ist somit von der Beschaffenheit, dass es dem bildflächprojicierenden Strahlenbüschel $S_2\,(a_2 b_2 c_2)$ congruent ist, und dass drei seiner Ebenen (g_2, α_1), (g_2, β_1) und (g_2, γ_1)

auf den entsprechenden Ebenen (g_1, a_1), (g_1, b_1), (g_1, c_1) des ihnen projectivischen Ebenenbüschels g_1 $(a_1 b_1 c_1)$ senkrecht stehen.

Hieraus folgt aber unmittelbar, dass die sämmtlichen entsprechenden Ebenen der beiden Ebenenbüschel zu einander senkrecht sind, und dass somit allen Bedingungen der gestellten Aufgabe entsprochen sei.

§. 40.

Mittelpunkt, Durchmesser und Durchmesserebene eines windschiefen Hyperboloides. Asymptotenkegel etc.

Die drei Leitgeraden für ein windschiefes Hyperboloid seien durch g_1, g_2 und g_3 (Taf. II, Fig. 11) dargestellt.

Bestimmen wir zunächst jene drei Erzeugenden l_1, l_2 und l_3, welche beziehungsweise zu g_1, g_2 und g_3 parallel sind und die Leitlinien g_2 und g_3 in A und B, g_3 und g_1 in C und D, g_1 und g_2 in E und F schneiden.

Legt man durch ABC, BCD, CDE, DEF, EFA und FAB sechs Ebenen, welche offenbar paarweise parallel sind, so bestimmen dieselben ein schiefwinkliges Parallelopiped, in welchem die Erzeugenden g_1, g_2, g_3 und l_1, l_2, l_3 sechs Kanten vorstellen.

Die Punkte A und D, B und E, C und F sind Gegenecken dieses Parallelopipedes. Die übrigen Schnitte der sechs Ebenen liefern noch ein viertes Paar von Gegenecken G und H, welches wir jedoch nicht berücksichtigen.

Die Diagonalen AD, BE und CF schneiden sich bekanntlich in einem und demselben Punkte M, dem Mittelpunkte des Parallelopipedes.

Man sieht sofort, dass die drei Geraden l_1, l_2, l_3 gegen die drei Geraden g_1, g_2, g_3 centrisch-symmetrisch liegen in Bezug auf M als Symmetriecentrum.

Bringen wir daher irgend ein geometrisches Gebilde in eine gewisse Lagenbeziehung zu g_1, g_2 und g_3, so wird demselben ein congruentes, centrisch-symmetrisches Gebilde entsprechen, welches zu l_1, l_2 und l_3 dieselbe Lagenbeziehung wie das erstere zu g_1, g_2 und g_3 haben wird.

Denken wir uns speciell eine Erzeugende l_4 des Hyperboloides $g_1 g_2 g_3$ construiert, welche die Geraden g_1, g_2 und g_3 beziehungsweise in m_1, n_1 und p_1 treffen möge.

Die Geraden Mm_1, Mn_1 und Mp_1 schneiden die Geraden l_1, l_2 und l_3 beziehungsweise in den Punkten m_2, n_2 und p_2, und da der Punkt M von den Geraden g_1 und l_1, g_2 und l_2 und g_3 und l_3 gleich

weit entfernt ist, so wird auch $Mm_1 = Mm_2$; $Mn_1 = Mn_2$ und $Mp_1 = Mp_2$ sein.

Dieses Ergebnis zusammengehalten mit dem Umstande, dass die drei Verbindungslinien $m_1 Mm_2$, $n_1 Mn_2$ und $p_1 Mp_2$ in einer und derselben Ebene (M, l_4) liegen, führt zu dem unmittelbaren Schlusse, dass die drei Punkte m_2, n_2 und p_2 in einer und derselben Geraden g_4 liegen, welche zu der Geraden l_4 parallel ist, und eine zu System (g) gehörende Erzeugende des Hyperboloides darstelle.

Wir erhalten auf diese Weise ein Paar paralleler Erzeugenden verschiedener Systeme (g) und (l) von der Eigenschaft, dass ihre Ebene (welche einer früher gegebenen Definition zufolge eine asymptotische Ebene des Hyperboloides ist), durch einen festen Punkt M geht, und dass die ein solches Paar bildenden Erzeugenden vom Punkte M gleich weit entfernt sind. Da aber l_4 als eine ganz beliebige Erzeugende des Hyperboloides willkürlich angenommen wurde, so gilt das Gleiche überhaupt von allen Paaren paralleler Erzeugenden des Hyperboloides.

Stellen wir uns nun insbesondere vor, die Erzeugende l_4 sei so gewählt worden, dass sie durch einen Punkt P_1 des Hyperboloides gehe.

Verbindet man P_1 mit M, so trifft diese Gerade das Hyperboloid zum zweitenmale in einem Punkte P_2, welcher, wie einleuchtend ist, auf der zu l_4 parallelen Erzeugenden g_4 des zweiten Systems liegt, und von M ebenso weit wie P_1 entfernt ist. Mit Rücksicht auf die beliebige Wahl des Punktes P_1 auf der Fläche des Hyperboloides geht sonach hervor, dass der Punkt M die Eigenschaft besitze, jede durch ihn gehende Sehne des Hyperboloides in zwei gleiche Theile zu theilen und mithin ein Mittelpunkt der Fläche sei. Es besteht daher der Satz:

31. „Das windschiefe Hyperboloid besitzt einen Mittelpunkt, welcher stets reell ist."

§. 41.

Im Vorhergehenden wurde sichergestellt, dass die „asymptotischen Ebenen" des Hyperboloides, d. h. jene Ebenen, welche je zwei parallele Erzeugenden der Fläche enthalten, und die letztere in dem gemeinschaftlichen unendlich fernen Punkte jener Erzeugenden berühren, sämmtlich durch den Mittelpunkt M des Hyperboloides gehen.

Wir wissen aber auch (Satz 19), dass alle Ebenen, welche durch einen festen Punkt — hier M — gehen und die Erzeugenden eines Hyperboloides enthalten, einen Kegel zweiten Grades umhüllen,

welcher der Fläche aus jenem Punkte M als Scheitel umschrieben ist. Diese einfache Betrachtung führt somit unmittelbar zu dem Satze:

32. „Der aus dem Mittelpunkte eines Hyperboloides als Scheitel dem letzteren umschriebene Kegel zweiten Grades wird von sämmtlichen asymptotischen Ebenen des Hyperboloides berührt und der Kegel selbst berührt das Hyperboloid längs des unendlich fernen Kegelschnittes. Dieser besondere Kegel zweiten Grades heißt der Asymptotenkegel des Hyperboloides. Seine Erzeugenden sind zu jenen des Hyperboloides parallel.“

§. 42.

Mit Zuhilfenahme des Asymptotenkegels wird gleichzeitig das Urtheil, ob ein ebener Schnitt des Hyperboloides eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, wesentlich erleichtert.

Sei e eine beliebige das Hyperboloid schneidende Ebene, welche das Hyperboloid in einem Kegelschnite Σ und den Asymptotenkegel in einem Kegelschnitte σ schneiden möge.

Da der Asymptotenkegel und das Hyperboloid denselben unendlich fernen Kegelschnitt gemein haben, folgt unmittelbar, dass auch die beiden Kegelschnitte Σ und σ dieselben unendlich fernen Punkte besitzen.

Wird daher der Asymptotenkegel von einer Ebene nach einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel geschnitten, so schneidet dieselbe Ebene auch das Hyperboloid in einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel.

§. 43.

Um zu einem weiteren sehr wichtigen Satze zu gelangen, stellen wir folgende Betrachtung an.

Wenn man durch den Punkt M (Taf. II, Fig. 11) parallel zu g_4 und l_4 eine Gerade Mn zieht, so stellt diese Gerade — die von g_4 und l_4 gleichweit absteht — offenbar die Berührungserzeugende des Asymptotenkegels mit der Ebene (g_4, l_4) vor. Denn sie verbindet den Scheitel M dieses Kegels mit dem (unendlich fernen) Berührungspunkte der Ebene (g_4, l_4).

Denken wir uns weiters den Asymptotenkegel und das Hyperboloid gleichzeitig von einer Ebene e geschnitten und als Resultat die Kegelschnitte σ und Σ erhalten. Seien ferner a_1 und a_2 die Schnittpunkte der Erzeugenden g_4 und l_4 mit der Ebene e, also zwei Punkte des Kegelschnittes Σ.

Die Verbindungsgerade $a_1 a_2$ repräsentiert die Schnittgerade der Ebene e mit der asymptotischen Ebene (g_4, l_4), berührt daher den Asymptotenkegel und mithin auch den Kegelschnitt σ in dem Punkte c,

in welchem sie von der Berührungserzeugenden $M\mu$ des Asymptotenkegels getroffen wird. Hierbei ist selbstversändlich $a_1 c = a_2 c$. Das Gleiche gilt von allen anderen asymptotischen Ebenen (l_5, g_5), $(l_6, g_6) \ldots$

Die beiden Kegelschnitte Σ und σ stehen somit, wie den gepflogenen Erörterungen zu entnehmen ist, in einer eigenthümlichen Beziehung zu einander, die wir nachstehend kurz skizzieren wollen.

Die Tangenten des Kegelschnittes σ sind nämlich gleichzeitig Sehnen des Kegelschnittes Σ, welche durch den jeweilig zugehörigen Berührungspunkt von σ halbiert werden.

Setzen wir voraus, es seien Σ und σ (Taf. II, Fig. 12) zwei Kegelschnitte, welche die vorbezeichneten Eigenschaften besitzen und sei $a_1 a_2$ eine Sehne des Kegelschnittes Σ, welche gleichzeitig den Kegelschnitt σ in c berührt.

Denken wir uns an den Kegelschnitt σ die zu $a_1 a_2$ parallele Tangente $a'_1 a'_2$ gezogen, so wird auch der Berührungspunkt c' die Sehne $a_1' a_2'$ halbieren. Der Durchmesser cc' des Kegelschnittes σ ist somit gleichzeitig auch ein Durchmesser des Kegelschnittes Σ, da er die Mittelpunkte zweier parallelen Sehnen $a_1 a_2$ und $a'_1 a'_2$ verbindet. Dasselbe, was aber von den Sehnen $a_1 a_2$ und $a'_1 a'_2$ gilt, hat offenbar auch für jede andere Sehnenrichtung seine volle Giltigkeit. Hieraus ist zu ersehen, dass die beiden Kegelschnitte Σ und σ alle Durchmesser gemein haben, also auch den nämlichen Mittelpunkt o besitzen.

Ziehen wir durch den Punkt o eine Parallele bb_1 zu $a_1 a_2$ und $a'_1 a'_2$, so stellt diese Parallele den conjugierten Durchmesser zum Durchmesser cc' sowohl in dem Kegelschnitte Σ, als auch in dem Kegelschnitte σ vor; es werden folglich zwei conjugierte Durchmesser des Kegelschnittes Σ, gleichzeitig auch conjugierte Durchmesser des Kegelschnittes σ sein.

Fassen wir das Ergebnis dieser Untersuchungen zusammen, so finden wir, dass die beiden Kegelschnitte Σ und σ concentrisch-ähnlich und ähnlich gelegen sind.

Berücksichtigt man ferner, dass die beiden Kegelschnitte Σ und σ, in welchen eine beliebige Ebene ein Hyperboloid und dessen Asymptotenkegel schneidet, die erste oben angeführte Eigenschaft, also auch die aus derselben abgeleitete letzt ausgesprochene Eigenthümlichkeit zeigen, so ergibt sich der nachstehende wichtige Satz, welcher die Quelle einer ganzen Reihe anderer gleich wichtiger Sätze bildet:

33. „*Eine beliebige Ebene schneidet ein windschiefes Hyperboloid und dessen Asymptotenkegel in zwei concentrischen ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten.*“

§. 44.

Es ist bereits bekannt, dass ein Kegel zweiten Grades durch parallele Ebenen in ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten getroffen wird, deren Mittelpunkte auf einer und derselben durch den Kegelscheitel gehenden Geraden (d. i. dem, der Schar jener schneidenden, untereinander parallelen Ebenen conjugierten Durchmesser) liegen.

Wendet man diesen bekannten Satz auf den Asymptotenkegel eines windschiefen Hyperboloides an, und zieht man hierbei gleichzeitig den Satz, dass eine Ebene das Hyperboloid und dessen Asymptotenkegel stets in concentrischen ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten schneidet, in Betracht, so ergeben sich unmittelbar die beiden folgenden Sätze:

34. „Ein windschiefes Hyperboloid wird von parallelen Ebenen in ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten geschnitten."

Und ebenso der Satz:

35. „Die Mittelpunkte der Kegelschnitte, in welchen parallele Ebenen ein windschiefes Hyperboloid schneiden, liegen auf einer und derselben durch den Mittelpunkt des Hyperboloides gehenden Geraden. Diese Gerade stellt in dem Asymptotenkegel den zu den parallelen schneidenden Ebenen conjugierten Durchmesser vor."

Da man eine Gerade, welche durch den Mittelpunkt einer krummen Fläche geht, einen Durchmesser dieser Fläche nennt, so kann der vorstehende Satz auch folgendermaßen ausgesprochen werden:

36. „Die Mittelpunkte paralleler auf dem windschiefen Hyperboloide liegender Kegelschnitte sind auf einem Durchmesser der Fläche gelegen."

Einen Durchmesser, welcher die Mittelpunkte der in parallelen Ebenen liegenden Kegelschnitte eines windschiefen Hyperboloides enthält, wollen wir den „zu der Schar dieser Parallelebenen conjugierten Durchmesser des Hyperboloides" nennen.

Diejenige Ebene der Parallelschar, welche gleichzeitig durch den Mittelpunkt des Hyperboloides geht, die also das Hyperboloid in einem Kegelschnitte trifft, dessen Durchmesser sämmtlich auch Durchmesser des Hyperboloides sind, wollen wir die zu dem vorbezeichneten Durchmesser „conjugierte Durchmesserebene" heißen.

Der Grund für diese Bezeichnung wird sich in der Folge leicht finden.

Sobald man im allgemeinen eine „Durchmesserebene" des Hyperboloides als eine solche Ebene auffasst, welche durch den Mittelpunkt desselben geht, gelangt man direct zu dem Satze:

37. „*Jede Durchmesserebene schneidet das windschiefe Hyperboloid in einem Kegelschnitte, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt des Hyperboloides ist.*"

§. 45.

Nehmen wir an, es sei h irgend eine beliebige Gerade, welche ein windschiefes Hyperboloid in den Punkten a_1 und a_2, den Asymptotenkegel dagegen in den Punkten b_1 und b_2 treffen möge.

Denken wir uns ferner durch h eine Ebene e willkürlich gelegt, so schneidet diese das Hyperboloid sowohl, als dessen Asymptotenkegel in zwei Kegelschnitten Σ und σ, welche (infolge des Satzes 33) concentrisch, ähnlich und ähnlich gelegen sind. Der Kegelschnitt Σ trifft die Gerade h in a_1 und a_2 und der Kegelschnitt σ in b_1 und b_2.

Da aber bekanntlich jene Stücke einer Geraden, welche zwischen zwei derartigen Kegelschnitten liegen, einander gleich sind, so ist auch diesfalls $a_1 b_1 = a_2 b_2$ und man hat den Satz:

38. „*Die Stücke einer beliebigen Geraden des Raumes zwischen einem windschiefen Hyperboloide und dessen Asymptotenkegel sind einander gleich.*"

§. 46.

Auf Grund dieses Satzes gelangt man weiters direct zu dem Schlusse, dass der Mittelpunkt m der Sehne $a_1 b_2$ mit dem Mittelpunkte m der Sehne $b_1 b_2$ zusammenfalle.

Bekanntlich liegen die Mittelpunkte paralleler Sehnen eines Kegels zweiten Grades auf einer durch den Kegelscheitel gehenden Ebene und zwar auf der zu der Sehnenrichtung conjugierten Durchmesserebene des Kegels.

Es werden daher (infolge des Satzes 38) auch die Mittelpunkte paralleler Sehnen des Hyperboloides auf der zu der Sehnenrichtung conjugierten Durchmesserebene des Asymptotenkegels, oder nach der früher eingeführten Bezeichnung, auf der der Sehnenrichtung conjugierten Durchmesserebene des Hyperboloides liegen. Hiernach besteht der Satz:

39. „*Die Mittelpunkte paralleler Sehnen eines windschiefen Hyperboloides liegen auf der der Sehnenrichtung conjugierten Durchmesserebene des Hyperboloides.*"

§. 47.

Eine Tangente einer krummen Fläche kann, wie wir wissen, stets als Grenzlage einer Sehne (Secante) aufgefasst werden, wenn die

beiden Schnittpunkte der letzteren in einen zusammenfallen, d. i. im jeweiligen Berührungspunkte vereinigt erscheinen. Es tritt somit in diesem Falle an die Stelle des Mittelpunktes der Sehne der vorerwähnte Berührungspunkt.

Denkt man sich nun eine Schar paralleler Sehnen eines windschiefen Hyperboloides mit Einschluss der zugehörigen parallelen Tangenten, so folgt aus dem vorhergehenden Satze, dass die Berührungspunkte aller dieser Tangenten ebenfalls auf der zu der Sehnenrichtung conjugierten Durchmesserebene des Hyperboloides liegen, oder dass der Ort dieser Berührungspunkte jener Kegelschnitt sei, in welchem die genannte Durchmesserebene das Hyperboloid schneidet. Daher der Satz:

40. „Die Tangenten eines windschiefen Hyperboloides, welche zu einer beliebigen Geraden parallel sind, bilden einen Cylinder zweiten Grades. Die entsprechende Berührungscurve ist jener Kegelschnitt, in welchem die zu der Tangentenrichtung conjugierte Durchmesserebene des Hyperboloides das letztere schneidet. Die Achse des Cylinders geht durch den Mittelpunkt des Hyperboloides.“

§. 48.

Nachdem die Contour einer krummen Fläche auf der Projectionsebene für eine bestimmte Richtung des projicierenden Strahles die Schnittcurve der Projectionsebene mit jenem Cylinder ist, welcher der Fläche parallel zu der Richtung des projicierenden Strahles umschrieben werden kann, so wird dem eben aufgestellten Satze auch die folgende Fassung gegeben werden können:

41. „Die Contour eines windschiefen Hyperboloides auf einer Ebene für irgend eine Richtung parallel projicierender Strahlen ist ein Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt die Projection des Mittelpunktes des Hyperboloides ist.“

§. 49.

Da ein Durchmesser und die ihm conjugierte Durchmesserebene des Asymptotenkegels gleichzeitig auch (der angenommenen Bezeichnung zufolge) einen Durchmesser und die ihm conjugierte Durchmesserebene des Hyperboloides darstellt, so folgt der Satz:

42. „Ein windschiefes Hyperboloid besitzt unendlich viele Paare conjugierter Durchmesser und Durchmesserebenen“
aus dem gleichlautenden bekannten Satze für einen beliebigen Kegel zweiten Grades.

§. 50.

Ohne jedwede Schwierigkeit ergeben sich nunmehr auch nachstehende Sätze:

43. „Ein windschiefes Hyperboloid besitzt unendlich viele Gruppen von drei conjugierten Durchmessern; je zwei solcher drei conjugierter Durchmesser bestimmen die dem dritten conjugierte Diametralebene und sind conjugierte Durchmesser des in dieser Diametralebene liegenden Kegelschnittes des Hyperboloides.“

44. „Ein windschiefes Hyperboloid besitzt drei Hauptachsen und drei Hauptebenen, d. i. drei wechselseitig auf einander senkrecht stehende conjugierte Durchmesser und die drei durch die Paare derselben bestimmten Ebenen. Diese Ebenen sind Ebenen orthogonaler Symmetrie für das Hyperboloid.“

Da die Achsen- oder Hauptebenen des Hyperboloides gleichzeitig Hauptebenen des Asymtotenkegels sind, und die zu denselben parallelen Ebenen den Asymptotenkegel bekanntlich in zwei Scharen von Hyperbeln und einer Schar von Ellipsen schneiden, so folgt (mit Rücksicht auf Satz 33), dass von den drei in den Hauptebenen liegenden Kegelschnitten des Hyperboloides zwei derselben Hyperbeln sind, während der Dritte eine Ellipse ist, welche man als die „Kehlellipse“ des Hyperboloides zu bezeichnen pflegt.

§. 51.

Untersuchen wir nun, durch welche Curve der Ort der Berührungspunkte des Hyperboloids mit allen durch einen festen Punkt S im Raume gelegten Berührungsebenen dargestellt werde.

Nehmen wir zu diesem Zwecke wieder an, es sei das Hyperboloid durch drei gerade Leitlinien g_1, g_2 und g_3 gegeben.

Die drei Ebenen, welche durch den festen Punkt S und die drei Geraden g_1, g_2 und g_3 gelegt werden können, sind Berührungsebenen des Hyperboloides und gleichzeitig auch Berührungsebenen des dem Hyperboloide aus dem Punkte S umschriebenen Kegels.

Die Ebene (S, g_1) schneidet die Geraden g_2 und g_3 in zwei Punkten a_2 und a_3, deren Verbindungsgerade l_1 bereits die in der Ebene (S, g_1) liegende Erzeugende des zweiten Systems darstellt. Die beiden Erzeugenden g_1 und l_1 treffen sich in einem Punkte a_1, welcher den Berührungspunkt des Hyperboloides mit der Ebene (S, g_1) repräsentiert. In analoger Weise erhält man die Erzeugenden l_2 und l_3 des zweiten Systems, welche in den Ebenen (S, g_2) und (S, g_3) liegen. Dieselben

schneiden die Geraden g_2 beziehungsweise g_3 in den Punkten b_2 und c_3, in welchen das Hyperboloid von den Ebenen (S, g_2) und (S, g_3) berührt wird.

Die Punkte a_1, b_2 und c_3 sind sonach drei Punkte der Berührungscurve des Hyperboloides und des demselben aus dem Punkte S umschriebenen Kegels, während (S, g_1), (S, g_2) und (S, g_3) die gemeinschaftlichen Berührungsebenen beider Flächen in diesen drei Punkten bestimmen.

Denken wir uns nun durch a_1, b_2 und c_3 eine Ebene E gelegt, welche die Berührungsebenen (S, g_1), (S, g_2) und (S, g_3) in den drei beziehungsweise durch a_1, b_2, c_3 gehenden Geraden t_1, t_2 und t_3 schneidet, so ist einleuchtend, dass das Hyperboloid von dieser Ebene E in einem Kegelschnitte K getroffen wird, welcher durch die drei Punkte a_1, b_2 und c_3 und die Tangenten t_1, t_2 und t_3 in diesen Punkten vollkommen bestimmt ist. Die Ebene E schneidet aber auch den aus dem Punkte S umschriebenen Kegel nach einem Kegelschnitte, welcher offenbar durch die nämlichen Stücke a_1, b_2, c_3 und t_1, t_2, t_3 bestimmt wird, und folglich mit dem ersteren identisch sein muss.

Man erkennt sofort, dass dieser vorerwähnte Kegelschnitt K den Ort der Berührungspunkte darstellen müsse. Denn ist x ein beliebiger Punkt dieses Kegelschnittes, so ist einleuchtend, dass die durch denselben gehende Kegelerzeugende Sx das Hyperboloid nicht in einem von x verschiedenen Punkte berühren könne, weil, wenn dies überhaupt denkbar wäre, dieselbe drei Punkte mit dem Hyperboloide gemein haben, folglich eine Erzeugende desselben repräsentieren müsste. Letzteres ist aber ganz unmöglich, da immer mindestens ein Punkt — S — derselben bekannt ist, welcher, der Voraussetzung gemäß, dem Hyperboloide nicht angehört. Daher der Satz:

45. „Die Berührungscurve eines windschiefen Hyperboloides mit einem demselben aus einem beliebigen Punkte des Raumes umschriebenen Kegel, ist ein Kegelschnitt.“

§. 52.

Der vorstehende Satz kann ebenso leicht auch in umgekehrter Fassung nachgewiesen werden.

Denken wir uns das Hyperboloid durch eine Ebene E in einem Kegelschnitte K getroffen und nehmen wir drei Punkte a_1, b_2 und c_3 auf diesem Kegelschnitte beliebig an. Construieren wir ferner die zugehörigen Berührungsebenen T_1, T_2 und T_3 des Hyperboloides in den betreffenden Punkten a_1, b_2 und c_3.

Die besagten drei Ebenen schneiden sich in einem Punkte S. Nach dem vorhergehenden Satze 45) ist die Berührungscurve des vom Punkte S dem Hyperboloid umschriebenen Kegels ein Kegelschnitt, welchem offenbar die Punkte a_1, b_2 und c_3 angehören und daher mit dem Kegelschnitte K, in welchem die durch a_1, b_2, c_3 gehende Ebene E das Hyperboloid schneidet, identisch ist. Letzteres sagt aber nichts anderes aus, als dass die Tangentialebenen des Hyperboloides in allen Punkten eines beliebigen auf demselben liegenden Kegelschnittes, durch den nämlichen Punkt S im Raume gehen; es gilt daher der Satz:

46. „Die Tangentialebenen eines windschiefen Hyperboloides in den Punkten eines beliebigen ebenen Schnittes gehen sämmtlich durch einen und denselben Punkt, umhüllen also einen Kegel zweiten Grades.“

§. 53.

Ist S der Scheitel eines dem windschiefen Hyperboloide umschriebenen Kegels, K der zugehörige Berührungskegelschnitt, M der Mittelpunkt des Hyperboloides und denken wir uns durch die Gerade SM eine beliebige Ebene e gelegt, so wird dieselbe das Hyperboloid in einem Kegelschnitte $\varkappa$, den Kegel (S, K) selbst aber in zwei Erzeugenden t_1 und t_2 schneiden, welche nothwendig Tangenten des Kegelschnittes $\varkappa$ in jenen beiden Punkten a_1 und a_2 sein müssen, in welchen die Ebene e den Kegelschnitt K trifft. Die Gerade $a_1 a_2$ ist offenbar die Schnittgerade der Ebene e mit der Ebene des Berührungskegelschnittes K.

Nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Kegelschnitte folgt, dass die Gerade SM die Sehne $a_1 a_2$ in dem Punkte o, in welchem die letztere von SM getroffen wird, halbiert.

Drehen wir die Ebene e um die Gerade SM, so wird dieselbe die Ebene des Kegelschnittes K immer in einer Sehne schneiden, welche durch den festen Punkt o (Schnittpunkt der Geraden SM mit der Ebene des Berührungskegelschnittes K) in zwei gleiche Theile getheilt wird. Es ist hiernach o der Mittelpunkt des Kegelschnittes K. Wir gelangen somit zu dem Satze:

47 a) „Die Verbindungsgerade eines beliebigen Punktes im Raume mit dem Mittelpunkte eines windschiefen Hyperboloides enthält gleichzeitig auch den Mittelpunkt jenes Kegelschnittes, in welchem das Hyperboloid von dem aus dem oben genannten Punkte umschriebenen Kegel berührt wird.“

Oder nach den früher aufgestellten Definitionen:

47b) „Der nach einem beliebigen Punkte des Raumes gehende Durchmesser eines Hyperboloides ist conjugiert zu der Ebene des jenem Punkte entsprechenden Berührungskegelschnittes.“

§. 54.

Parallele Schnitte eines Hyperboloides, sowie auch eines Kegels zweiten Grades sind, wie wir wissen, ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte, die in jedem der beiden Fälle ihre Mittelpunkte auf dem der schneidenden Parallelebenenschar conjugierten Durchmesser haben.

Ist nun wieder S der Scheitel eines dem windschiefen Hyperboloide umschriebenen Kegels, K der Berührungskegelschnitt, o dessen Mittelpunkt, M der Mittelpunkt des Hyperboloides und denken wir uns sowohl das Hyperboloid als auch den Berührungskegel durch eine, zur Ebene des Berührungskegelschnittes K parallele Ebene in den Kegelschnitten Σ und σ geschnitten, so folgt, dass, weil diese beiden letztgenannten Kegelschnitte dem Berührungskegelschnitte K ähnlich und ähnlich gelegen sind, dieselben auch unter einander ähnlich und ähnlich gelegen sein müssen. Da ferner die Gerade SM den zur Ebene des Berührungskegelschnittes conjugierten Durchmesser, sowohl in Bezug auf das Hyperboloid als auch in Bezug auf den Kegel darstellt, so folgt, dass die Mittelpunkte der beiden Kegelschnitte Σ und σ mit dem Schnittpunkte ihrer Ebene und der Geraden SM zusammenfallen. Hiernach folgt der Satz:

48. „Ist einem windschiefen Hyperboloide ein Kegel umschrieben, so schneiden jene Ebenen, welche zu der Ebene des Berührungskegelschnittes parallel sind, das Hyperboloid und den Kegel in concentrischen ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten.“

§. 55.

Besondere Erzeugungsarten für ein windschiefes Hyperboloid.

Es sind ein Punkt p, zwei sich nicht schneidende Geraden g_1 und g_2 und ebenso zwei andere, sich gleichfalls nicht schneidende Geraden l_1 und l_2 derart gegeben, dass l_1 und l_2 sowohl von g_1 als auch von g_2 getroffen werden. Die vier Geraden g_1, g_2, l_1 und l_2 bilden somit ein windschiefes Vierseit im Raume.

Die Geraden g_1 und g_2 sollen Erzeugende des einen Systems und l_1, l_2 Erzeugende des zweiten Systems eines windschiefen Hyperboloides repräsentieren; der Punkt p soll ein Punkt der Fläche sein. Mit Zugrundelegung dieser Bestimmungsstücke ist das Hyperboloid zu construieren.

Durch den Punkt p geht offenbar eine Erzeugende des Systems g, als auch eine Erzeugende des Systems l.

Betrachtet man zwei der Geraden, etwa g_1 und g_2, die einem und demselben Systeme angehören, als Achsen zweier projectivischen, das Hyperboloid erzeugenden Ebenenbüschel, so erhält man zwei Paare entsprechender Ebenen dieser Büschel in (g_1, l_1), (g_2, l_1) und (g_1, l_2), (g_2, l_2). Ein drittes Paar entsprechender Ebenen (g_1, p) und (g_2, p) geht durch den Punkt p, nachdem dieser, als Punkt der Fläche, einer Erzeugenden des Systems l angehören muss.

Durch diese drei Paare entsprechender Ebenen ist die projectivische Beziehung der beiden Ebenenbüschel g_1 und g_2 vollständig festgestellt, so, dass man beliebig viele Paare entsprechender Ebenen, also auch beliebig viele Erzeugenden des Hyperboloides ermitteln kann.

§. 56.

4. Aufgabe. **Ein windschiefes Hyperboloid ist durch ein windschiefes Vierseit $(g_1\, g_2\, l_1\, l_2)$ und einen Punkt p gegeben; es ist die Berührungsebene des Hyperboloides in dem Punkte p zu construieren.**

Durch jeden Punkt eines windschiefen Hyperboloides gehen stets zwei Erzeugende, welche verschiedenen Systemen angehören.

Um die durch p gehende Erzeugende des Systems l zu erhalten, berücksichtige man, dass dieselbe die beiden Erzeugenden g_1 und g_2 des anderen Systems schneiden, sich daher als Schnittgerade l_3 der Ebenen (p, g_1) und (p, g_2) ergeben müsse.

In gleicher Weise wird sich die durch den Punkt p gehende Erzeugende g_3, als Schnitt der Ebenen (p, l_1) und (p, l_2) leicht ermitteln lassen. Die gesuchte Berührungsebene ist sodann durch g_3 und l_3 vollkommen bestimmt.

§. 57.

Ein windschiefes Hyperboloid ist durch zwei demselben Systeme angehörige Erzeugenden l_1, l_2 und durch drei seiner Punkte p_1, p_2 und p_3 vollkommen bestimmt.

Denn die Geraden g_1, g_2 und g_3, welche durch p_1, p_2 und p_3 gehen und deren jede die beiden gegebenen Erzeugenden l_1 und l_2 schneidet, repräsentieren bereits drei Erzeugende der zweiten Schar und kann sonach mit Zuhilfenahme derselben „als Leitgeraden“ das Hyperboloid auf bereits bekannte Weise construiert werden.

§. 58.

Ein windschiefes Hyperboloid ist durch vier seiner Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 und durch zwei sich schneidende Geraden l und g, als Erzeugende verschiedener Systeme, vollkommen bestimmt.

Denken wir uns nämlich durch drei von den vier gegebenen Punkten, beispielsweise durch p_1, p_2 und p_3, eine Ebene e gelegt, so schneidet diese das Hyperboloid in einem Kegelschnitte K, von welchem fünf Punkte, d. i. die drei Punkte p_1, p_2, p_3 und die Durchstoßpunkte a und b der beiden Erzeugenden l und g mit der Ebene e bekannt sind. Der Kegelschnitt ist somit vollständig bestimmt.

Die Erzeugende g_1, welche durch den vierten gleichfalls gegebenen Punkt p_4 geht, muss die Erzeugende l sowohl, als auch den Kegelschnitt K treffen.

Wird daher der Schnitt σ der Ebene e mit der Ebene (lp_4), welcher sich als eine durch a gehende Gerade ergibt, aufgesucht, so trifft diese den durch die Punkte a, b, p_1, p_2 und p_3 gegebenen Kegelschnitt K das zweitemal in einem Punkte c.

Letztgenannter Punkt c kann aus den beiden projectivischen Strahlenbüscheln $a(p_1 p_2 p_3 \ldots)$ und $b(p_1 p_2 p_3 \ldots)$ auf bekannte Weise linear construiert werden und wird mit p_4 verbunden eine Erzeugende g_1 des Hyperboloides liefern.

Betrachtet man nun g und g_1 als A c h s e n d e r e r z e u g e n d e n p r o j e c t i v i s c h e n E b e n e n b ü s c h e l, so können aus den drei Paaren entsprechender Ebenen gp_1, g_1p_1; gp_2, g_1p_2; gp_3, g_1p_3 beliebig viele Paare solcher Ebenen, also auch beliebig viele Erzeugenden des Hyperboloides construiert werden.

Sehr interessant ist die Construction in dem nachstehenden Falle.

§. 59.

Ein windschiefes Hyperboloid ist durch eine Erzeugende g und durch sechs Punkte p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 und p_6 vollkommen bestimmt.

Ermitteln wir zunächst die dem Systeme g angehörende Erzeugende g_1, welche durch den Punkt p_6 geht. Die genannte, resp. zu suchende Gerade muss, wie selbstverständlich, die Eigenschaft besitzen, dass die fünf Ebenen (g_1, p_1), (g_1, p_2), (g_1, p_3), (g_1, p_4) und (g_1, p_5), welche diese mit den fünf Punkten $p_1 \ldots p_5$ bestimmt, projectivisch seien mit den fünf Ebenen (g, p_1), (g, p_2), (g, p_3), (g, p_4), (g, p_5), welche durch die gegebene Gerade g mit denselben Punkten $p_1 \ldots p_5$ festgestellt sind.

Nehmen wir zu diesem Zwecke eine beliebige Transversalebene e an, welche die Achse g in einem Punkte s und die fünf Ebenen $(g, p_1)\ldots(g, p_5)$ in einem Fünfstrahle $s\,(\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4\pi_5)$ schneidet. Dieselbe Ebene e schneidet die fünf Verbindungsgeraden $p_6p_1 \ldots p_6p_5$ in den Punkten a_1, a_2, a_3, a_4 und a_5.

Lässt sich nun in der Ebene e ein Punkt x so bestimmen, dass derselbe im Zusammenhange mit den Punkten $a_1 \ldots a_5$ einen Fünfstrahl $x\,(a_1 \ldots a_5)$ bildet, welcher zu dem Fünfstrahle $s\,(\pi_1 \ldots \pi_5)$ projectivisch ist, so wird die Verbindungsgerade g_1 der Punkte x und p_6 die gesuchte Gerade darstellen. Denn die fünf Ebenen, welche durch xp_6 geführt werden können und die Strahlen $xa_1 \ldots xa_5$ enthalten, sind einerseits projectivisch mit den fünf Ebenen $(g, p_1)\ldots(g, p_5)$, und andererseits enthalten sie auch die fünf Geraden $p_6p_1, \ldots p_6p_5$, also auch die fünf gegebenen Punkte $p_1, \ldots p_5$.

Die gestellte Aufgabe erscheint somit zurückgeführt auf die „in einer Ebene (e) einen Punkt x (Taf. II, Fig. 13a und 13b) zu finden, welcher fünf in dieser Ebene gegebene Punkte a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 durch einen Fünfstrahl so projiciert, dass derselbe einem gegebenen Fünfstrahle $s\,(\pi_1 \ldots \pi_5)$ projectivisch ist“.

Dieser Punkt kann ein-deutig als Schnittpunkt zweier Kegelschnitte, die durch dieselben drei Punkte gehen, construiert werden.

Wir verbinden den Punkt a_1 mit a_2, a_3 und a_4, und bestimmen einen durch a_1 gehenden Strahl t' derart, dass er mit den drei Strahlen a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4 einen Vierstrahl $a_1\,(t'a_2a_3a_4)$ bildet, welcher mit dem gegebenen Vierstrahle $s\,(\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4)$ projectivisch ist.

Durch die vier Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 und durch die Gerade t', als Tangente in a_1, ist ein Kegelschnitt K' bestimmt. Jeder Punkt dieses Kegelschnittes hat die Eigenschaft, dass er die vier Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 durch einen Vierstrahl projiciert, welcher mit dem Vierstrahle $a_1\,(t'a_2a_3a_4)$, also auch mit dem Vierstrahle $s\,(\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4)$, projectivisch ist, d. h. mit anderen Worten: Der Kegelschnitt K' ist der geometrische Ort aller jener Punkte ξ', welche die vier Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 durch Vierstrahlen $\xi'\,(a_1a_2a_3a_4)$ so projicieren, dass sie zu dem gegebenen Vierstrahle $s\,(\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4)$ projectivisch sind.

Bestimmen wir ferner zu den drei Strahlen a_1a_2, a_1a_3, a_1a_5 einen durch a_1 gehenden Strahl t'' derart, dass er mit denselben einen Vierstrahl $a_1\,(t''a_2a_3a_5)$ bildet, welcher mit dem gegebenen Vierstrahle $s\,(\pi_1\pi_2\pi_3\pi_5)$ projectivisch ist.

Die vier Punkte a_1, a_2, a_3, a_5 und der Strahl t'' als Tangente im Punkte a_1, bestimmen abermals einen Kegelschnitt K''. Jeder

Punkt ξ'' dieses Kegelschnittes hat die Eigenschaft, dass er die vier Punkte a_1, a_2, a_3, a_5 durch einen Vierstrahl $\xi''(a_1 a_2 a_3 a_5)$ projiciert, welcher mit dem Vierstrahle $a_1(t'' a_2 a_3 a_5)$, also auch mit dem gegebenen Vierstrahle $s(\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_5)$ projectivisch ist, oder mit anderen Worten: Der Kegelschnitt K'' ist der geometrische Ort aller jener Punkte ξ'', welche die vier Punkte a_1, a_2, a_3, a_5 durch Vierstrahlen $\xi''(a_1 a_2 a_3 a_5)$ projicieren, die mit dem gegebenen Vierstrahle $s(\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_5)$ projectivisch sind.

Die beiden Kegelschnitte K' und K'' gehen durch die drei gegebenen Punkte a_1, a_2, a_3, und schneiden sich demgemäß noch in einem vierten Punkte x, welcher die Eigenschaft der Punkte ξ' sowohl, als auch die Eigenschaft der Punkte ξ'' besitzt, welcher also die Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 durch einen Vierstrahl $x(a_1 a_2 a_3 a_4)$, der zu dem gegebenen Vierstrahle $s(\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4)$ projectivisch ist, und weiters auch die vier Punkte a_1, a_2, a_3, a_5 durch einen Vierstrahl $x(a_1 a_2 a_3 a_5)$, welcher mit dem gegebenen Vierstrahle $s(\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_5)$ projectivisch ist, projiciert.

Der Punkt x wird demnach jener Punkt sein, welcher die fünf gegebenen Punkte $a_1 \ldots a_5$ durch einen Fünfstrahl projiciert, der mit dem gegebenen Fünfstrahle $s(\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_5)$ projectivisch ist.

Der vierte Schnittpunkt x der Kegelschnitte K' und K'' kann auf folgende Weise linear construiert werden.

Denken wir uns durch den Punkt a_2, welcher K' und K'' gemeinschaftlich ist, eine beliebige Gerade λ gezogen, welche den Kegelschnitt K' noch in b' und den Kegelschnitt K'' in b'' schneiden möge, und verbinden wir die Punkte b' und b'' mit irgend einem zweiten dem K' und K'' gemeinschaftlichen Punkte, allenfalls mit a_1.

Es ist einleuchtend, dass, sobald sich der Strahl λ um a_2 dreht, derselbe ein Strahlenbüschel beschreiben wird, zu welchem sowohl das von dem Strahle $a_1 b'$, als auch das von dem Strahle $a_1 b''$ beschriebene Strahlenbüschel projectivisch sein wird. Die beiden Strahlen $a_1 b'$ und $a_1 b''$ werden infolge dessen zwei concentrisch-projectivische Strahlenbüschel beschreiben.

Betrachten wir nun die besonderen Lagen entsprechender Strahlen dieser beiden Büschel.

Gelangt der Strahl λ bei der Drehung in die Lage $a_2 a_1$, so tritt an die Stelle von $a_1 b'$ die Tangente t', und an die Stelle von $a_1 b''$ die Tangente t''. Es sind demnach t' und t'' zwei entsprechende Strahlen der beiden vorgenannten concentrischen Strahlenbüschel.

Gelangt der Strahl λ in die Lage $a_2 a_3$, so entspricht demselben in beiden Büscheln der Strahl $a_1 a_3$; dieser Strahl ist somit einer

der beiden Doppelstrahlen der concentrischen Büschel. Es ist klar, dass der andere Doppelstrahl durch den zu suchenden vierten Schnittpunkt x von K' und K'' gehen müsse.

Bestimmen wir (mittelst der aus dem Pascal'schen Satze folgenden Construction) denjenigen Punkt a'_5, in welchem der Strahl $a_2 a_5$ den Kegelschnitt K' schneidet, so erhalten wir in $a_1 a_5$ und $a_1 a'_5$ ein zweites Paar entsprechender Strahlen der concentrischen Büschel, deren projectivische Beziehung hiermit durch die beiden Paare t', t''; $a_1 a'_5$, $a_1 a_5$ entsprechender Strahlen und durch den einen Doppelstrahl $a_1 a_3$ vollkommen festgestellt erscheint.

Der zweite Doppelstrahl $a_1 x$ kann, wie folgt, construiert werden. Man zieht durch einen beliebigen Punkt o von $a_1 a_3$ zwei willkürliche Geraden r_1 und r_2, von welchen die eine das Strahlenbüschel $a_1 (t' a'_5 a_3)$ in der Punktreihe τ', α', o und das zweite Strahlenbüschel $a_1 (t'' a_5 a_3)$ in der Punktreihe τ'', α'', o schneidet. Diese Punktreihen sind perspectivisch, da der Schnittpunkt o ihrer Träger ein sich selbstentsprechender Punkt ist. Das projicierende Centrum für obgenannte Punktreihen erhält man in dem Schnittpunkte S der Verbindungsstrahlen $\tau'\tau''$ und $\alpha'\alpha''$.

Jeder durch S gezogene Strahl schneidet die Punktreihen r_1 und r_2 in zwei einander entsprechenden Punkten, welche mit a_1 verbunden, zwei entsprechende Strahlen der concentrisch-projectivischen Strahlenbüschel liefern. Der Strahl Sa_1 insbesondere schneidet r_1 und r_2 in zwei Punkten, welche, mit a_1 verbunden, zwei entsprechende, mit Sa_1 zusammenfallende Strahlen, also den gesuchten zweiten Doppelstrahl der beiden concentrischen Büschel geben.

Der Schnittpunkt x des Strahles Sa_1 mit einem der beiden Kegelschnitte K' und K'' ist der vierte gemeinschaftliche Schnittpunkt dieser letzteren. Die Construction desselben ist aus Früherem bekannt.

Auf Grund der vorausgeschickten Entwicklungen ist der Fünfstrahl $x (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5)$ projectivisch mit dem gegebenen Fünfstrahle $s (\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4 \pi_5)$.

Verbindet man x mit p_6 durch eine Gerade g_1, so wird aus dieser Geraden als Achse, das Strahlenbüschel $x (a_1 \ldots a_5)$ durch ein Ebenenbüschel $g_1 (a_1 \ldots a_5)$ projiciert, welches einerseits mit dem Ebenenbüschel $g (p_1 \ldots p_5)$ projectivisch ist, und andererseits die fünf gegebenen Punkte $p_1 \ldots p_5$ projiciert.

Durch die obgenannten beiden Ebenenbüschel wird ein windschiefes Hyperboloid erzeugt, welches sowohl die Geraden g und g_1 und somit auch den Punkt p_6, als auch die Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 und p_5 enthält, und folglich das verlangte Hyperboloid darstellt.

Die vorerwähnte Gerade g_1 ist die durch den Punkt p_6 gehende und zum System g gehörende Erzeugende des Hyperboloides.

§. 60.

Schließlich mag noch einer Eigenschaft des windschiefen Hyperboloides Erwähnung geschehen, auf welche wir in der Folge öfters Veranlassung finden werden, uns zu berufen.

Ein windschiefes Hyperboloid und dessen Asymptotenkegel wird, wie dargethan, von einer beliebigen Ebene in ähnlichen, concentrischen und ähnlich liegenden Kegelschnitten getroffen.

Ferner ist auch sichergestellt worden, dass ein Kegel zweiten Grades von zwei Scharen paralleler Ebenen, welche zu der einen Hauptachse parallel sind und mit den beiden anderen eine gleiche Neigung besitzen, nach Kreisen geschnitten werde.

Übertragen wir diese Eigenschaft auf das windschiefe Hyperboloid, so ergibt sich der Satz:

49. „Das windschiefe Hyperboloid wird von zwei Scharen paralleler Ebenen nach Kreisen geschnitten. Die Ebenen beider Scharen sind zu einer Hauptachse (und zwar zur großen Achse der Kehlellipse) parallel, während die Ebenen der einen Schar mit den beiden anderen Achsen die nämlichen Winkel einschließen, wie die Ebenen der anderen Schar mit denselben Achsen.“

III. Capitel.

Das orthogonale Hyperboloid.

§. 61.

Die Schnittgeraden der Paare auf einander senkrecht stehender, beziehungsweise durch zwei sich nicht schneidende Geraden g_1 und g_2 gehender Ebenen erzeugen, wie bereits (Satz 11) nachgewiesen wurde, ein windschiefes Hyperboloid.

Diese besondere Art eines windschiefen Hyperboloides wird als „orthogonales Hyperboloid“ bezeichnet. Die besagte Fläche und deren wichtigsten Eigenschaften wollen wir nunmehr unserem Studium unterziehen.

Wie oben erwähnt, ist auf Grund vorausgeschickter Erörterungen die auf die vorbezeichnete Weise hervorgebrachte windschiefe Fläche

ein Hyperboloid. Auch wurde an betreffender Stelle gezeigt, dass die beiden Scharen von Kreisschnittsebenen zu den Achsen g_1 und g_2 der beiden erzeugenden Ebenenbüschel senkrecht seien, und dass jede Ebene, welche auf der einen oder der anderen der beiden Geraden g_1 und g_2 senkrecht steht, g_1 und g_2 in zwei Punkten a_1 und a_1 treffe, welche die Endpunkte eines Durchmessers des betreffenden Kreisschnittes darstellen.

Dieser Eigenschaft dient nachstehende Erzeugungsart als Grundlage.

50. „Bewegt sich eine Ebene derart, dass sie stets zu einer von zwei sich kreuzenden festen Geraden g_1 und g_2 senkrecht bleibt, so erzeugt der in dieser Ebene über der Verbindungsstrecke ihrer Schnittpunkte mit g_1 und g_2 als Durchmesser beschriebene Kreis, ein orthogonales Hyperboloid. Dasselbe Hyperboloid kann in gleicher Weise von Kreisen hervorgebracht werden, welche in Ebenen liegen, die zu der zweiten Geraden senkrecht sind. Die beiden Geraden g_1 und g_2 sind Erzeugende eines und desselben Systems.“

§. 62.

Beachtet man, dass in jedem Hyperboloide einer Erzeugenden des einen Systems eine parallele Erzeugende im anderen Systeme entspricht, so findet man, dass im vorliegenden Falle die Kreisschnitte des einen Systems zu zwei gewissen Erzeugenden verschiedener Systeme g_1 und l_1 senkrecht seien, und dass ebenso die Kreisschnitte der zweiten Schar auf zwei Erzeugenden g_2 und l_2 verschiedener Systeme senkrecht stehen. Es folgt hieraus der Satz:

51. „Das orthogonale Hyperboloid unterscheidet sich von dem allgemeinen windschiefen Hyperboloide dadurch, dass jede Schar seiner Kreisschnittsebenen auf gewissen zwei Erzeugenden verschiedener Systeme senkrecht steht.“

§. 63.

Denken wir uns das orthogonale Hyperboloid durch zwei Ebenenbüschel g_1 und g_2 erzeugt und seien e_1 und e_2; e'_1 und e'_2... Paare entsprechender, d. h. auf einander senkrecht stehender Ebenen dieser Büschel.

Führt man nun durch einen beliebigen Punkt P im Raume Parallele γ_1 und γ_2 zu g_1 und g_2, sowie durch γ_1 und γ_2 parallele Ebenen ε_1 und ε_2; ε'_1 und ε'_2... zu den Ebenen e_1 und e_2; e'_1 und e'_2..., so wird man zwei projectivische Ebenenbüschel mit sich schneidenden Achsen γ_1 und γ_2 erhalten, in welchen ent-

sprechende Ebenen gleichfalls auf einander senkrecht stehen und demgemäß einen sogenannten „orthogonalen Kegel" erzeugen werden.

Selbstverständlich sind die Erzeugenden dieses so entstandenen Kegels wieder parallel zu den Erzeugenden des orthogonalen Hyperboloides $(g_1 g_2)$. Bezeichneter Kegel ist somit ein Richtungskegel des orthogonalen Hyperboloides.

Offenbar hat auch dieser Kegel die Eigenschaft, von Ebenen, welche senkrecht zu γ_1 oder γ_2 sind, nach Kreisen geschnitten zu werden.

Betrachten wir einen derartigen Kegel etwas näher.

Der Einfachheit halber nehmen wir die beiden sich schneidenden Geraden γ_1 und γ_2 (Taf. II, Fig. 14) in der verticalen Projectionsebene an und wählen die horizontale Projectionsebene senkrecht zu γ.

Unter dieser Voraussetzung ist die Schnittcurve des Kegels mit der horizontalen Projectionsebene ein Kreis K', welcher über der Verbindungsgeraden $S'R'$ der horizontalen Durchstoßpunkte S' und R' von γ_1 und γ_2 als Durchmesser beschrieben wird.

Ferner seien g_1 und g_2 zwei gegen die Verticalprojectionsebene symmetrisch liegende Kegelerzeugende, deren Fußpunkte auf dem Kreise durch x'_1 und x'_2 dargestellt sind. Die beiden Erzeugenden g_1, g_2 haben diesfalls eine und dieselbe Verticalprojection.

Denken wir uns nun durch die Erzeugenden g_1 und g_2 und durch zwei andere Erzeugenden g_a, g_b dieses Kegels, deren Fußpunkte auf dem Kreise K' die Punkte a' und b' sein mögen, die Ebenen (g_1, g_a) oder $e^1_h e^1_v$, (g_1, g_b) oder $e^2_h e^2_v$; (g_2, g_a) oder $e^3_v e^3_h$ und (g_2, g_b) oder $e^4_v e^4_h$ gelegt, welche die Grundlinie AZ beziehungsweise in m, n, m_1 und n_1 treffen mögen, so sind (nach dem Satze von Desargues) S', R'; m, m_1; n, n_1 drei conjugierte Punktepaare einer Involution. Infolge dessen bilden auch die Verticaltracen e^1_v, e^4_v; e^2_v, e^3_v mit γ_1 und γ_2 drei conjugierte Strahlenpaare einer Involution.

Denken wir uns weiters zu g (Verticalprojection der beiden durch x_1 und x_2 gehenden Erzeugenden) eine Senkrechte N_v gezogen, so kann diese als die Verticaltrace einer Ebene betrachtet werden, welche einerseits auf der Erzeugenden g_1 senkrecht steht und andererseits als Verticaltrace einer zweiten Ebene angesehen werden, welche zu der Erzeugenden g_2 normal geführt ist. Diese Gerade wird von der vorgenannten Strahleninvolution in drei Paaren conjugierter Punkte σ, ϱ; μ, μ_1; ν, ν_1 einer Punktinvolution geschnitten.

Vermittelst der Geraden N_v wird es nun leicht möglich sein, die wahre Größe jenes Winkels zu ermitteln, welchen die Ebenen

(g_1, g_a) und (g_1, g_b) bilden, als auch jenen Winkel festzustellen, welchen die Ebenen (g_2, g_a) und (g_2, g_b) einschließen.

Berücksichtigen wir, dass die Ebenen (γ_1, g_1) und (γ_2, g_1) auf einander senkrecht stehen (der Kegel ist ein orthogonaler), so kann man den umgelegten Scheitel P_0 des Neigungswinkels des ersten Paares direct construieren. Derselbe liegt nämlich in dem über $\sigma\varrho$ als Durchmesser construierten Kreise $\varkappa$ und wird somit die wahre Größe jenes Neigungswinkels durch $\mu P_0 \nu$ dargestellt.

In gleicher Weise stehen aber auch die Ebenen (γ_1, g_2) und (γ_2, g_2) auf einander senkrecht; es wird daher der umgelegte Scheitel des Neigungswinkels der Ebenen (g_2, g_a) und (g_2, g_b) wieder auf dem Kreise $\varkappa$ liegen. Denken wir uns denselben nach P_0' umgelegt (P_0 und P_0' liegen symmetrisch gegen $\sigma\varrho$), so wird der gesuchte Neigungswinkel in wahrer Größe durch $\mu P_0' \nu$ repräsentiert erscheinen.

Wir finden somit, dass die Schenkel der beiden Neigungswinkel $\mu P_0 \nu$ und $\mu_1 P_0' \nu_1$ infolge der Involution $\mu\nu$, $\mu_1 \nu_1$, $\sigma\varrho$ ein dem Kreise $\varkappa$ eingeschriebenes Vierseit bilden und dass sich demgemäß diese beiden Winkel zu $2R$ ergänzen, oder mit Rücksicht auf ihre Bedeutung als Neigungswinkel obiger Ebenenpaare, einander gleich sind.

Nachdem die Erzeugenden g_a und g_b willkürlich gewählt wurden und von den Erzeugenden g_1, g_2 bloß vorausgesetzt worden ist, dass sie gegen die Ebene (γ_1, γ_2) symmetrisch liegen, so folgt, dass jener Winkel, welchen die Ebenen, die durch eine Erzeugende g_1 eines orthogonalen Kegels und durch zwei andere Erzeugende g_a und g_b gelegt werden, dem Winkel gleich sei, welchen die Ebenen einschließen, die durch die nämlichen Erzeugenden g_a und g_b und die der Erzeugenden g_1 in Bezug auf die Ebene (γ_1, γ_2) symmetrische Erzeugende g_2 gelegt werden, oder mit anderen Worten:

52. „*Ein orthogonaler Kegel kann auf unendlich viele Arten durch zwei congruente Ebenenbüschel erzeugt werden; die Achsen dieser Ebenenbüschel sind Erzeugende, welche symmetrisch gegen die Ebene* (γ_1, γ_2) *liegen.*“

Dieser Satz lässt sich infolge der Parallelität der erzeugenden Ebenenbüschel direct auf das orthogonale Hyperboloid übertragen und wird in diesem Falle lauten:

53. „*Ein orthogonales Hyperboloid kann auf unzählig viele Arten durch zwei projectivisch-congruente Ebenenbüschel erzeugt werden.*“

Oder, wenn die Erzeugungsart desselben berücksichtigt wird:

54. „*Zwei projectivisch-congruente Ebenenbüschel erzeugen immer ein orthogonales Hyperboloid.*“

§. 64.

Sind o_1 und o_2 die unendlich fernen Punkte der Achsen g_1 und g_2 (zweier erzeugenden Ebenenbüschel, deren entsprechende Ebenen auf einander senkrecht stehen) und legt man durch o_1 und g_2 beziehungsweise durch o_2 und g_1 die Ebenen (o_1, g_2) und (o_2, g_1), d. i. Ebenen, welche je durch die eine Achse parallel zu der anderen geführt werden; construiert man ferner durch g_1 und g_2 die zu diesen Ebenen senkrechten Ebenen, so schneiden sich dieselben in dem kürzesten Abstande $(m_1\,m_2)$ der beiden Achsen g_1 und g_2. Die Erzeugenden $o_1 m_2$ und $o_2 m_1$, welche beziehungsweise zu g_1 und g_2 parallel sind, müssen sodann offenbar zwei besondere Erzeugende des orthogonalen Hyperboloides repräsentieren. Selbstverständlich wird der kürzeste Abstand dieser letztgenannten Erzeugenden, die wir kurz l_1 und l_2 nennen wollen, auch gleich $m_1\,m_2$ sein.

Führen wir nun irgend eine Ebene ε rechtwinklig zum Strahle g_1, so ist dieselbe auch rechtwinklig zu l_1.

Besagte Ebene wird das Hyperboloid in einem Kreise, die vier Strahlen g_1, g_2, l_1 und l_2 dagegen in vier Punkten p_1, p_2; q_1, q_2 schneiden.

Da $p_1 p_2$ einen Durchmesser dieses Kreises darstellt, ferner die Ebene (g_1, l_2) der Ebene (l_1, g_2) parallel ist und ε zu beiden Ebenen senkrecht steht, so schneidet ε beide in parallelen Geraden; es sind folglich auch die Sehnen $p_1 q_1$ und $p_2 q_2$ im obigen Kreise parallel, daher also $q_1 q_2$ gleichfalls ein Durchmesser des Kreises.

Wir ersehen hieraus, dass man an Stelle der gegebenen Strahlen g_1 und g_2, welche als Achsen zweier projectivischen Ebenenbüschel, deren entsprechende Ebenen zu einander senkrecht stehen, angenommen wurden, auch die beiden mit jenen Achsen parallelen Erzeugenden l_1 und l_2 des zweiten Systems hätte annehmen können, um in gleicher Weise das orthogonale Hyperboloid zu construieren. Die sich aus der angestellten Betrachtung ergebende Folgerung lautet somit:

55. „*Ein und dasselbe orthogonale Hyperboloid kann auf zwei verschiedene Arten durch je zwei projectivische Ebenenbüschel, deren entsprechende Ebenen zu einander senkrecht sind, erzeugt werden. Die Achsen der beiden Ebenenbüschel sind zwei zu den beiden Kreisschnitten senkrechte Erzeugenden der einen Regelschar, oder die diesen parallelen Erzeugenden der zweiten Schar.*“

IV. Capitel.

Der gleichseitige Kegel.

§. 65.

Bevor wir darauf übergehen, eine zweite besondere Art des windschiefen Hyperboloides zu untersuchen, dürfte es zweckmäßig, ja nothwendig erscheinen, die Eigenschaften eines besonderen Kegels zweiten Grades, welcher mit dem zu besprechenden Hyperboloide in enger Verbindung steht, näher kennen zu lernen.

Jeder beliebige Kegel zweiten Grades kann durch Ebenen verschiedener Stellung, nach gleichseitigen Hyperbeln geschnitten werden.

Denken wir uns nämlich zu dem gegebenen Kegel den reciproken Kegel, d. i. jenen Kegel construiert, dessen Tangentialebenen durch den Scheitel des ersteren gehen und auf den Erzeugenden desselben senkrecht stehen.

Liegt der Reciprokalkegel zum Theile oder ganz in dem Raúme des gegebenen Kegels, so schneidet eine gewisse Partie oder es schneiden beziehungsweise alle seine Tangentialebenen den gegebenen Kegel in reellen Erzeugenden.

Setzen wir voraus, es sei s eine beliebige Erzeugende des gegebenen Kegels zweiten Grades und die derselben entsprechende Tangentialebene des Reciprokalkegels schneide den ersteren in den Erzeugenden r_1 und r_2. Dieser Annahme entsprechend, sind s und r_1, sowie auch s und r_2 zwei auf einander senkrecht stehende Erzeugenden des gegebenen Kegels. Jede, zu einer der Ebene (s, r_1) oder (s, r_2) parallele Ebene, schneidet den Kegel nach einer Kegelschnittslinie, deren Asymptotenrichtungen jene von s und r_1 beziehungsweise von s und r_2 sind und folglich eine gleichseitige Hyperbel sein muss.

Wählt man eine andere Erzeugende s, so werden sich in gleicher Weise auch zwei andere Stellungen von Ebenen ergeben, deren Schnitte mit dem besagten Kegel wieder gleichseitige Hyperbeln sein müssen.

Im allgemeinen wird es keine Ebene des Reciprokalkegels geben, welche den gegebenen Kegel in zwei Erzeugenden r_1 und r_2 schneidet, die selbst wieder auf einander senkrecht stehen. Im Gegentheile ist jener Fall, in welchem ein Kegel drei wechselseitig auf einander senkrecht stehende Erzeugenden besitzt, als „besonderer Fall" hervorzuheben und wird ein Kegel, welchem diese Eigenthümlichkeit zukömmt oder ein Kegel von dieser besonderen Eigenschaft ein „gleichseitiger Kegel" genannt.

§. 66.

Stellen wir uns vor, ein Kegel zweiten Grades besitze drei gegenseitig auf einander senkrecht stehende Erzeugenden Sa, Sa_1, Sa_2.

Jede Ebene, welche auf einer dieser drei Erzeugenden, etwa auf Sa senkrecht steht, ist parallel zu den beiden anderen Sa_1 und Sa_2, schneidet daher den Kegel in einer gleichseitigen Hyperbel H, deren Asymptoten zu Sa_1 und Sa_2 parallel sind.

Die Ebene dieser Hyperbel denken wir uns unmittelbar als Projectionsebene angenommen.

Der Punkt a (Taf. II, Fig. 15), in welchem diese Ebene die Erzeugende Sa schneidet, ist einerseits ein Punkt der gleichseitigen Hyperbel H und andererseits die orthogonale Projection S' des Kegelscheitels. Die orthogonalen Projectionen der beiden anderen Erzeugenden Sa_1 und Sa_2 gehen, der Voraussetzung gemäß, durch S' und sind parallel zu den Asymptoten A_1 und A_2 der gleichseitigen Hyperbel H. Den Abstand des Kegelscheitels S von seiner Projection wollen wir mit h bezeichnen.

Denken wir uns einen beliebigen Punkt x der Hyperbel H mit S' verbunden, so stellt die besagte Gerade xS' die orthogonale Projection irgend einer Kegelerzeugenden dar. Fällen wir weiters durch den Kegelscheitel S eine Ebene e senkrecht auf diese Erzeugende Sx, so wird die Bildflächtrace e_b dieser Ebene als eine Gerade erscheinen, die senkrecht zu der Projection $S'x$ steht. Letztere trifft die e_b in einem Punkte α, für welchen bekanntlich

$$\alpha S' \,.\, S'x = h^2$$

ist. Der Punkt α fällt stets außerhalb der Strecke Sx' und trifft infolge dessen die Trace e_b die Hyperbel immer in zwei reellen Punkten y und z, welche mit S' verbunden, die Projectionen $S'y$ und $S'z$ jener Erzeugenden repräsentieren, in welchen der gleichseitige Kegel (S, H) von der Ebene e geschnitten wird.

Zeichnen wir das Dreieck xyz, so folgt aus einem bekannten Satze der Kegelschnittstheorie, dass der Höhenschnittpunkt dieses Dreieckes stets ein Punkt der gleichseitigen Hyperbel sein müsse. Dieser Höhenschnittpunkt kann aber offenbar, da $S'x$ auf yz senkrecht steht, kein anderer als der Punkt S' selbst sein.

Hieraus folgt aber weiters, dass auch die Verbindungsgerade $S'y$ senkrecht zu xz und die Gerade $S'z$ normal zu xy stehen müsse. Ferner ist auch klar, dass die Erzeugende $S'y$ des Kegels (S, H) einerseits in der zu $S'x$ senkrechten Ebene Syz, andererseits, wegen $S'y$ normal zu xz, in einer auf der Ebene Sxz senkrechten Ebene

(in der durch ihre Projection $S'y$ gehenden bildfläch-projicierenden Ebene) liege. Es wird daher die Erzeugende Sy auch auf dem Schnitte Sz dieser Ebenen Syz und Sxz senkrecht stehen. Infolge dieser Betrachtungen sind somit die Erzeugenden Sy und Sz nicht nur senkrecht zur Erzeugenden Sx, sondern auch senkrecht unter einander.

Da der Punkt x auf der gleichseitigen Hyperbel H willkürlich angenommen wurde, so gelangen wir auf Grund der gemachten Voraussetzungen zu dem Schlusse, dass es in dem gleichseitigen Kegel (S, H) unendlich viele Gruppen von drei wechselseitig auf einander stehenden Erzeugenden gebe, und dass diese die nämlichen Eigenschaften wie die ursprünglichen drei Erzeugenden Sa_1, Sa_2, Sa besitzen.

Es ergeben sich daher die Sätze:

56. *„Besitzt ein Kegel zweiten Grades ein Tripel wechselseitig auf einander senkrecht stehender Erzeugenden, so kommen demselben unendlich viele derartige Tripel zu."*

57. *„Jede Ebene, welche auf einer Erzeugenden eines gleichseitigen Kegels senkrecht steht, schneidet diesen Kegel in einer gleichseitigen Hyperbel und die genannte Erzeugende in einem Punkte, welcher der Höhendurchschnitt aller Dreiecke ist, die von den Schnittpunkten der Hyperbel mit den Tripeln rechtwinkliger Erzeugenden gebildet werden."*

§. 67.

Sind Sx_1, Sy_1, Sz_1 und Sx_2, Sy_2, Sz_2 zwei der vorgenannten Tripel, so kann man durch fünf dieser Strahlen, beispielsweise durch Sx_1, Sy_1, Sz_1, Sx_2 und Sy_2, eine Kegelfläche zweiten Grades legen. Nachdem aber drei dieser Strahlen, etwa Sx_1, Sy_1 und Sz_1 ein rechtwinkliges Tripel bilden, so ist der Kegel nothwendig ein gleichseitiger und muss dieser daher auch den mit den beiden übrigen Kegelerzeugenden Sx_2 und Sy_2 ein Tripel bildenden Strahl Sz_2 enthalten. Hieraus ergibt sich unmittelbar der Satz:

58. *„Zwei Tripel auf einander senkrecht stehender und von einem und demselben Punkte ausgehender Strahlen liegen immer auf einem gleichseitigen Kegel."*

§. 68.

Eine Eigenschaft des gleichseitigen Kegels, welche eine vollkommene Analogie desselben mit der gleichseitigen Hyperbel in der

Geometrie der Ebene erkennen lässt, kann nunmehr leicht, wie folgt, entwickelt werden.

Sind Sx_1, Sx_2 und Sx_3 (Taf. II, Fig. 16) drei beliebige von einem Punkte S im Raume ausgehende und nicht in einerlei Ebene liegende Strahlen, so ist bekannt, dass sich die drei Ebenen, welche durch Sx_1, Sx_2 und Sx_3 beziehungsweise senkrecht zu den Ebenen Sx_2x_3, Sx_3x_1 und Sx_1x_2 gelegt werden, in einer und derselben durch S gehenden Geraden Sh, dem sogenannten Höhenstrahle des Dreikantes $S(x_1 x_2 x_3)$, schneiden, und dass jeder der vier Strahlen Sx_1, Sx_2, Sx_3, Sh als Höhenstrahl des von den drei übrigen gebildeten Dreikantes betrachtet werden kann.

Wählen wir nun als Projectionsebene eine Ebene in solcher Lage, dass sie auf einem der vier Strahlen, etwa auf hS senkrecht stehe, und seien x_1, x_2 und x_3 (Taf. II, Fig. 16) die Durchstoßpunkte der drei übrigen Strahlen; sei ferner S' die Projection des Punktes S, also auch des Strahles hS und sind mithin $S'x_1$, $S'x_2$ und $S'x_3$ die Projectionen der übrigen drei Strahlen, so besteht zwischen den vier Punkten S', x_1, x_2 und x_3 die nachstehende einfache Beziehung.

Da der Strahl Sh projicierend ist, so sind es auch die Ebenen Shx_1, Shx_2 und Shx_3; nachdem ferner, der Voraussetzung gemäß, die Ebenenpaare Shx_1 und Sx_2x_3; Shx_2 und Sx_1x_3; Shx_3 und Sx_1x_3 rechtwinklig sind, so ist $S'x_3$ senkrecht auf x_1x_2; $S'x_2$ senkrecht auf x_3x_1 und $S'x_1$ senkrecht auf x_2x_3, d. h. mit anderen Worten: S' ist der Höhenschnittpunkt des Dreieckes $x_1x_2x_3$.

Durch die vier Punkte S', x_1, x_2, x_3 kann somit ein Büschel von gleichseitigen Hyperbeln gelegt werden, und jede dieser gleichseitigen Hyperbeln wird mit dem Punkte S, da die eine Erzeugende Sh zur Hyperbelebene senkrecht steht, einen gleichseitigen Kegel bestimmen. Sx_1, Sx_2 und Sx_3 sind sodann ebenfalls Erzeugende des Kegels. Hiernach ergeben sich die Sätze:

59 a). „*Der Höhenstrahl des jeweilig von drei beliebigen Erzeugenden eines gleichseitigen Kegels gebildeten Dreikants, ist selbst eine Erzeugende des Kegels*“

oder:

59 b). „*Jeder Kegel zweiten Grades, welcher durch ein beliebiges Dreikant und dessen Höhenstrahl gelegt werden kann, ist ein gleichseitiger Kegel.*“

und:

59 c). „*Sämmtliche gleichseitige Kegel, welche durch ein beliebiges Dreikant gelegt werden, schneiden sich noch in einem vierten festen Strahle, u. zw. dem Höhenstrahle des Dreikants.*“

§. 69.

Die vorstehende Untersuchung führt in ihrem weitern Verlaufe zu einem besonderen Tetraeder, welches mit dem gleichseitigen Kegel in Zusammenhang gebracht werden kann.

Ein solches Tetraeder wird erhalten, wenn ein beliebiges Dreikant *d* (*abc*) (Taf. II, Fig. 17) durch eine Ebene, welche zum Höhenstrahle *dh* desselben senkrecht steht, nach dem Dreiecke *abc* geschnitten wird. Der Punkt *h*, in welchem besagte Ebene den Höhenstrahl *dh* trifft, ist, wie aus dem Vorhergegangenen klar geworden, der Höhenpunkt des Dreiekes *abc*.

Da die Ebene *dah* sowohl senkrecht auf der Ebene *dbc*, als auch senkrecht auf der Ebene *abc* steht, so ist sie auch normal zu der Schnittgeraden *bc* dieser Ebenen. Selbstverständlich ist somit *bc* auch senkrecht zu jeder in der Ebene *dah* liegenden Geraden, insbesondere also auch senkrecht zu *da*, d. h. die beiden Gegenkanten *bc* und *da* des Tetraeders *abcd* sind zu einander rechtwinklig. Die gleiche Betrachtung fortgesetzt, lehrt, dass in übereinstimmender Weise auch die beiden anderen Paare von Gegenkanten, d. i. *ab* und *dc*; *ac* und *db* zu einander rechtwinklig sind. Es gilt daher der Satz:

60. „Sind bei einem Tetraeder zwei Paare von Gegenkanten rechtwinklig, so gilt das Gleiche auch bezüglich des dritten Paares.“

§. 70.

Die Ebene *dah* (Taf. II, Fig. 17) schneidet die zu ihr senkrechte Ebene *dbc* in einer Geraden da_1, welche normal zu *bc* steht.

Fällt man von *a* ein Perpendikel auf die Ebene *dbc*, so muss der Fußpunkt α desselben in der Geraden da_1 liegen. Ferner treffen sich die beiden Tetraederhöhen *dh* und $a\alpha$ in einem Punkte *e*, welcher der Höhenschnitt des Dreieckes daa_1 ist. Die Gerade a_1ea_2 muss daher gleichfalls senkrecht auf *da* stehen. Besagte Gerade a_1ea_2 ist aber auch senkrecht zu *bc*, da sie in der zu *bc* senkrechten Ebene *dah* liegt; dieselbe repräsentiert demgemäß den kürzesten Abstand der Gegenkanten *da* und *bc*.

In gleicher Weise wird gezeigt, dass auch die Tetraederhöhen aus den Punkten *b* und *c* die Tetraederhöhe *dh* schneiden müssen, und dass durch die betreffenden Schnittpunkte auch die kürzesten Abstände der Gegenkanten *db* und *ac* beziehungsweise der Gegenkanten *ab* und *dc* gehen müssen.

Berücksichtigen wir aber, dass die Ebene (a_1a_2, *bc*) auf der Geraden *da*, mithin auf den Ebenen *dab* und *dac* senkrecht steht,

so ist es einleuchtend, dass diese Ebene auch die Tetraederhöhen aus den Punkten b und c enthalten müsse. Nachdem aber diese Höhen die Höhe dh treffen, so können besagte Höhen nur diejenigen Geraden sein, welche sich als die Verbindungslinien der Punkte b und c mit dem Punkte e, in welchem die Ebene $(a_1 a_2, b\, c)$ die Höhe dh schneidet, ergeben. Hieraus folgen die Sätze:

61. „*Ist ein Tetraeder so beschaffen, dass zwei Paare von Gegenkanten und mithin auch das dritte Paar rechtwinklig sind, so besitzt dasselbe nachstehende Eigenschaften:*

a) Die Tetraederhöhen schneiden sich sämmtlich in einem Punkte, durch welchen auch die drei Geraden gehen, welche die kürzesten Abstände der drei Paare von Gegenkanten enthalten.

b) Die Fußpunkte der Höhen auf den gegenüberliegenden Seitenflächen sind die Höhenpunkte der in den letzteren liegenden Dreiecke.

c) Die fünf Punkte a, b, c, d und e liegen derart im Raume, dass jeder von ihnen der Höhenschnittpunkt des von den vier anderen gebildeten Tetraeders ist.

d) Die vier Höhen des Tetraeders liegen so, dass jede derselben den Höhenstrahl des von den anderen gebildeten Dreikants vorstellt. Die vier Höhen liegen somit immer auf einem gleichseitigen Kegel."

Da endlich in einem jeden Dreiecke die Rechtecke, welche über den Höhenabschnitten als Seiten gebildet werden, den gleichen Inhalt haben, so ergibt sich als directe Folgerung:

e) Die vier Höhen des Tetraeders und die drei kürzesten Abstände der Gegenkanten werden von dem Höhenpunkte des Tetraeders in je zwei Theile so getheilt, dass die Rechtecke über diesen Abschnitten als Seiten sämmtlich den nämlichen Inhalt besitzen."

V. Capitel.

Das gleichseitige Hyperboloid.

§. 71.

Ein windschiefes Hyperboloid, dessen Asymptotenkegel ein gleichseitiger Kegel ist, heißt ein „gleichseitiges Hyperboloid".

Es bedarf diesfalls wohl keiner besonderen Auseinandersetzung, um den Nachweis zu erbringen, dass dessen charakteristische Eigen-

schaften der Wesenheit nach zum größten Theile mit jenen des zugehörigen Kegels übereinstimmen, und daher direct aus diesem hergeleitet werden können.

Da die Erzeugenden des Asymptotenkegels zu jenen des Hyperboloides parallel sind, so folgt unmittelbar aus Satz 56) der folgende:

62. „Sind drei Erzeugende eines Hyperboloides, welche einer Regelschar angehören, wechselseitig auf einander senkrecht, so gibt es in der einen wie in der anderen Regelschar unendlich viele derartige Tripel rechtwinkliger Erzeugenden. Das Hyperboloid ist somit ein gleichseitiges.“

Mit Rücksicht auf den Satz 33), dass eine Ebene den Asymptotenkegel und das Hyperboloid in ähnlichen Kegelschnitten schneidet, und andererseits mit Beachtung des Satzes 57), dass jede Ebene, welche auf einer Erzeugenden eines gleichseitigen Kegels senkrecht steht, denselben in einer gleichseitigen Hyperbel schneidet, ergibt sich der Satz:

63. „Schneidet eine Ebene, welche zu einer Erzeugenden eines Hyperboloides senkrecht ist, dasselbe in einer gleichseitigen Hyperbel, so schneidet überhaupt jede Ebene, welche zu einer Erzeugenden senkrecht steht, das Hyperboloid in einer gleichseitigen Hyperbel.“

§. 72.

Setzen wir nun voraus, es seien g_1, g_2 und g_3 (Taf. III, Fig. 18) drei zu derselben Regelschar gehörende, wechselseitig auf einander senkrecht stehende Erzeugenden eines gleichseitigen Hyperboloides; seien ferner l_1, l_2 und l_3 die ihnen beziehungsweise parallelen Erzeugenden der zweiten Regelschar.

Die genannten sechs Geraden bilden ein windschiefes rechtwinkliges Sechsseit *abcdefa*, welches zu einem rechtwinkligen Parallelepiped ergänzt werden kann, dessen Mittelpunkt M gleichzeitig der Mittelpunkt des Hyperpoloides ist.

Diesem Sechsseit oder beziehungsweise Parallelepiped lässt sich eine Kugel K umschreiben, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte M des Hyperboloides zusammenfällt.

Denken wir uns ferner ein zweites windschiefes rechtwinkliges Sechsseit $a_1\, b_1\, c_1\, d_1\, e_1\, f_1\, a_1$ des Hyperboloides, welches von den betreffenden Erzeugenden g_1', g_2', g_3', und l_1', l_2', l_3' in derselben Weise wie das vorherige gebildet wird.

Diesem zweiten Sechsseit lässt sich wieder eine Kugel K_1 umschreiben, welcher gleichfalls der Mittelpunkt M des Hyperboloides als Centrum zukömmt.

Betrachten wir die Geraden g_1, g_2, l_1' und l_2'. Diese bestimmen in ihren Schnittpunkten w, x, y, z Ecken eines Tetraeders, von welchem die vorgenannten Geraden zwei Paare von Gegenkanten repräsentieren. Der gemachten Voraussetzung nach sind aber diese Gegenkanten auf einander wechselseitig senkrecht, daher das Tetraeder ein solches ist, von welchem die Sätze 60) und 61) gelten.

Nachdem die Gerade l_3 auf g_1 und g_2 senkrecht steht, so bestimmt dieselbe den kürzesten Abstand bc dieser Geraden und enthält folglich auch den Höhenpunkt p des Tetraeders $wxyz$.

Desgleichen repräsentiert die Gerade g_3' oder $e_1 f_1$ den kürzesten Abstand von l_1' und l_2', enthält mithin (nach Satz 61 a) ebenfalls den Höhepunkt des Tetraeders $wxyz$; es wird sonach der Schnittpunkt p von g_3' und l_3 jenen Höhenpunkt darstellen. Nach Satz 61 e) ist aber:

$$pb . pc = pe_1 . pf_1 = \varkappa^2.$$

Nachdem aber die Punkte b und c der Kugel K, jene e_1 und f_1 dagegen der Kugel K_1 angehören, so sagt dieses Ergebnis nichts anderes aus, als: die beiden concentrischen Kugeln K und K_1 haben für den Punkt p die gleiche Potenz $\varkappa^2$. Letzteres ist aber, wie wir wissen, nur dann möglich, wenn beide Kugeln K und K_1 in eine zusammenfallen. Nachdem aber die beiden Sechsseite auf dem Hyperboloide beliebig gewählt wurden, so folgt der Satz:

64. „Die Eckpunkte sämmtlicher auf einem gleichseitigen Hyperboloide liegenden rechtwinkligen windschiefen Sechsseite befinden sich auf einer gewissen mit dem Hyperboloide concentrischen Kugel.“

Auf dieser Kugel liegen aber auch diejenigen Punkte, welche die sämmtlichen Sechsseite zu rechtwinkligen Parallelepipeden ergänzen.

Untersuchen wir nun, was die bezeichneten Punkte für eine Bedeutung haben.

Das Sechsseit $abcdefa$ wird durch die beiden Punkte m und n zum Parallelopiped ergänzt; m ist der Schnittpunkt dreier zu einander rechtwinkliger Berührungsebenen (g_1, l_3), (g_2, l_1) und (g_3, l_2) des Hyperboloides, ebenso ist der Punkt n der Durchschnitt der rechtwinkligen Berührungsebenen (g_1, l_2), (g_2, l_3) und (g_3, l_1). Das Gleiche gilt von den Punktepaaren, welche die übrigen Sechsseite zu Parallelepipeden ergänzen. Es gilt daher der Satz:

65. „Die Kugel, welche die Eckpunkte aller windschiefen rechtwinkligen Sechsseite des gleichseitigen Hyperboloides enthält, enthält auch die Durchschnittspunkte je dreier auf einander senkrecht stehender Berührungsebenen des gleichseitigen Hyperboloides.“

§. 73.

Sei $abcd$ ein beliebiges Tetraeder; seien ferner h_a, h_b, h_c und h_d (Taf. III, Fig. 19) die vier Höhen desselben, d. h. die Normalen von den vier Punkten a, b, c und d auf die bezüglichen Gegenseiten. Die Ebenen dieser Gegenseiten bcd, cda, dab, abc wollen wir kurz α, β, γ, δ nennen. Die Fußpunkte der Höhen auf den obgenannten Ebenen seien a_1, b_1, c_1 und d_1.

Die Ebenen (abb_1) und (acc_1) schneiden sich in einer Geraden l_a, welche durch den Punkt a geht, also die Höhe h_a trifft. Die nämliche Gerade wird aber auch, weil sie in den beiden Ebenen (abb_1) und (acc_1), welche die Höhen h_b und h_c enthalten, liegt, die letztgenannten Höhen h_b und h_c treffen. Es lässt sich aber nachweisen, dass die Gerade l_a auch der vierten Höhe h_d begegnen müsse. Die Ebene (abb_1) enthält nämlich die Höhe h_b, ist daher senkrecht zur Seitenebene β; ebenso ist die Ebene (acc_1) senkrecht zur Seitenebene γ. Die Schnittgerade l_a der beiden Ebenen (abb_1) und (acc_1) ist daher der Höhenstrahl des Dreikantes $a(bcd)$, welcher sich bekanntlich auch in der durch ad senkrecht zur Ebene δ gelegten Ebene add_1 vorfindet. Letztere Ebene enthält aber auch die Höhe h_d; es wird dieselbe demgemäß von l_a in einem Punkte getroffen werden müssen.

Ebenso kann man noch drei weitere, beziehungsweise durch b, c und d gehende Geraden l_b, l_c und l_d finden, deren jede die vier Tetraederhöhen schneidet.

Werden aber vier sich kreuzende Geraden von mehr als zwei Geraden geschnitten, so werden diese überhaupt von unendlich vielen Geraden getroffen und gehören dieselben, wie bereits bekannt, einem Hyperboloide an. Diese Ergebnisse zusammengesetzt, liefern den Satz:

66. „Die vier Höhen eines allgemeinen Tetraeders sind stets Erzeugende desselben Systems eines windschiefen Hyperboloides. Dieselben besitzen also eine hyperboloidische Lage.“

§. 74.

Legt man durch die Höhe h_b eine Ebene ε parallel zur Höhe h_a, so steht diese sowohl senkrecht auf der Seitenebene β, als auch auf der Seitenebene α, hiermit also senkrecht zum gegenseitigen Schnitte (α, β), oder senkrecht zur Tetraederkante cd. Die Trace besagter Ebene auf der Ebene α ist daher die durch b gehende Höhe des Dreieckes bcd.

Führt man ferner durch die Höhe h_c eine Ebene e_1 parallel zur Höhe h_a, so wird deren Trace auf der Ebene α, wie auf die vorher besprochene Art nachgewiesen werden kann, die durch c gehende Höhe des Dreieckes bcd sein. Die beiden Ebenen e und e_1 schneiden sich mithin in einer Geraden, welche durch den Höhenpunkt des Dreieckes bcd geht und zur Ebene desselben senkrecht steht, daher nichts anderes als die zur Höhe h_a parallele Erzeugende des zweiten Systems des Hyperboloides $(h_a h_b h_c h_d)$ darstellt. Hiernach ergibt sich der Satz:

67. „*Errichtet man in den Höhenpunkten der Seitendreiecke eines allgemeinen Tetraeders Senkrechte zu den Ebenen dieser Dreiecke, so repräsentieren dieselben die zu den Tetraederhöhen parallelen Erzeugenden der zweiten Regelschar in jenem Hyperboloide, welches durch diese Höhen bestimmt ist.*"

§. 75.

Betrachten wir den Schnitt des Hyperboloides mit der Seitenebene α. Die Schnittcurve wird durch die drei Punkte b, c und d, (weil diese den Erzeugenden h_b, h_c und h_d angehören), sowie auch durch den Höhenschnitt des Dreieckes bcd gehen, nachdem dieser einer Erzeugenden des zweiten Systems angehört. Besagte Schnittcurve muss daher eine gleichseitige Hyperbel sein. Berücksichtigt man aber weiters, dass die Ebene α zu einer Erzeugenden h_a senkrecht ist, so folgt, dass auch das Hyperboloid ein gleichseitiges sei. Es gilt somit der Satz:

68. „*Die vier Höhen eines allgemeinen Tetraeders sind Erzeugende derselben Regelschar eines gleichseitigen Hyperboloides, und die in den Höhenpunkten der Seitenfläche auf die letztere errichteten Normalen sind die zu den ersteren parallelen Erzeugenden der zweiten Regelschar.*"

§. 76.

Da ein windschiefes Hyperboloid durch drei Leitgeraden festgestellt ist, so folgt, dass im vorliegenden Falle drei Höhen eines allgemeinen Tetraeders stets ein gleichseitiges Hyperboloid bestimmen werden.

Man kann aber ebenso leicht zeigen, dass auch umgekehrt drei Erzeugenden derselben Schar eines gleichseitigen Hyperboloides, stets als drei Höhen eines Tetraeders aufgefasst werden können.

Sind nämlich h_a, h_b, h_c drei Erzeugenden eines Systems des gleichseitigen Hyperboloides, und schneiden wir dasselbe durch eine

zu h_a senkrechte Ebene α, so ist die Schnittcurve eine gleichseitige Hyperbel.

Nennen wir den Punkt, in welchem die zu h_a parallele Erzeugende des anderen Systems die Ebene α schneidet, a_1, so muss (nach Satz 68) der letztgenannte Punkt a_1 der Höhenpunkt des in der Ebene α liegenden Tetraederdreieckes bcd sein. Zwei Eckpunkte b und c, d. s. die Schnittpunkte von α mit den Erzeugenden h_b und h_c desselben, sind somit bekannt, und wird folglich der dritte Eckpunkt d anstandslos bestimmt werden können.

Um das Tetraeder zu construieren, hat man nunmehr behufs Bestimmung der Seitenebene β, bloß durch ac eine senkrechte Ebene zur Höhe h_b, und durch ad behufs Bestimmung der Seitenebene γ, eine zur Höhe h_c senkrechte Ebene zu legen. Der Höhenstrahl des von den Ebenen α, β, γ gebildeten Dreikantes ist sodann die vierte Höhe h_d, während die ihr entsprechende Seitenebene des Tetraeders jene durch bc senkrecht zu h_d gelegte Ebene δ sein wird. Daher der Satz:

69. „Drei beliebige Erzeugenden derselben Regelschar eines gleichseitigen Hyperboloides können stets als drei Höhen eines Tetraeders betrachtet werden.“

§. 77.

Das Tetraeder selbst ist jedoch, wie aus den bisherigen diesbezüglichen Erörterungen hervorgeht, durch die vorher bezeichneten Bestimmungsstücke noch nicht unzweideutig festgestellt, da die Seitenebene α wohl zur Höhe h_a senkrecht gelegt, sonst aber ganz beliebig angenommen wurde.

Es kann somit die Frage aufgeworfen werden, wann oder unter welchen Bedingungen sind drei sich kreuzende Geraden, Erzeugende eines gleichseitigen Hyperboloides, oder, was dasselbe ist, wann stellen drei sich nicht schneidende Geraden die Höhen eines Tetraeders dar.

Nehmen wir zum Zwecke des zu liefernden Nachweises zwei sich kreuzende Geraden h_b und h_c an; a sei irgend ein beliebiger Punkt im Raume.

Der letztgenannte Punkt a kann jederzeit als Eckpunkt eines Tetraeders betrachtet werden, dessen Höhen h_b und h_c sind. Die Seitenebenen β und γ ergeben sich unmittelbar als jene Ebenen, welche durch a senkrecht zu h_b und h_c geführt werden können. Diese beiden Ebenen schneiden sich in der Kante ad, deren zweiter Eckpunkt d jedoch bisher nicht bekannt ist.

Die Ebene β enthält das Tetraederdreieck acd; es ergibt sich daher der Punkt c als Schnittpunkt der Ebene β mit der Geraden h_c. Ebenso findet man den Punkt b als Schnitt der Ebene γ mit der Geraden h_b. Hierdurch ist aber bereits das Dreieck abc, also auch die Ebene δ bestimmt. Die Höhe h_d muss die bereits oben ermittelte Tetraederkante ad treffen.

Die Tetraederebene α geht durch die feste Gerade bc, und da die Höhe h_a auf ihr senkrecht stehen muss, so wird sie nothwendig in der durch a senkrecht zu bc gelegten Ebene liegen, kann aber in dieser willkürlich durch den Punkt a gezogen werden.

Die Gerade ad wird nun von der durch bc senkrecht zu h_a gelegten Tetraederebene α in d geschnitten, womit die vierte Ecke, also auch die vierte Höhe des Tetraeders festgestellt erscheint.

Hieraus folgt der Satz:

70. „Sind zwei sich nicht schneidende Geraden h_b und h_c als Höhen eines Tetraeders gegeben, und ist von einer dritten Höhe h_a bloß der dem Tetraeder angehörige Eckpunkt bekannt, so ist diese Höhe h_a auf jene Ebene beschränkt, welche durch a zu der Geraden bc normal gelegt wird. Hierbei bedeuten b und c die Schnittpunkte der Höhen h_b und h_c mit den Ebenen γ und β, welche durch a beziehungsweise senkrecht zu h_c und h_b gelegt werden."

§. 78.

Es unterliegt nunmehr auch keiner besonderen Schwierigkeit, den Mittelpunkt des gleichseitigen Hyperboloides zu finden, welches die vier Höhen eines Tetraeders als Erzeugende einer Regelschar enthält.

Den bezeichneten Mittelpunkt findet man mit Zuhilfenahme der zu den letzterwähnten Erzeugenden parallelen Erzeugenden des zweiten Systems.

Sei $abcd$ (Taf. III, Fig. 20) das gegebene Tetraeder, aa' die dem Punkte a entsprechende Höhe, also eine Erzeugende des gleichseitigen Hyperboloides. Die zu aa' parallele Erzeugende des zweiten Systems ist, wie bereits nachgewiesen wurde, jene Gerade, welche durch den Höhenpunkt α_1 des Dreieckes bcd auf die Ebene des letzteren senkrecht geführt wird.

Weiter ist bekannt, dass sich der Mittelpunkt M eines Hyperboloides, von welchem zwei zu einander parallele Erzeugenden bekannt sind, auf jener Geraden vorfindet, welche in der Ebene dieser Erzeugenden liegt und den Abstand derselben halbiert.

Im vorliegenden Falle wird besagte Gerade offenbar erhalten, wenn man durch den Mittelpunkt α_2 der Strecke $a\alpha_1$ eine Senkrechte zur Ebene bcd führt.

Diese Gerade hat eine besondere Eigenschaft. Denken wir uns nämlich durch α_2 eine Ebene parallel zu bcd gelegt, so schneidet diese das Dreikant $a(bcd)$ in einem Dreiecke $m_1 m_2 m_3$, welches bekanntlich dem Dreiecke bcd ähnlich und ähnlich gelegen ist. Der Höhenpunkt desselben wird mithin der Punkt α_2 sein. Da α_2 der Mittelpunkt der Strecke $a\alpha_1$ ist, so sind die Punkte m_1, m_2 und m_3 die Mittelpunkte der Kanten ab, ac und ad.

In ähnlicher Weise könnte man von den drei übrigen Seitenebenen ausgehen und würde in voller Übereinstimmung mit Obigem drei andere Geraden finden, welche ebenfalls den Mittelpunkt des Hyperboloides enthalten.

Halbiert man die sämmtlichen Kanten des Tetraeders durch die Punkte $m_1 \ldots m_6$, und legt durch die Punkte $m_1 m_2 m_3$, $m_1 m_4 m_6$ $m_2 m_4 m_5$ und $m_3 m_5 m_6$ Ebenen, so werden diese ein Tedraeder $a'b'c'd'$ bestimmen, welches mit dem ursprünglichen $abcd$ congruent ist. Die Punkte $m_1 \ldots m_6$ werden gleichfalls die Halbierungspunkte der Kanten desselben darstellen und die Kanten des Tetraeders $a'b'c'd'$ werden zu jenen von $abcd$ parallel laufen. Endlich schneidet jede Kante des Tetraeders $a'b'c'd'$ die zu ihrer Gegenkante parallele Kante des zweiten Tetraeders $abcd$.

Errichtet man andererseits in den Höhenpunkten α_2, β_2, γ_2, δ_2 der in den Ebenen des Tetraeders $a'b'c'd'$ liegenden Dreiecken $m_1 m_2 m_3$; $m_1 m_4 m_6$; $m_2 m_4 m_5$ und $m_3 m_5 m_6$ Senkrechte zu diesen Ebenen, so schneiden sich diese, der früheren Betrachtung gemäß, in einem und demselben Punkte M, dem Mittelpunkte des gleichseitigen Hyperboloides.

Der Punkt M ist aber gleichzeitig der Mittelpunkt der dem Tetraeder $a'b'c'd'$ umschriebenen Kugel. Denn der Höhenpunkt α_2 des Dreieckes $m_1 m_2 m_3$ ist, wie man sich leicht überzeugt, zugleich der Mittelpunkt des dem Dreiecke $b'c'd'$ umschriebenen Kreises und die Senkrechte in α_2 auf die Ebene des Dreieckes $b'c'd'$ enthält sodann nothwendig auch den Mittelpunkt der durch $a'b'c'd'$ gehenden Kugelfläche.

Berücksichtigt man weiters, dass der Mittelpunkt der dem Tetraeder $a'b'c'd'$ umschriebenen Kugel als Schnitt jener Ebenen, welche durch die Mittelpunkte $m_1 \ldots m_6$ der Kanten des Tetraeders $a'b'c'd'$ senkrecht zu den betreffenden Kanten geführt werden, erhalten wird

und dass diese Ebenen auch senkrecht stehen auf den den Punkten $m_1 \ldots m_6$ gegenüber liegenden Kanten des ursprünglichen Tetraeders, so findet man den Satz:

71. „*Die Ebenen, welche durch die Mittelpunkte der Kanten eines Tetraeders normal zu den betreffenden Gegenkanten gelegt werden, schneiden sich in einem und demselben Punkte, dem Mittelpunkte des gleichseitigen Hyperboloides, welches durch die Tetraederhöhen bestimmt ist.*“

§. 79.

Die beiden Tetraeder $abcd$ und $a'b'c'd'$ sind centrisch symmetrisch in Bezug auf einen Punkt S, in welchem sich die Geraden aa' bb', cc', dd' schneiden. Durch diesen Punkt gehen aber offenbar auch die Geraden $m_1 m_5$, $m_2 m_6$ und $m_3 m_4$, d. i. die Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der Gegenkanten des Tetraeders $abcd$ sowohl, als auch der des Tetraeders $a'b'c'd'$. Dieser Punkt S ist sonach für beide Tetraeder der „Schwerpunkt“.

Die Mittelpunkte M und M' der den beiden Tetraedern $a'b'c'd'$ und $abcd$ umschriebenen Kugeln sind in Bezug auf S symmetrisch und nachdem M, als Mittelpunkt des gleichseitigen Hyperboloides erkannt wurde, folgt der Satz:

72. „*In einem beliebigen Tetraeder liegen der Mittelpunkt der umschriebenen Kugeln, der Mittelpunkt des durch die Höhen bestimmten gleichseitigen Hyperboloides und der Schwerpunkt des Tetraeders auf einer und derselben Geraden. Letzterer halbiert die Strecke zwischen den beiden ersteren.*“

VI. Capitel.

Das hyperbolische Paraboloid.

§. 80.

Das windschiefe Hyperboloid definierten wir, als Ort jener Geraden, welche in jeder Lage drei sich nicht schneidende, feste Geraden, die „Leitlinien des Hyperboloides“ treffen.

Setzen wir voraus, dass die eine der Leitgeraden in unendliche Entfernung fällt, d. h. unterwerfen wir die erzeugende Gerade der Bedingung, dass sie in all ihren Lagen zwei sich kreuzende Leitgeraden schneidet und zu einer Ebene (deren unendlich ferne Gerade eben die dritte Leitgerade repräsentiert), stets parallel bleibt,

so artet das Hyperboloid in eine Fläche aus, welche den Namen „hyperbolisches Paraboloid“ oder „windschiefes Paraboloid“ führt.

Die feste Ebene, welche die dritte im Unendlichen liegende Leitgerade vertritt, wird eine „Richtungsebene“ oder „Richtebene“ des Paraboloides genannt.

Die beiden im Endlichen liegenden Leitgeraden g_1 und g_2 werden von Ebenen e_1, e_2..., welche zur Richtebene R parallel sind, also dem durch die unendlich ferne Leitgerade g_u als Achse bestimmten Parallelebenenbüschel angehören, in Punktreihen $a_1 a_2$... und $b_1 b_2$... geschnitten, welche, da sie zu dem genannten Parallelebenenbüschel perspectivisch sind, unter einander projectivisch sein müssen.

Die Verbindungslinien entsprechender Punkte a_1 und b_1, a_2 und b_2,... sind, nachdem dieselben parallel zu R sind, Erzeugende des Paraboloides.

Berücksichtigt man aber, dass die Verbindungslinie der unendlich fernen Punkte der Leitgeraden g_1 und g_2, als eine Gerade in der unendlich fernen Ebene, auch die Gerade g_u treffen muss und mithin eine Erzeugende l_u des Paraboloides darstellt, so erkennt man, dass sich die unendlich fernen Punkte von g_1 und g_2 in den beiden projectivischen Punktreihen entsprechen, dass also diese Reihen insbesondere ähnlich sind. Es folgt demnach der Satz:

73 a. „Die Erzeugenden eines hyperbolischen Paraboloides bestimmen auf den beiden Leitgeraden zwei ähnliche Punktreihen.“

§. 81.

Es kann nun ebenso die umgekehrte Frage aufgeworfen werden, ob nicht überhaupt die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier ähnlichen Reihen auf zwei sich nicht schneidenden Trägern, Erzeugende eines Paraboloides sind.

Zwei ähnliche Punktreihen sind, wie wir bereits wissen, durch zwei Paare entsprechender Punkte a_1 und α_1; a_2 und α_2 vollkommen bestimmt, indem die unendlich fernen Punkte der Träger g_1 und g_2 ebenfalls ein Paar entsprechender Punkte repräsentieren.

Denken wir uns nun durch die Verbindungsgerade $a_1 \alpha_1$ oder l_1 eine Ebene e_1 parallel zur Verbindungsgeraden $a_2 \alpha_2$ oder l_2 gelegt und ebenso durch l_2 eine Ebene e_2 parallel zu l_1 geführt. Diese Ebenen sind selbstverständlich unter einander parallel, schneiden sich demgemäß in einer unendlich fernen Geraden g_u.

Betrachten wir g_1, g_2 und g_u als die Leitgeraden für ein Paraboloid, so bestimmen (nach dem vorhergehenden Satze) die Erzeugenden l... des Paraboloides auf g_1 und g_2 zwei ähnliche Punktreihen. Nachdem aber, der Construction gemäß, die Punkte a_1 und α_1; a_2 und α_2 entsprechende Punkte dieser Reihen sind, so folgt, dass diese Reihen mit den ursprünglich auf g_1 und g_2 gegebenen ähnlichen Punktreihen identisch sind.

Es ergibt sich demzufolge der Satz:

73b. „Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier ähnlicher Punktreihen auf sich kreuzenden Trägern sind zu einer und derselben Ebene parallel und daher Erzeugende eines hyperbolischen Paraboloides."

§. 82.

Sind auf zwei sich kreuzenden Trägern g_1 und g_2 zwei ähnliche Punktreihen $a_1b_1c_1$... und $a_2b_2c_2$... gegeben, so kann das Paraboloid, dessen Erzeugenden die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte dieser Reihen sind, auch folgendermaßen erzeugt werden.

Denken wir uns die Reihe $a_1b_1c_1$... auf g_1 durch ein Ebenenbüschel $g_2(a_1b_1c_1...)$, dessen Achse die Gerade g_2 ist und ebenso die Punktreihe $a_2b_2c_2$... durch ein Ebenenbüschel $g_1(a_2b_2c_2...)$, dessen Achse die Gerade g_1 ist, projiciert.

Diese beiden Ebenenbüschel sind projectivisch, indem sie zwei ähnliche Punktreihen projicieren; besitzen aber eine besondere Lage.

Die beiden unendlich fernen Punkte u_1 und u_2 von g_1 und g_2 entsprechen einander; es sind daher auch die beiden Ebenen (g_2, u_1) und (g_1, u_2) entsprechende Ebenen der Büschel g_2 und g_1. Beide Ebenen enthalten aber die unendlich ferne Gerade u_1u_2 und sind somit parallel.

Weiters ist unschwer einzusehen, dass je zwei entsprechende Ebenen, wie beispielsweise die Ebenen (g_1, a_2) und (g_2, a_1), sich in einer Erzeugenden des Paraboloides schneiden. Denn jede dieser Ebenen enthält die beiden Punkte a_1 und a_2 und demgemäß auch die Verbindungsgerade derselben. Wir erhalten somit den Satz:

74. „Zwei projectivische Ebenenbüschel mit sich nicht schneidenden Achsen erzeugen ein hyperbolisches Paraboloid, sobald sie ein Paar paralleler entsprechender Ebenen besitzen."

§. 83.

Berücksichtigt man, dass eine beliebige Gerade h von den beiden projectivischen Ebenenbüscheln g_1 und g_2 in zwei projectivischen

Punktreihen geschnitten wird, und dass diese letzteren zwei Doppelpunkte besitzen, so ist auch klar, dass, da es hiermit auf einer beliebigen Geraden zwei Punkte (reell oder imaginär) gibt, durch deren jeden zwei entsprechende Ebenen der erzeugenden Ebenenbüschel, also eine Erzeugende des Paraboloides geht, auch der nachstehende Satz seine Geltung habe.

75. „Das hyperbolische Paraboloid wird von einer beliebigen Geraden in zwei (reellen oder imaginären) Punkten geschnitten; dasselbe ist also eine Fläche zweiten Grades."

§. 84.

Da das hyperbolische Paraboloid durch projectivische Ebenenbüschel erzeugt werden kann, so lässt sich in derselben Weise, wie beim windschiefen Hyperboloid nachweisen, dass obbesagte Fläche zwei Systeme von Erzeugenden solcher Beschaffenheit besitze, dass jede Erzeugende des einen Systems von jeder Erzeugenden des anderen Systems geschnitten werde, dass hingegen zwei Erzeugende, die demselben Systeme angehören, niemals zum Schnitte gelangen.

Selbstverständlich gibt es auch in der unendlich fernen Ebene, wie oben bereits gezeigt wurde, gleichfalls zwei Erzeugenden g_u und l_u, welche verschiedenen Systemen angehören. Sämmtliche Erzeugenden l treffen die Erzeugende g_u des anderen Systems, und sämmtliche Erzeugende g begegnen der Erzeugenden l_u der zweiten Schar. Es werden somit alle Erzeugenden g zu den Ebenen, deren Stellung l_u ist, und ebenso sämmtliche Erzeugenden l zu den Ebenen, deren Stellung g_u ist, parallel sein. Demnach gilt folgerichtig der Satz:

76. „Das hyperbolische Paraboloid besitzt zwei Systeme geradliniger Erzeugenden; die Erzeugenden jedes der beiden Systeme sind zu einer bestimmten Ebene, der Richtebene des Systems, parallel."

Nachdem parallele Ebenen alle Geraden, welche diese schneiden, in Abschnitte von gleichen Verhältnissen theilen, oder mit anderen Worten, auf allen Geraden, welche zu den Ebenen nicht parallel sind, ähnliche Punktreihen bestimmen, so ergibt sich unmittelbar aus dem vorstehenden Satze der folgende:

77. „Die Erzeugenden des einen Systems werden von jenen des anderen Systems in ähnlichen Punktreihen geschnitten."

§. 85.

Jede Ebene, welche durch eine Erzeugende des einen Systems geht, wird das windschiefe Paraboloid noch in einer zweiten Erzeu-

genden, die jedoch dem anderen Systeme angehören muss, schneiden. Eine solche Ebene berührt das Paraboloid in dem Schnittpunkte der beiden Erzeugenden, die sie enthält.

Die asymptotischen Ebenen, d. h. jene Ebenen, welche das hyperbolische Paraboloid in den unendlich fernen Punkten seiner Erzeugenden berühren, sind, wie ohne jedwelche Schwierigkeit dargethan werden kann, die Ebenen der Parallelbüschel mit den Achsen g_u und l_u. Die asymptotische Ebene einer beliebigen Erzeugenden g_a ist nämlich jene, welche durch die genannte Erzeugende geht, und die Erzeugende des anderen Systems, d. i. die Gerade l_a, welche durch den unendlich fernen Punkt u_a geführt werden kann, enthält. Mithin besteht der Satz:

78. „*Bei einem hyperbolischen Paraboloide artet der Asymptotenkegel in zwei Parallelebenenbüschel aus, deren Achsen die unendlich fernen Erzeugenden beider Systeme sind.*"

Die unendlich ferne Ebene enthält selbst zwei Erzeugende g_u und l_u der beiden Systeme, berührt folglich das Paraboloid in dem Schnittpunkte U dieser beiden Geraden. Hiermit gilt der Satz:

79. „*Das hyperbolische Paraboloid wird von der unendlich fernen Ebene in jenem Punkte berührt, in welchem sich die unendlich fernen Erzeugenden schneiden, d. i. in dem unendlich fernen Punkte der Schnittgeraden der beiden Richtebenen.*"

§. 86.

Eine „besondere Berührungsebene" des hyperbolischen Paraboloides, deren Bestimmung von Wichtigkeit ist, wollen wir in nachstehender Weise festzustellen suchen.

Die betreffenden Richtebenen für die Erzeugenden des Systems g und des Systems l seien beziehungsweise R_g und R_l. Denken wir uns auf die Schnittgerade der beiden Ebenen R_g und R_l eine senkrechte Ebene e geführt, welche R_g in γ_s und R_l in λ_s schneiden möge.

Bestimmen wir nun jene Erzeugende g_s des Paraboloides, welche parallel zu γ_s ist, sowie auch jene Erzeugende l_s, welche zu λ_s parallel läuft, so werden sich diese beiden Erzeugenden in einem Punkte A schneiden, welcher der „Scheitel" des Paraboloides genannt wird.

Zieht man durch A eine Parallele AU zu der Schnittgeraden der beiden Richtebenen, so geht dieselbe offenbar durch den vorher genannten Berührungspunkt U des Paraboloides mit der unendlich fernen Ebene; ferner wird besagte Gerade senkrecht sein auf der Be-

rührungsebene (g_s, l_s) im Scheitel des Paraboloides. Die Gerade AU pflegt man die „Achse" des Paraboloides zu nennen.

Weiters ist der Schnitt des Paraboloides mit einer Ebene stets ein Kegelschnitt, da, wie nachgewiesen wurde, die Fläche vom zweiten Grade ist.

Dass diesfalls der ebene Schnitt keine Ellipse sein kann, ist von selbst einleuchtend, da der Ort der unendlich fernen Punkte aller Erzeugenden des Paraboloides aus zwei reellen Geraden „den unendlich fernen Erzeugenden g_u und l_u" besteht.

Die schneidende Ebene hat mit jeder dieser Geraden einen reellen Punkt gemein, d. h. die Schnittcurve besitzt zwei reelle unendlich ferne Punkte; ist daher eine Hyperbel.

Hat speciell die schneidende Ebene eine solche Lage, dass sie den Schnittpunkt U der beiden unendlich fernen Erzeugenden g_u und l_u enthält, ist dieselbe also parallel zur Achse des Paraboloides, so fallen die beiden unendlich fernen Punkte der Schnittcurve mit dem Punkte U zusammen.

Da weiters die unendlich ferne Ebene das Paraboloid in dem Punkte U berührt, so ist deren Schnitt mit der schneidenden Ebene, d. i. die unendlich ferne Gerade der letzteren, eine Tangente der Schnittcurve in dem unendlich fernen Punkte U derselben. Hieraus folgt, dass unter obiger Voraussetzung die Schnittcurve eine Parabel sei.

Endlich kann eine Ebene, welche durch eine Erzeugende des Paraboloides geht, die Fläche nur noch in einer zweiten Erzeugenden schneiden, welche selbstverständlich dem anderen Systeme angehört.

Eine solche Ebene, welche in dem Schnittpunkte der beiden Erzeugenden das Paraboloid berührt, schneidet dasselbe nach einem, in zwei Gerade (die genannten Erzeugenden) ausgearteten Kegelschnitt. Wir erhalten somit den Satz:

80. „Der ebene Schnitt des hyperbolischen Paraboloides ist im allgemeinen eine Hyperbel, deren Asymptoten zu den Tracen der beiden Richtebenen auf der schneidenden Ebene parallel sind. Ist jedoch die schneidende Ebene parallel zur Achse des Paraboloides, so ist die Schnittcurve eine Parabel. Endlich kann der Schnitt des Paraboloides mit einer Ebene auch in zwei Gerade dann ausarten, wenn die schneidende Ebene gleichzeitig eine Berührungsebene der Fläche ist."

§. 87.

Berücksichtigt man, dass die Achse einer Parabel eine durch den unendlich fernen Punkt derselben gehende Gerade ist, und dass

sämmtliche auf dem Paraboloide liegenden Parabeln dieselben unendlich fernen Punkte U besitzen, so ergibt sich sofort:

81. „Die Achsen aller auf einem hyperbolischen Paraboloide liegenden Parabeln sind parallel zur Achse des Paraboloides.“

§. 88.

Jede durch die Achse des hyperbolischen Paraboloides gehende Ebene schneidet die genannte Fläche in einer Parabel, deren Achse die Achse des Paraboloides ist.

Denn die Schnittcurve geht durch den Scheitel A des Paraboloides; die Tangente der Parabel in diesem Punkte A, ist der Schnitt der Berührungsebene (g_s, l_s) mit der schneidenden Ebene, also eine zur Geraden AU senkrechte Gerade.

Die Gerade AU aber, welche durch den unendlich fernen Punkt U der Parabel geht und die Parabel noch in einem zweiten Punkte A, „dem Scheitel“ unter rechtem Winkel trifft, stellt offenbar die Achse der Parabel dar. Demnach ergibt sich der Satz:

82. „Die Achse eines hyperbolischen Paraboloides ist auch die Achse für alle Parabeln auf dem Paraboloide, deren Ebenen durch sie gehen.“

§. 89.

Auf einem windschiefen Hyperboloide existiert zu jeder Erzeugenden eine parallele Erzeugende im anderen Systeme.

Auf einem hyperbolischen Paraboloide hingegen gibt es kein einziges Paar paralleler Geraden.

Gesetzt, es wären g_i und l_i zwei parallele Erzeugende, welche selbstverständlich verschiedenen Systemen angehören müssten.

Ist g_a irgend eine beliebige anderweitige Erzeugende, so bestimmen die Erzeugenden l auf g_i und g_a ähnliche Punktreihen, welchen, als entsprechende Punkte, auch die Schnittpunkte von g_i und g_a mit l_i angehören müssten.

Der erste dieser beiden Schnittpunkte liegt aber, der Voraussetzung nach, in unendlicher Ferne, der zweite hingegen in endlicher Entfernung; es würde daher in zwei ähnlichen Reihen dem unendlich fernen Punkte der einen ein im Endlichen gelegener Punkt der anderen entsprechen, was undenkbar ist; hiernach folgt der Satz:

83. „Auf einem hyperbolischen Paraboloide gibt es kein Paar paralleler Geraden.“

§. 90.

Der einem hyperbolischen Paraboloide aus einem Punkte P des Raumes umschriebene Kegel wird von jenen Berührungsebenen, die durch den Punkt P gehen, d. i. von jenen Ebenen, welche durch P und durch die einzelnen Erzeugenden des Paraboloides führen, umhüllt.

Denkt man sich nun das Paraboloid durch die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier ähnlichen Punktreihen $a_1 b_1 c_1 \dots$ und $a_2 b_2 c_2 \dots$ auf zwei sich nicht schneidenden Trägern g_1 und g_2 erzeugt, so werden jene Ebenen den Berührungskegel umhüllen, welche durch den Punkt P und je zwei entsprechende Punkte a_1 und a_2, b_1 und $b_2 \dots$ der beiden Reihen g_1 und g_2 gehen, oder mit anderen Worten: jene Ebenen, welche entsprechende Strahlen zweier projectivischen Strahlenbüschel $P(a_1 b_1 c_1 \dots)$ und $P(a_2 b_2 c_2 \dots)$ verbinden, den Punkt P zum gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben und zu den beiden ähnlichen Reihen $a_1 b_1 c_1 \dots$ und $a_2 b_2 c_2 \dots$ perspectivisch sind.

Dieser Kegel ist somit vom zweiten Grade. Demnach folgt der Satz:

84. „Der einem hyperbolischen Paraboloide aus einem Punkte des Raumes umschriebene Kegel ist vom zweiten Grade.“

Oder, mit Rücksicht auf die Darstellung des hyperbolischen Paraboloides in centraler Projection:

85. „Die Contour eines hyperbolischen Paraboloides in centralprojectivischer Darstellung ist ein Kegelschnitt.“

§. 91.

Liegt der Punkt P speciell in unendlicher Entfernung, so übergeht der dem Paraboloide umschriebene Kegel in einen umschriebenen Cylinder. Die unendlich ferne Ebene berührt bekanntlich das Paraboloid, und da dieselbe auch den Punkt P enthält, so berührt sie auch den aus P dem Paraboloide umschriebenen Cylinder, welcher demgemäß ein parabolischer Cylinder sein muss. Es ergibt sich daher der Satz:

86. „Der einem hyperbolischen Paraboloide umschriebene Cylinder ist, welches auch die Richtung der Cylindererzeugenden sein möge, stets ein parabolischer.“

Oder für die Darstellung in der Parallelprojection:

87. „Die Contour eines hyperbolischen Paraboloides bei parallelprojectivischer Darstellung ist immer eine Parabel.“

§. 92.

Berührt eine Gerade eine Fläche zweiten Grades, so kann die besagte Gerade, außer den beiden im Berührungspunkte vereinigten Punkten, mit der Fläche keinen weiteren Punkt gemein haben.

Weiß man daher, dass eine Gerade die Tangente einer Fläche zweiten Grades ist und kennt man einen Punkt, den dieselbe mit der Fläche gemein hat, so kann der bezeichnete Punkt kein anderer, als der Berührungspunkt selbst sein.

Gestützt auf diesen Umstand, stellen wir folgende Betrachtung an.

Denken wir uns dem hyperbolischen Paraboloide aus einem Punkte P des Raumes einen Kegel K umschrieben und seien B_1, B_2 und B_3 drei Berührungsebenen des Kegels K, mithin also auch Berührungsebenen des Paraboloides, in den Punkten a_1, a_2 und a_3.

Der Kegel K wird sodann, auf Grund der gemachten Voraussetzungen, von diesen Ebenen längs den Erzeugenden Pa_1, Pa_2 und Pa_3 berührt. Legen wir durch a_1, a_2 und a_3 eine Ebene e, so wird diese das Paraboloid in einem Kegelschnitte treffen, welcher durch die drei Punkte a_1, a_2, a_3 geht und in denselben jene drei Geraden t_1, t_2, t_3 berühren, in welchen die Ebene e die Berührungsebenen B_1, B_2, B_3 schneidet.

Selbstverständlich schneidet besagte Ebene auch den Kegel K in einem Kegelschnitte, der gleichfalls durch a_1, a_2, a_3 geht und die Geraden t_1, t_2 und t_3 berührt.

Diese beiden Kegelschnitte sind somit identisch und repräsentieren, den Auseinandersetzungen zufolge, die Berührungscurve des Kegels K mit dem Paraboloide. Hiernach der Satz:

88. „Die Berührungscurve des hyperbolischen Paraboloides mit einem demselben umschriebenen Kegel ist immer eine ebene Curve und zwar eine Hyperbel.“

Liegt der Kegelscheitel in unendlicher Entfernung, übergeht also der umschriebene Kegel in einen umschriebenen Cylinder, so kann die auf diesem parabolischen Cylinder (Satz 86) liegende Berührungscurve nur eine Parabel sein. Wir gelangen daher zu dem Satze:

89. „Die Berührungscurve eines hyperbolischen Paraboloides mit einem demselben umschriebenen Cylinder ist eine Parabel.“

§. 93.

Denkt man sich umgekehrt, das Paraboloid durch eine Ebene e nach einem Kegelschnitt Σ geschnitten und construiert man in allen

Punkten dieses Kegelschnittes die dem Paraboloide entsprechenden Berührungsebenen, so lässt sich leicht nachweisen, dass dieselben durch einen und denselben Punkt gehen, also einen Kegel umhüllen.

Nehmen wir nämlich auf dem Kegelschnitte Σ drei Punkte a_1, a_2 und a_3 beliebig an und construieren die drei zugehörigen Berührungsebenen B_1, B_2 und B_3 des Paraboloides, so schneiden sich diese nothwendig in einem Punkte P, welcher (nach Satz 88) die Eigenschaft besitzt, dass der aus demselben, dem Paraboloide umschriebene Kegel, das letztere in den Punkten des durch a_1, a_2 und a_3 gehenden ebenen Schnittes, d. i. längs des Kegelschnittes Σ berührt.

Hiemit ist gleichzeitig auch nachgewiesen, dass alle Berührungsebenen des Paraboloides in den Punkten von Σ durch den nämlichen Punkt P gehen müssen. Daher besteht der Satz:

90. „Die Berührungsebenen eines hyperbolischen Paraboloides in den Punkten eines ebenen Schnittes umhüllen einen Kegel zweiten Grades."

§. 94.

Ist die schneidende Ebene e speciell parallel zur Achse des Paraboloides, ist also der Kegelschnitt Σ eine Parabel, so kann man zwei beliebige Punkte a_1 und a_2 derselben annehmen und die diesen Punkten entsprechenden Berührungsebenen B_1 und B_2 des Paraboloides construieren.

Besagte Berührungsebenen schneiden sich in einer Geraden s. Betrachtet man die so gefundene Gerade s als Richtung der Erzeugenden eines dem Paraboloide umschriebenen Cylinders, so wird dieser letztere (nach Satz 89) das Paraboloid längs einer Parabel berühren, welche durch die beiden Punkte a_1 und a_2 geht und keine andere sein kann, als die Parabel Σ selbst, in welcher die Ebene e das Paraboloid schneidet. Denn durch die beiden Punkte a_1 und a_2 kann nur eine einzige zur Achse des Paraboloides parallele Ebene, also auch nur eine einzige Parabel gelegt werden.

Es folgt daher der Satz:

91. „Die Berührungsebenen eines hyperbolischen Paraboloides in den Punkten einer auf dem letzteren liegenden Parabel umhüllen einen parabolischen Cylinder."

§. 95.

Die Asymptoten eines ebenen Schnittes des hyperbolischen Paraboloides sind, wie wir bereits wissen, parallel zu den Geraden γ und λ,

in welchen die schneidende Ebene die beiden Richtebenen R_g und R_l schneidet.

Bestimmt man nämlich die Erzeugenden g und l der beiden Systeme, welche zu den Geraden γ und λ parallel sind, so stellen diese zwei Erzeugenden des Paraboloides vor, welche zur schneidenden Ebene E parallel sind und deren unendlich ferne Punkte die unendlich fernen Punkte der Schnittcurve darstellen.

Um die Tangenten der letzteren in diesen Punkten zu bestimmen, denken wir uns die betreffenden Tangentialebenen des Paraboloides in denselben Punkten bestimmt, d. h. die asymptotischen Ebenen der beiden Erzeugenden g und l aufgesucht. Besagte Ebenen sind selbstverständlich die durch g und l beziehungsweise parallel zu R_g und R_l geführten Ebenen B_g und B_l.

Die beiden Ebenen B_g und B_l schneiden sich unter einander in einer zur Achse des Paraboloides parallelen Geraden s, während der Schnitt derselben mit der schneidenden Ebene e in den Asymptoten A_1 und A_2 der Schnittcurve erfolgen wird. Der Begegnungspunkt m der beiden letzteren ist offenbar der Schnittpunkt der Geraden s mit der Ebene e. Derselbe wird sonach den Mittelpunkt der Schnitthyperbel repräsentieren.

Berücksichtigt man, dass die Ebenen B_g und B_l, sowie die Geraden g, l und s dieselben bleiben, wenn man für die Ebene e eine andere zu ihr parallele Ebene e' substituiert, so ergibt sich unmittelbar, dass die Mittelpunkte m aller parallelen Schnitte eines Paraboloides auf einer und derselben Geraden s liegen, und dass deren Asymptoten, als Schnitte der Parallelschar schneidender Ebenen mit zwei festen Ebenen B_g und B_l, sämmtlich unter einander parallel seien. Nachdem aber alle Hyperbeln, welche parallele Asymptoten besitzen, ähnlich und ähnlich gelegen sind, so folgt der Satz:

92. „*Wird ein hyperbolisches Paraboloid durch eine Schar paralleler Ebenen geschnitten, so sind die Schnittcurven ähnlich und ähnlich gelegene Hyperbeln, deren Mittelpunkte sämmtlich auf einer zur Achse des Paraboloides parallelen Geraden liegen.*“

Die letztgenannte Gerade nennt man den zu der Schar paralleler schneidender Ebenen „conjugierten Durchmesser“ des hyperbolischen Paraboloides.

§. 96.

Setzen wir nun voraus, ein System paralleler Geraden h_1, h_2, h_3... schneide ein hyperbolisches Paraboloid in den Punktepaaren $a_1 b_1$; $a_2 b_2$; $a_3 b_3$.... Durch diese Geraden h_1, h_2... denken wir uns

parallele Ebenen e_1, e_2, e_3... gelegt. Die letzteren werden die Fläche in ähnlichen und ähnlich gelegenen Hyperbeln schneiden, deren Mittelpunkte o_1, o_2, o_3... auf einer festen Geraden s liegen und deren jede eine Sehne $a_1 b_1$, $a_2 b_2$... besitzt.

Denkt man sich ferner die Mittelpunkte m_1, m_2... von $a_1 b_1$, $a_2 b_2$... mit den entsprechenden Mittelpunkten o_1, o_2... der Hyberbeln verbunden, so erhält man Durchmesser dieser letzteren, welche der Richtung der Sehnenschar $a_1 b_1$, $a_2 b_2$... conjugiert sind. Nachdem aber die sämmtlichen Hyperbeln ähnlich liegend sind, so müssen diese Durchmesser $o_1 m_1$, $o_2 m_2$... unter einander parallel sein und da die letzteren sammt und sonders die Gerade s schneiden, so liegen sie auch alle in einer und derselben Ebene. Hiernach ergibt sich der Satz:

93. „*Die Mittelpunkte paralleler Sehnen eines hyperbolischen Paraboloides liegen in einer und derselben Ebene, welche zur Achse des Paraboloides parallel ist.*“

Die letztgenannte Ebene wird die der Parallelsehnenschar „conjugierte Durchmesserebene“ genannt.

§. 97.

Verschiedene Erzeugungsarten des hyperbolischen Paraboloides.

a) Denken wir uns zwei projectivische Ebenenbüschel g_1 und g_u, von denen das eine, etwa g_u, ein Parallelebenenbüschel, dessen Achse g_u somit in unendlicher Entfernung liegt, sei.

Entsprechende Ebenen vorbezeichneter Büschel schneiden sich (nach Satz 11) in den Erzeugenden einer windschiefen Fläche zweiten Grades, für welche g_1 und g_u Leitgeraden sind.

Der unendlich fernen Ebene, als einer Ebene des Büschels g_u, entspricht im Büschel g_1 eine bestimmte Ebene, deren Schnitt mit der ersteren eine unendlich ferne Erzeugende der Fläche liefert.

Die letztbezeichnete Fläche besitzt daher in der unendlich fernen Ebene zwei Geraden, ist sonach ein hyperbolisches Paraboloid. Mithin:

94. „*Zwei projectivische Ebenenbüschel, wovon das eine ein Parallelebenenbüschel ist, erzeugen, sobald ihre Achsen keinen Punkt gemein haben, ein hyperbolisches Paraboloid.*“

§. 98.

b) Setzen wir voraus, es seien drei Geraden g_1, g_2 und g_3 als Leitgeraden für eine windschiefe Fläche derart gegeben, dass alle drei zu einer und derselben Ebene e parallel sind.

Bei allgemeiner gegenseitiger Lage von g_1, g_2, g_3 erzeugen die Geraden, welche g_1, g_2, g_3 schneiden, wie wir bereits wissen, ein Hyperboloid.

Unter der Voraussetzung aber, dass die Geraden g_1, g_2, g_3 zu einer Ebene e parallel sind, ist die unendlich ferne Gerade l_u dieser Ebene selbst eine Erzeugende des Hyperboloides und dieses degeneriert somit in ein hyperbolisches Paraboloid.

Hieraus folgt der Satz, resp. die Erzeugungsweise eines hyperbolischen Paraboloides:

95. „*Drei gerade Linien, welche, ohne sich zu schneiden, zu einer und derselben Ebene parallel sind, sind immer Leitgeraden für ein hyperbolisches Paraboloid.*“

§. 99.

c) Ein ebenes Strahlenbüschel S und eine zu diesem Büschel projectivische Punktreihe g sei im Raume derart gegeben, dass der Träger g der Punktreihe zur Ebene des Strahlenbüschels S nicht parallel läuft.

Zieht man durch jeden Punkt der Reihe g eine Parallele zu dem entsprechenden Strahle des Büschels, so erzeugen diese Geraden eine windschiefe Fläche, welche, wie sich leicht zeigen lässt, ein hyperbolisches Paraboloid sein wird.

Denken wir uns nämlich durch die Punkte a, b, c... der Reihe g Ebenen parallel zur Ebene des Strahlenbüschels S gelegt, so bilden dieselben ein Parallelebenenbüschel, welches zu der Punktreihe $g(abc...)$ perspectivisch und mithin zu dem Strahlenbüschel $S(\alpha\beta\gamma...)$ projectivisch ist.

Legen wir ferner durch die Gerade g Ebenen parallel zu den Strahlen des gegebenen Büschels $S(\alpha\beta\gamma...)$, so entsteht ein Ebenenbüschel $g(\alpha_1\beta_1\gamma_1...)$, welches mit dem Strahlenbüschel $S(\alpha\beta\gamma...)$, also auch mit dem früher genannten Parallelebenenbüschel projectivisch ist.

Betrachten wir nun zwei einander entsprechende Ebenen der beiden Büschel, beispielsweise die Ebene, welche durch den Punkt a der Reihe $g(a\,b\,c\,...)$ parallel zur Ebene des Strahlenbüschels $S(\alpha\beta\gamma...)$ geführt wurde und jene Ebene, welche durch g parallel zum Strahle $S\alpha$ des Büschel $S(\alpha\beta\gamma...)$ gelegt worden ist, so findet man, dass die Schnittgerade dieser beiden Ebenen einerseits durch den Punkt a geht und andererseits zum Strahle $S\alpha$ des Büschels S parallel läuft, mithin eine Erzeugende der vorgenannten windschiefen Fläche sein wird.

Besagte Fläche kann daher auch aufgefasst werden als der Ort der Schnittgeraden entsprechender Ebenen eines Ebenenbüschels und eines zu demselben projectivischen Parallelebenenbüschels. Diese Fläche ist aber (nach Satz 94) ein hyperbolisches Paraboloid und es folgt mithin der Satz:

96. „Die Geraden, welche durch die Punkte einer Reihe parallel zu den ihnen entsprechenden Strahlen eines Strahlenbüschels (dessen Ebene nicht parallel zu dem Träger der Reihe ist) gezogen werden, bilden ein hyperbolisches Paraboloid.“

VII. Capitel.

Das gleichseitige hyperbolische Paraboloid.

§. 100.

Wenn die beiden Richtebenen R_g und R_l eines hyperbolischen Paraboloides auf einander senkrecht stehen, so nennt man das infolge dieser besonderen gegenseitigen Lage der Richtebene entstehende windschiefe Paraboloid, ein „gleichseitig-hyperbolisches Paraboloid“.

Wir wollen nun die Bedingung feststellen, unter welcher zwei projectivisch-ähnliche Punktreihen ein solches Paraboloid erzeugen können.

Seien g_1 und g_2 zwei sich kreuzende Geraden, welche als Träger zweier projectivisch-ähnlicher Punktreihen dienen mögen.

Ist ein hyperbolisches Paraboloid durch zwei Leitgeraden g_1 und g_2 und eine Richtebene R_l gegeben, so kann, wie bereits bekannt, jederzeit eine Erzeugende l gefunden werden, welche zu einer beliebig in der Richtebene R_l liegenden oder parallel zu R_l gewählten Geraden parallel läuft.

Soll das Paraboloid g_1, g_2 ein gleichseitiges sein, d. h. sollen die beiden Richtebenen R_g und R_l auf einander senkrecht stehen, so muss es unter den Erzeugenden l, d. h. unter jenen Geraden, welche g_1 und g_2 schneiden und parallel zu R_l geführt sind, eine geben, welche zur Richtebene R_g, die ihrerseits parallel zu g_1 und g_2 ist, senkrecht steht. Hiernach muss die Gerade, welche zu g_1 und g_2 normal steht und den kürzesten Abstand von g_1 und g_2 repräsentiert, eine Erzeugende des Paraboloides sein. Es folgt daher der Satz:

97. „*Damit zwei projectivisch-ähnliche Punktreihen ein gleichseitig-hyperbolisches Paraboloid erzeugen, ist es nothwendig und hinreichend, dass sich auf denselben die Fußpunkte des kürzesten Abstandes als Elemente der beiden Reihen entsprechen.*“

Oder mit anderen Worten:

98. „*In einem gleichseitig-hyperbolischen Paraboloide, welches zwei Gerade g_1 und g_2 als Leitlinien besitzt, ist die Linie des kürzesten Abstandes von g_1 und g_2 eine Erzeugende.*“

§. 101.

Hieraus kann unschwer noch ein weiterer Satz gefolgert werden.

Nennen wir nämlich l_s die Erzeugende des Paraboloides, welche den kürzesten Abstand von g_1 und g_2 darstellt und somit auf der zu g_1 und g_2 parallelen Richtebene R_g senkrecht steht, so ist einleuchtend, dass dieselbe zu allen Geraden dieser Ebene, also auch zu allen Erzeugenden des Systems g normal sein wird.

In gleicher Weise findet man, wenn von zwei Geraden l_1 und l_2 ausgegangen wird, dass die Gerade g_s, welche den kürzesten Abstand von l_1 und l_2 darstellt, alle Erzeugenden des Systems l rechtwinklig schneidet.

Mithin besteht der Satz:

99. „*Ein gleichseitig-hyperbolisches Paraboloid enthält in jeder Erzeugendenschar eine Gerade, welche die sämmtlichen Geraden der anderen Schar rechtwinklig schneidet.*“

§. 102.

Sind zwei sich kreuzende Geraden g_1 und g_2 gegeben und fällt man von den Punkten a, b, c... der einen Geraden, etwa g_1, Senkrechte auf die andere, d. i. auf g_2, so bilden diese Perpendikel ein gleichseitig-hyperbolisches Paraboloid. Denn nimmt man an, es seien l_1 und l_2 zwei dieser Perpendikel, so repräsentiert g_2 den kürzesten Abstand von l_1 und l_2. Da aber die Gerade l sämmtlich zu einer Ebene — der auf g_2 senkrechten Ebene — parallel sind, so ist obige Behauptung gerechtfertigt und wir gelangen zu dem Satze:

100. „*Sind zwei nicht in einer Ebene liegende Geraden gegeben, und man fällt von den Punkten der einen, Perpendikel auf die andere, so ist der Ort dieser Perpendikel ein gleichseitig-hyperbolisches Paraboloid.*“

§. 103.

Sind drei Geraden g_1, g_2 und g_3 derart gegeben, dass sie alle die nämliche Gerade l rechtwinklig schneiden und betrachtet man dieselben als Leitgeraden einer windschiefen Fläche, so findet man sofort, dass diese letztere, da die drei Leitgeraden g_1, g_2 und g_3 zu einer und derselben Ebene — der auf l senkrecht stehenden Ebene — parallel sind, ein hyperbolisches Paraboloid sei.

Weiters ist aber die Gerade l eine Erzeugende, welche auf den drei Erzeugenden des anderen Systems g senkrecht steht, woraus folgt, dass das so entstandene hyperbolische Paraboloid ein „gleichseitiges“ ist. Demnach gelangen wir zu dem Satze:

101. „Drei Geraden, welche eine und dieselbe Gerade rechtwinklig schneiden, sich aber gegenseitig nicht begegnen, sind stets Leitgeraden eines gleichseitig-hyperbolischen Paraboloides.“

§. 104.

Auf Grund des Satzes 94) kann behauptet werden, dass die Schnittgeraden der Ebenen eines Ebenenbüschels g mit den ihnen entsprechenden Ebenen eines projectivischen Parallelebenenbüschels g_u ein hyperbolisches Paraboloid erzeugen.

Nehmen wir insbesondere an, dass die Achse g des ersteren Ebenenbüschels, als auch dessen Ebenen, auf den Ebenen des Parallelbüschels senkrecht stehen.

Dies vorausgesetzt, stehen auch sämmtliche Erzeugenden, da diese in den Ebenen des Parallelbüschels liegen, zu der Geraden g senkrecht. Die unmittelbare Folge hievon ist, dass unter diesen Vorbedingungen das Paraboloid ein gleichseitiges sein müsse. Mithin der Satz:

102. „Der Ort der Schnittgeraden entsprechender Ebenen zweier projectivischer Ebenenbüschel, wovon das eine ein Parallelebenenbüschel ist, dessen Ebenen zu der Achse des zweiten senkrecht sind, ist ein gleichseitig-hyperbolisches Paraboloid.“

§. 105.

Der Ort der Geraden, welche durch die Punkte einer geraden Reihe parallel zu den entsprechenden Strahlen eines dieser Reihe projectivischen Strahlenbüschels sind, ist (nach Satz 96) ein hyperbolisches Paraboloid. Setzt man überdies fest, dass der Träger der Reihe zu der Ebene des Strahlenbüschels senkrecht stehe, so werden auf demselben auch alle Strahlen des Büschels und infolge dessen die zu ihnen

parallelen Erzeugenden des Paraboloides senkrecht stehen. Das Paraboloid ist somit ein gleichseitiges. Dies gibt den Satz:

103. „Zieht man durch die Punkte einer Reihe parallele Geraden zu den ihnen entsprechenden Strahlen eines projectivischen Strahlenbüschels, dessen Ebene zu dem Träger der Reihe senkrecht ist, so bilden diese Parallelen ein gleichseitig-hyperbolisches Paraboloid.“

§. 106.

Es wurde im Vorhergegangenen der Satz nachgewiesen, dass zwei projectivische Ebenenbüschel mit sich kreuzenden Achsen dann ein hyperbolisches Paraboloid erzeugen, wenn es ein Paar entsprechender und zugleich zu einander paralleler Ebenen in denselben gibt.

Untersuchen wir nun, welche Bedingung die beiden Ebenenbüschel noch erfüllen müssen, wenn das Paraboloid ein gleichseitiges sein soll.

Sind g_1 und g_2 zwei Erzeugende eines gleichseitig-hyperbolischen Paraboloides, so wird die Linie des kürzesten Abstandes beider eine Erzeugende l_s des zweiten Systems sein.

Denken wir uns die Geraden g_1 und g_2 als Achsen zweier das Paraboloid erzeugenden projectivischen Ebenenbüschel, so werden sich in denselben solche Ebenen entsprechen, welche eine und dieselbe Erzeugende des Systemes l enthalten.

Für's erste entsprechen einander jene Ebenen e_1 und e_2, welche durch g_1 parallel zu g_2 und durch g_2 parallel zu g_1 gelegt werden, da sich dieselben in der Verbindungsgeraden der unendlich fernen Punkte von g_1 und g_2, d. h. in der unendlich fernen Erzeugenden des Systems l schneiden.

Weiters sind aber auch die Ebenen der beiden Büschel g_1 und g_2, welche durch die Linie des kürzesten Abstandes l_s gehen, entsprechende Ebenen.

Berücksichtigt man aber, dass die Ebenen e_1 und (g_1, l_s) des Büschels g_1 auf einander senkrecht sind, und ebenso die ihnen entsprechenden Ebenen e_2 und (g_2, l_s) des Büschels g_2 zu einander normal stehen, so ergibt sich, dass von den entsprechenden zwei Paaren rechtwinkliger Ebenen der beiden Büschel das eine Paar parallel ist, während sich das andere in jener Erzeugenden schneidet, welche zu den Achsen der beiden Büschel, als Erzeugenden des zweiten Systems, senkrecht ist. Es folgt mithin der Satz:

104. „Haben zwei projectivische Ebenenbüschel eine derartige Lage im Raume, dass sich deren Achsen nicht schneiden, und dass

das eine der beiden Paare entsprechender rechtwinkliger Ebenen der beiden Büschel parallel ist, so erzeugen die Schnittgeraden entsprechender Ebenen dieser Büschel ein gleichseitig-hyperbolisches Paraboloid; die Ebenen des zweiten Paares der rechtwinkligen Ebenen schneiden sich in derjenigen Erzeugenden, zu welcher die Erzeugenden des zweiten Systems, wozu auch die Büschelachsen gehören, senkrecht stehen."

Als Vorbereitung zu weiteren Untersuchungen wollen wir jetzt einige geometrische Orte untersuchen, welche sich als windschiefe Flächen zweiten Grades herausstellen.

§. 107.

5. *Aufgabe.* Welches ist der geometrische Ort der Punkte im Raume, deren Abstände von zwei festen, sich nicht schneidenden Geraden in einem constanten Verhältnisse stehen.

Die beiden gegebenen Geraden seien h_1 und h_2 (Taf. III, Fig. 21). Durch die Linie des kürzesten Abstandes $m_1 m_2$ dieser Geraden führen wir eine Ebene V senkrecht zu h_1 und eine Ebene H senkrecht zu h_2. Diese beiden Ebenen, welche irgend einen Winkel mit einander einschließen mögen, betrachten wir als zwei Ebenen orthogonaler Projection.

Die Gerade h_1 projiciert sich sodann auf die Ebene V als ein in die Grundlinie G fallender Punkt m_1; ihre orthogonale Projection auf die Ebene H ist die durch m_1 gehende zur Grundlinie senkrechte Gerade h'_1. In gleicher Weise ist die orthogonale Projection der zweiten Geraden h_2 auf die Ebene H der Punkt m_2 in der Grundlinie; die Projection h_2 auf die Ebene V geht durch m_2, und ist senkrecht zur Grundlinie.

Der Kürze halber wollen wir die beiden Ebenen V und H sowohl, als auch die betreffenden Projectionen einfach verticale und horizontale Projectionsebenen, beziehungsweise verticale und horizontale Projectionen nennen, obwohl V und H, wie ausdrücklich hervorgehoben, keinen rechten Winkel einschließen.

Nach dieser angenommenen Bezeichnung ist somit h_1 oder (m_1, h'_1) eine vertical-projicierende und (m_2, h_2) oder h_2 eine horizontal-projicierende Gerade.

Sind nun p und p' beziehungsweise die verticale und horizontale Projection eines Punktes im Raume und ziehen wir $p m_1$, so repräsentiert diese Gerade die verticalen Projectionen aller durch (p, p') gehenden und die Gerade (m_1, h'_1) schneidenden Geraden, also auch

derjenigen Geraden, welche den Abstand des Punktes (p, p') von der Geraden h_1 misst. Nachdem aber die letztere Gerade h_1 vertical-projicierend ist, so wird jener Abstand parallel zur verticalen Projectionsebene sein und die Strecke pm_1 mithin bereits dessen wahre Länge darstellen.

In gleicher Weise findet man, dass die Strecke $p'm_2$ die wahre Größe des Abstandes des Punktes (p, p') von der Geraden h_2 repräsentiert.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, den geometrischen Ort aller Punkte (p, p') des Raumes zu finden, deren Abstände von den beiden festen Geraden h_1 und h_2 in einem constanten Verhältnisse k stehen, d. h. den Ort aller jener Punkte festzustellen, für welche

$$pm_1 : p'm_2 = k$$

ist.

Behufs Erreichung des vorgegebenen Zweckes wird es noch nothwendig sein, einige vorbereitende Constructionen voranzuschicken.

Es ist bekannt, dass, wenn man die Strecke $m_1 m_2$ innerlich und äußerlich in dem gegebenen Verhältnisse k durch die betreffenden Punkte α und β theilt, und über $\alpha\beta$ als Durchmesser, ein Kreis C verzeichnet wird, diesem letzteren die Eigenschaft zukömmt, dass das Verhältnis der Abstände eines jeden seiner Punkte a von den Punkten m_1 und m_2 jenem gegebenen Verhältnisse k gleich sei. Ist demnach a ein beliebiger Punkt des Kreises C, so wird stets, d. i. für alle Punkte desselben:

$$am_1 : am_2 = k$$

sein.

Denken wir uns nun im Punkte a die verticale und horizontale Projection eines Raumpunktes vereinigt, so wird offenbar auch dieser Punkt dem gesuchten geometrischen Orte angehören.

Wir wissen aber, dass ein Punkt, dessen verticale und horizontale Projection in einem Punkte zusammenfallen, nothwendig ein Punkt einer derjenigen beiden Ebenen sei, welche den Winkel zwischen den Projectionsebenen halbieren.

Nennen wir diese Ebene H, so ergibt sich, dass jene Ellipse E in der Ebene H, deren beide Projectionen mit dem Kreise C zusammenfallen, also diejenige Ellipse, in welcher der über C errichtete vertical- oder horizontal-projicierende Cylinder von der Ebene H geschnitten wird, dem geometrischen Orte angehöre.

Denken wir uns ferner zu dem Punkte a (Taf. III, Fig. 22) den in Bezug auf die Grundlinie symmetrischen Punkt a' des Kreises C bestimmt, so folgt, weil $a'm_2 = am_2$ ist, auch

$$am_1 : a'm_1 = k$$

sein müsse; es wird sonach jener Punkt, dessen Projectionen a und a' sind, ebenfalls ein Punkt des geometrischen Ortes sein.

Berücksichtigen wir aber, dass die Projectionen a und a' dieses Punktes von der Grundlinie gleich weit abstehen, dass also der Punkt selbst in der zweiten winkelhalbierenden Ebene H_1 der Projectionsebenen liegen müsse, so gelangen wir zu dem Schlusse, dass der Kreis C die Projectionen einer in H_1 liegenden Ellipse E_1 darstelle, welche dem gesuchten geometrischen Orte gleichfalls angehört.

Aus dieser einfachen Erörterung ist zu ersehen, dass der vertical- oder horizontal-projicierende Cylinder durch den Kreis C von den beiden winkelhalbierenden (also zu einander rechtwinkligen) Ebenen der Projectionsebenen in zwei Ellipsen E und E_1 geschnitten wird, welche dem gesuchten geometrischen Orte angehören.

Diese beiden Ellipsen berechtigen, wie aus Nachstehendem klar werden wird, zu der Folgerung, dass der geometrische Ort aus zwei Systemen gerader Linien bestehe.

Denken wir uns zum Behufe der Erläuterung des Gesagten durch den Punkt a (Taf. III, Fig. 21) die beiden Geraden pa und $p'a$ beziehungsweise zu am_1 und am_2 senkrecht geführt und betrachten wir dieselben als die betreffende verticale und horizontale Projection einer und derselben durch (a, a') gehenden Geraden.

Nehmen wir auf dieser Geraden irgend einen beliebigen Punkt (p, p') an, so werden, weil $m_1 m_2$ und pp'; $m_1 a$ und pa; $m_2 a$ und $p'a$ Paare rechtwinkliger Geraden sind, die Dreiecke pap' und $m_1 a m_2$ ähnlich sein und infolge dessen

$$pa : am_1 = p'a : am_2.$$

Hieraus ergibt sich aber, dass auch die rechtwinkligen Dreiecke pam_1 und $p'am_2$ ähnlich sind, dass also

$$pm_1 : p'm_2 = am_1 : am_2 = k$$

ist. Die Abstände eines beliebigen Punktes (p, p') der Geraden $(ap, a'p')$ von den beiden Geraden h_1 und h_2 stehen demnach in dem bestimmten constanten Verhältnisse k, woraus unmittelbar folgt, dass die Gerade (ap, ap') selbst ein Theil des geometrischen Ortes ist.

Selbstverständlich gilt das Gleiche von allen in derselben Weise construierten Geraden.

Hieraus ist aber weiters zu ersehen, dass der geometrische Ort diejenige windschiefe Fläche sein werde, welche von allen diesen Geraden gebildet wird.

Dass die Fläche in der That windschief ist, wird bewiesen sein, wenn man zu zeigen vermag, dass kein Paar solcher Geraden sich schneiden könne.

Zum Behufe dieses Nachweises zeichnen wir eine zweite gleichwertige Gerade (bq, bq'), welche von dem Punkte b des Kreises C ausgeht. Hierbei ist, sowie vorher, bq senkrecht zu $m_1 b$ und bq' normal zu bm_2. Die beiden Geraden ap und bq mögen sich in einem Punkte x und die Geraden ap' und bq' in x' schneiden. Lägen x und x' in einer und derselben zur Grundlinie senkrechten Geraden, so würden sich die beiden Geraden (ap, ap') und (bq, bq') in dem Punkte (x, x') schneiden. Dass dies aber nicht stattfinden könne, geht aus folgender Betrachtung hervor. Gesetzt, xx' wäre wirklich senkrecht zur Grundlinie, so würde infolge der ähnlichen Dreiecke xax' und $m_1 a m_2$ die Proportion

$$xa : am_1 = xx' : m_1 m_2$$

und infolge der Ähnlichkeit der Dreiecke xbx' und $m_1 b m_2$ die Proportion:

$$xb : bm_1 = xx' : m_1 m_2$$

bestehen. Aus diesen Proportionen würde sodann die nachstehende folgen:

$$xa : am_1 = xb : bm_1,$$

d. h. die beiden rechtwinkligen Dreiecke xam_1 und xbm_1 müssten ähnlich und, da sie die Hypotenuse xm_1 gemein haben, überdies auch congruent sein. Hieraus würde sich aber ergeben, dass:

$$xa = xb \text{ und } am_1 = bm_1 \text{ sei.}$$

Die erste Gleichung würde verlangen, dass x, also auch x' in der Grundlinie liege, die zweite dagegen, dass die beliebigen Punkte a und b von m_1 gleich weit entfernt seien, was offenbar unmöglich ist.

Das zweite System der Geraden, welche den geometrischen Ort erfüllen, erhalten wir vermittelst der in der Halbierebene H_1 liegenden Ellipse E_1.

Ist aa' (Taf. III, Fig. 22) ein beliebiger Punkt dieser Ellipse und ziehen wir ap senkrecht zu am_1 und $a'p'$ senkrecht zu $a'm_2$, so lässt sich nachweisen, dass jeder Punkt (p, p') der Geraden $(ap, a'p')$ dem geometrischen Orte angehöre.

Denken wir uns nämlich ap'' senkrecht zu am_2 gezogen, so ist $p''m_2 = p'm_2$. Im vorigen Falle wurde aber nachgewiesen, dass

$$pm_1 : p''m_2 = k$$

ist; es ist demgemäß nun auch

$$pm_1 : p'm_2 = k,$$

d. h. der beliebige auf $(pa, p'a')$ angenommene Punkt (p, p'), mithin also auch die Gerade $(pa, p'a')$ in ihrer ganzen Ausdehnung, gehört dem geometrischen Orte an.

Das Gleiche gilt nunmehr von allen anderen Geraden, welche in derselben Weise, wie eben besprochen, construiert werden können.

Der geometrische Ort ist daher durch ein zweites System von geraden Linien erfüllt.

Auch dieses System von Geraden bildet eine windschiefe Fläche, da leicht gezeigt werden kann, dass sich auch diesfalls zwei beliebige Geraden $(ap, a'p')$ und $(bq, b'q)$ nie schneiden können. Denn würden dieselben einen Punkt (x, x') gemein haben, so müssten sich auch die in Bezug auf die Grundlinie zu $a'p'$ und $b'q'$ symmetrischen Geraden ap'' und bq'' in einem Punkte x'' schneiden und müsste der letztere eine zu x' symmetrische Lage haben, also auf (x, x') liegen. Dass dies jedoch nicht vorkommen könne, wurde bereits im vorhergehenden Falle nachgewiesen.

Es erübrigt demnach nur noch, nachzuweisen, dass die beiden Systeme von Geraden einer und derselben windschiefen Fläche angehören.

Dies wird unmittelbar einleuchten, wenn der Nachweis erbracht ist, dass jede beliebige Gerade der ersten Schar von jeder beliebigen Geraden der zweiten Schar geschnitten wird.

Denken wir uns demnach durch den Punkt (a, a') (Taf. III, Fig. 23) eine Gerade der ersten Schar, und durch den Punkt (b, b') eine Gerade der zweiten Schar gezogen. Die verticalen Projectionen dieser Geraden mögen sich in n und die horizontalen Projectionen in n' treffen. Es kann nun gezeigt werden, dass nn' zur Grundlinie senkrecht sei. Wäre dies nämlich nicht der Fall, sondern wäre allenfalls nxy die durch n zur Grundlinie geführte Senkrechte, so müsste, da (n, x) ein Punkt der Geraden (an, an') ist,

$$nm_1 : xm_2 = k,$$

und in gleicher Weise auch

$$nm_1 : ym_2 = k$$

sein; es müsste also $xm_2 = ym_2$ werden, was nur dann möglich wäre, wenn x und y zusammenfallen, d. i. durch den Schnittpunkt n' von an' und $b'n'$ repräsentiert würden.

Der gesuchte geometrische Ort ist mithin eine windschiefe Fläche, welche durch zwei Systeme von Geraden erzeugt wird.

Als Schnitt der so erzeugten Fläche mit den beiden Halbierebenen H und H_1 ergeben sich Ellipsen. Hieraus folgt, dass der unter den vorher festgestellten Bedingungen ermittelte geometrische Ort ein windschiefes Hyperboloid sei.

Da die Gerade $m_1 m_2$, welche die kürzeste Distanz der Geraden h_1 und h_2 vorstellt, den Kreis C, also auch die beiden Ellipsen in α und β rechtwinklig trifft, so ist dieselbe eine Normale des Hyperboloides in den beiden Punkten α und β, d. h. die Gerade $\alpha\beta$ ist eine Hauptachse des Hyperboloides. Es folgt demnach der Satz:

105. „*Der geometrische Ort der Punkte, deren Abstände von zwei festen sich kreuzenden Geraden in constantem Verhältnisse stehen, ist ein windschiefes Hyperboloid.*“

Anschließend an den vorstehenden Satz kann nunmehr eine ganze Reihe weiterer Sätze, die sich auf ebenso einfache Weise, wie der vorhergegangene ableiten lassen, festgestellt werden.

§. 108.

Der geometrische Ort der Punkte, welche von zwei sich nicht schneidenden Geraden h_1 und h_2 gewisse Abstände besitzen, die in einem constanten Verhältnisse k zu einander stehen, kann auch folgendermaßen ermittelt werden.

Man denke sich die eine der beiden Geraden, etwa h_1, als Achse eines geraden Kreiscylinders, dessen Kreisschnitt einen beliebigen Radius r_1 haben möge. Construieren wir ferner einen zweiten geraden Kreiscylinder, dessen Achse die Gerade h_2 ist, und dessen Kreisschnitt einen Radius r_2 besitzt. Der letztgenannte Halbmesser r_2 stehe mit dem ersteren r_1 in dem constanten Verhältnisse: $r_1 : r_2 = k$.

Diese beiden Cylinder werden sich selbstverständlich in einer Raumcurve vierter Ordnung schneiden, und jeder Punkt dieser Raumcurve wird, gemäß der angedeuteten Construction, von der Geraden h_1 den Abstand r_1 und von der Geraden h_2 dagegen den Abstand r_2 besitzen. Nachdem aber diese beiden Abstände in dem gegebenen constanten Verhältnisse k stehen, so wird auch jeder Punkt der genannten Raumcurve ein Punkt des verlangten geometrischen Ortes sein.

Lässt man nun r_1 alle Werte stetig durchlaufen und hiermit gleichzeitig $k.r_2$, also auch r_2 sich stetig verändern, so wird man unendlich viele Paare solcher Kreiscylinder erhalten, deren gegenseitige Schnitte das Hyperboloid erzeugen werden. Wir gelangen demnach zu dem Satze:

106. „*Sind zwei sich nicht schneidende Geraden als Achsen zweier Scharen gerader Kreiscylinder gegeben, und lässt man solche Cylinder einander entsprechen, deren Kreisschnittsradien in einem constanten Verhältnisse stehen, so erzeugt die Schnittcurve vierter Ordnung entsprechender Cylinder ein windschiefes Hyperboloid.*"

Da der ebene Schnitt eines Hyperboloides ein Kegelschnitt ist, so ergibt sich aus dem Satze 105) unmittelbar der nachstehende:

107. „*In einer Ebene ist der geometrische Ort der Punkte, welche von zwei diese Ebene schneidenden Geraden Abstände besitzen, die in constantem Verhältnisse stehen, ein Kegelschnitt.*"

§. 109.

Untersuchen wir noch den besonderen Fall, in welchem das vorgenannte Verhältnis $k = 1$ wird, in welchem also die Punkte von den beiden sich kreuzenden Geraden h_1 und h_2 gleiche Abstände besitzen.

Wie vorher, denken wir auch hier die Linie $m_1 m_2$ (Taf. III, Fig. 24) des kürzesten Abstandes der beiden Geraden h_1 und h_2 als Grundlinie G angenommen, und führen durch dieselbe die beiden Projectionsebenen beziehungsweise senkrecht zu h_1 und h_2, wobei wir abermals, um kurz zu sprechen, die eine als verticale, die andere als horizontale Projectionsebene bezeichnen wollen.

Ziehen wir nun die Gerade l, welche zur Grundlinie G senkrecht steht und durch den Mittelpunkt der Strecke $m_1 m_2$ geht.

Nehmen wir auf dieser Geraden einen beliebigen Punkt an, und betrachten wir denselben als die vereinigte verticale und horizontale Projection a und a' eines Punktes A im Raume, so ist $am_1 = a'm_2$.

Nachdem aber die Gerade h_1 in m_1 verticalprojicierend, und die Gerade h_2 in m_2 horizontalprojicierend ist, so folgt unmittelbar, dass am_1 und $a'm_2$ die wahren Größen der Abstände des Punktes (a, a') von den Geraden h_1 und h_2 darstellen.

Da weiters der Punkt (a, a') in einer Ebene H liegt, welche den Winkel zwischen den Projectionsebenen halbiert, so ergibt sich, dass der Schnitt der Ebene H mit der durch l senkrecht zur Grundlinie G geführten Ebene dem gesuchten geometrischen Orte angehöre. Wir wollen diese Gerade mit (l, l') bezeichnen.

Ziehen wir ferner die Gerade g durch a senkrecht zu am_1, sowie die Gerade g' senkrecht zu $a'm_2$ durch a', und betrachten wir g und g' beziehungsweise als die verticale und horizontale Projection einer Geraden im Raume, so ist leicht nachzuweisen, dass dieselbe gleichfalls dem gesuchten geometrischen Orte angehöre.

Sind nämlich p und p' die Projectionen eines Punktes dieser Geraden (g, g'), so findet man infolge der auftretenden gleichen Winkel, dass die Dreiecke apm_1 und $a'p'm_2$ ähnlich sind. Besagte Dreiecke besitzen aber ein Paar entsprechender gleicher Seiten, d. i. am_1 und $a'm_2$; es sind daher auch die Seiten pm_1 und $p'm_2$ einander gleich, d. h. der auf (g, g') willkürlich gewählte Punkt (p, p') hat von den Geraden h_1 und h_2 gleiche Abstände.

Der Geraden (g, g') kömmt aber noch eine weitere Eigenschaft zu. Zieht man nämlich $a\eta$ senkrecht zu l, also parallel zur Grundlinie G, so schließen g und g' mit $a\eta$, also auch mit der Grundlinie G, weil die beziehungsweise auf g und g' senkrecht stehenden Geraden am_1 und $a'm_2$ mit l gleiche Winkel bilden, gleiche Winkel ein.

Wir wissen aber, dass eine Gerade, deren Projectionen gegen die Grundlinie gleich geneigt sind, zu einer derjenigen Ebenen parallel sein müsse, welche den Winkel zwischen den Projectionsebenen halbieren. Im vorliegenden Falle ist es die winkelhalbierende Ebene H_1, welche zu der früher genannten Ebene H senkrecht steht.

Da jedem Punkte (a, a') eine Gerade (g, g') entspricht, so folgt, dass der gesuchte geometrische Ort durch eine Schar von Geraden erfüllt wird, welche die Gerade (l, l') schneiden, und zu der winkelhalbierenden Ebene H_1 der Projectionsebenen parallel sind. Dieselben werden sohin folgerichtig eine windschiefe Fläche bilden. Windschief deshalb, weil die Gerade (l, l') zu H_1 nicht parallel ist, und auch keine zwei Geraden der Schar unter einander parallel sein können.

Es existiert aber noch eine zweite Schar von Geraden, welche dem nämlichen geometrischen Orte angehören.

Nehmen wir nämlich auf l (Taf. III, Fig. 25) zwei Punkte a und a' an, welche gegen die Grundlinie G symmetrisch liegen, und betrachten wir dieselben als die bezügliche verticale und horizontale Projection eines Punktes A im Raume, so folgt aus $am_1 = a'm_2$, dass der Punkt (a, a') von den Geraden h_1 und h_2 ebenfalls gleichweit abstehe. Nachdem aber ein Punkt, dessen Projectionen von der Grundlinie gleichweit entfernt sind, in der den Winkel der Projectionsebenen halbierenden Ebene H_1 liegt, so folgt, dass die Schnittgerade

(g_1, g'_1) dieser Ebene H_1 mit der durch l senkrecht zur Grundlinie G gelegten Ebene dem geometrischen Orte angehöre.

Denken wir uns ferner die Gerade λ durch a senkrecht zu am_1 und die Gerade λ' durch a' senkrecht zu $a'm_2$ gezogen, und betrachten wir λ und λ' als Projectionen einer Geraden im Raume, so lässt sich leicht zeigen, dass auch diese Gerade (λ, λ') eine Gerade des geometrischen Ortes darstelle.

Ist nämlich (p, p') ein beliebiger Punkt von (λ, λ'), so sind die Dreiecke apm_1 und $a'p'm_2$ congruent, da sie zwei gleiche Seiten am_1 und $a'm'_2$ besitzen, und die entsprechenden drei Winkel gleich haben Hieraus folgt aber, dass auch $m_1p = m_2p'$ ist, dass also jeder beliebige Punkt von (λ, λ') dem geometrischen Orte angehöre. Dasselbe gilt selbstverständlich von allen Geraden, welche auf dieselbe Weise wie (λ, λ') construiert werden.

Berücksichtigt man ferner, dass am_1 und $a'm_2$, also auch die auf ihnen senkrecht stehenden Geraden λ und λ' stets untereinander parallel sind, so folgt, da Gerade, deren Projectionen untereinander parallel sind, zu einer der Winkelhalbierebenen parallel laufen, dass der geometrische Ort auch durch eine gewisse Schar von Geraden erfüllt werde, welche die Gerade (g_1, g'_1) schneiden, und zur Winkelhalbierebene H_1 parallel sind. Selbstverständlich erzeugt diese Schar von Geraden, sowie jene der ersteren eine windschiefe Fläche.

Es ist jedoch leicht nachzuweisen, dass diese beiden windschiefen Flächen zusammenfallen, d. h. dass jede Gerade (λ, λ') der einen Schar von allen Geraden (g, g') der anderen Schar geschnitten wird.

Es wird offenbar genügen, zu zeigen, dass irgend eine beliebige Gerade (g, g') von einer beliebigen Geraden (λ, λ') in einem Punkte getroffen werde.

Sei x (Taf. III, Fig. 26) der Schnittpunkt der verticalen Projectionen g und λ; x' der Schnittpunkt der horizontalen Projectionen g' und λ'.

Es genügt, diesfalls zu zeigen, dass die Gerade xx' senkrecht zur Grundlinie stehe. Wäre letzteres nicht der Fall, sondern wäre allenfalls $x'x_1x_2$ diese Senkrechte (geführt durch den Punkt x'), so müsste nach Früherem, indem (x_1, x') einen Punkt der Geraden (g, g') und (x_2, x') einen Punkt der Geraden (λ, λ') repräsentiert, $x'm_2 = x_1m_1$ und $x'm_2 = x_2m_1$, also auch $x_1m_1 = x_2m_1$ sein.

Offenbar wird diese Gleichung nur dann stattfinden können, wenn x_1 und x_2 mit dem Schnittpunkte x von g und λ zusammenfallen, oder mit anderen Worten, wenn die Geraden (g, g') und (λ, λ') stets einen Punkt (xx') gemein haben.

Hieraus folgt aber, dass die beiden Scharen von Geraden g und λ einer und derselben windschiefen Fläche angehören, und dass, nachdem die Geraden der beiden Scharen beziehungsweise zu den Ebenen H_1 und H parallel sind, der nachstehende Satz als bewiesen angesehen werden kann.

108. „Der geometrische Ort aller Punkte, welche von zwei sich nicht schneidenden Geraden gleich weit abstehen, ist ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid. Als Richtebenen dieses Paraboloides können jene zwei Ebenen betrachtet werden, welche durch die Linie des kürzesten Abstandes der gegebenen Geraden gehen, und gegen letztere gleich geneigt sind.“

Das vorstehende Paraboloid wird das „äquidistante Paraboloid“ der beiden gegebenen sich kreuzenden Geraden genannt.

§. 110.

Mit Zuhilfenahme des vorstehenden Satzes und der anderweitigen Erzeugungsweisen des geometrischen Ortes werden nun anstandslos weitere Sätze abgeleitet werden können.

Betrachtet man beispielsweise die beiden gegebenen Geraden h_1 und h_2 als Achsen zweier geraden Kreiscylinder mit gleichen Kreisschnittsradien, so werden sich dieselben in einer Raumcurve vierter Ordnung schneiden, deren jeder Punkt von h_1 und h_2 gleich weit entfernt ist. Ändert man die Größe der genannten Radien, so wird die obige Raumcurve das äquidistante Paraboloid der beiden Geraden h_1 und h_2 erzeugen. Es gilt daher der Satz:

109. „Sind zwei sich kreuzende Geraden als Achsen zweier Systeme von geraden Kreiscylindern gegeben, und lässt man in diesen Systemen solche Cylinder einander entsprechen, deren Kreisschnitte gleiche Radien besitzen, so erzeugt die Durchschnittscurve vierter Ordnung entsprechender Cylinder ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid.“

§. 111.

Es ist ferner einleuchtend, dass ein Punkt, der von zwei beliebigen Geraden im Raume gleich weit absteht, als Mittelpunkt einer Kugel betrachtet werden kann, welche die beiden gegebenen Geraden berührt, und deren Radius jenen Abständen gleich ist.

Es kann sonach direct der folgende Satz aufgestellt werden:

110. „*Der Ort des Mittelpunktes einer (veränderlichen) Kugel, welche in jeder Lage zwei feste sich nicht schneidende Geraden berührt, ist ein gleichseitig-hyperbolisches Paraboloid.*"

§. 112.

Nachdem der Schnitt einer Ebene mit einem hyperbolischen Paraboloide im allgemeinen „eine Hyperbel", in dem Falle aber, wenn die schneidende Ebene parallel zur Achse (oder parallel zum gegenseitigen Schnitte der beiden Richtebenen) liegt, eine Parabel ist, so folgt aus dem Satze 108) unmittelbar der folgende:

111. „*Der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, welche von zwei sich nicht schneidenden Geraden gleiche Abstände besitzen, ist im allgemeinen eine Hyperbel; im besonderen aber, und zwar dann, wenn die oben genannte Ebene eine zu der Geraden des kürzesten Abstandes jener zwei festen Geraden parallele Lage annimmt wird der besagte geometrische Ort eine Parabel sein.*"

VIII. Capitel.

Das windschiefe oder einmantelige Rotationshyperboloid.

§. 113.

Früher wurde bereits nachgewiesen, dass jedem windschiefen Hyperboloide ein Asymptotenkegel entspricht, und dass eine Ebene das Hyperboloid und den Asymptotenkegel in concentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten schneidet, sowie auch, dass drei beliebige conjugierte Durchmesser des Asymptotenkegels gleichzeitig conjugierte Durchmesser des Hyperboloides sind.

Hierauf gestützt, wurde festgestellt, dass das Hyperboloid durch zwei Parallelscharen von Ebenen, welche mit der einen Achsenebene gleiche Winkel bilden, nach Kreisen geschnitten werde, und dass diese Parallelscharen von Ebenen keine anderen als die Kreisschnittsebenen des Asymptotenkegels seien.

Nehmen wir nun an, dass die beiden Kreisebenen des Asymptotenkegels in eine zusammenfallen. Selbstverständlich stimmen dann beide mit derjenigen Hauptebene überein, gegen welche dieselben im

„allgemeinen Falle“ gleichgeneigt wären; es übergeht somit der Asymptotenkegel in einen geraden Kreiskegel.

Unter solchen Verhältnissen werden auch die beiden Scharen von Kreisschnittsebenen coincidieren, und das Hyperboloid wird durch Ebenen, welche zu der einen Hauptachse senkrecht stehen, in Kreisen geschnitten werden.

Denken wir uns (Z, Z') (Taf. IV, Fig. 27) als die vorgenannte Hauptachse und (g, g') als irgend eine beliebige Erzeugende des Hyperboloides, so ist sofort klar, dass durch diese Bestimmungsstücke das bezeichnete besondere Hyperboloid vollkommen bestimmt sei.

Legen wir nämlich irgend eine beliebige zur Achse (Z, Z') senkrechte Ebene e_1 (dieselbe wird, da (Z, Z') horizontalprojicierend angenommen oder durch Transformation in die bezeichnete Lage überführt wurde, parallel zur horizontalen Projectionsebene sein), so schneidet dieselbe das Hyperboloid in einem Kreise (K_1, K'_1), welcher vollkommen bestimmt ist. Denn der Mittelpunkt desselben ist der Schnittpunkt (o_1, o'_1) der Ebene e_1 mit der Achse (Z, Z'), und ein Punkt seiner Peripherie ergibt sich im Schnitte (a_1, a'_1) der Ebene e_1 mit der Erzeugenden (g, g').

Lässt man die Ebene e_1 ihre Lage in der Weise verändern, dass sie stets zur horizontalen Projectionsebene parallel bleibt, so wird der seiner Größe nach sich ändernde Kreis (K_1, K'_1) eine Fläche erzeugen, von welcher sich nachweisen lässt, dass dieselbe ein Hyperboloid sei.

Denkt man sich nämlich die Gerade (g, g') um die Achse (Z, Z'), um irgend einen beliebigen Winkel φ gedreht, und nennen wir die Gerade (g, g') in ihrer neuen Lage, d. i. in ihrer Lage nach erfolgter Drehung (γ, γ'). Der Punkt (a_1, a'_1) hat bei der Drehung einen Bogen $a'_1 \alpha'_1$ beschrieben, welcher dem Kreise $(K_1 K'_1)$, also der vorgenannten Fläche angehört. Dasselbe gilt offenbar von jedem anderen Punkte (a_2, a'_2) beziehungsweise (α_2, α'_2) der Geraden g oder γ.

Die gedrehte Gerade liegt somit ihrer ganzen Länge nach auf der von dem Kreise K_1 erzeugten Fläche, oder mit anderen Worten: die nämliche Fläche kann auch in der Weise erzeugt gedacht werden, dass sich die Gerade (g, g') um die Achse (Z, Z') dreht.

Soll aber die so hervorgebrachte Fläche ein Hyperboloid sein, so muss dieselbe außer der Schar der Geraden (g, g'), (γ, γ') . . . noch eine zweite Schar von Geraden enthalten, deren jede von allen Geraden der ersten Schar geschnitten wird.

Dass dieser Forderung thatsächlich entsprochen werde, davon möge nachstehende Betrachtung uns die Überzeugung verschaffen.

Sei (Z, Z') (Taf. IV, Fig. 28), gleichbedeutend mit der vorhergehenden Annahme, die als Drehungsachse angenommene feste Gerade, ferner sei (g, g') irgend eine Erzeugende der Fläche, welche wir durch Drehung um (Z, Z') in eine zur verticalen Projectionsebene parallele Lage (g_1, g_1') bringen. In dieser Lage wird, dem Vorhergegangenen zufolge, die Gerade gleichfalls der fraglichen Fläche angehören.

Betrachten wir nun eine zweite Gerade (l_1, l_1'), deren horizontale Projection l'_1 mit g'_1 zusammenfällt und deren verticale Projection l_1 symmetrisch zu g_1 in Bezug auf Z als Symmetrieachse liegt, so wird man ohne weiteres darzuthun vermögen, dass diese Gerade (l_1, l'_1) der genannten Fläche angehöre.

Denn eine beliebige horizontale, d. i. zu (Z, Z') normale Ebene e_1 schneidet, wie vorher gezeigt wurde, die Fläche in einem Kreise (K_1, K_1'). Der letztere trifft die Gerade (g_1, g'_1) in einem Punkte (a_1, a'_1) und infolge der symmetrischen Lage von g_1 und l_1 gegen Z, auch die Gerade (l_1, l_1') in einem ähnlich gelegenen Punkte (α_1, α_1').

Dasselbe aber, was von dem beliebig gewählten Kreise (K_1, K_1') gilt, wird offenbar auch von jedem anderen Kreise (K_2, K_2') der Fläche behauptet werden können, und es ist somit einleuchtend, dass sämmtliche Punkte der Geraden (l_1, l'_1), also die genannte Gerade selbst auf der Fläche liege.

Sobald dies aber der Fall, kann die nämliche Fläche auch durch die Drehung der Geraden (l_1, l'_1) um die Achse (Z, Z') erzeugt werden.

Die Gerade (l_1, l'_1) gehört selbstverständlich nicht zu der Schar der Geraden (g_1, g'_1), sondern entspricht der zweiten Schar oder dem zweiten Systeme der die vorliegende windschiefe Fläche erzeugenden Geraden. Die bezeichnete Gerade (l_1, l'_1) hat aber mit einer dieser letztgenannten Erzeugenden (g_1, g_1') der Fläche einen Punkt gemein, da die beiden Geraden (l_1, l'_1) und (g_1, g_1') gegen einander geneigt sind und in einer und derselben zur verticalen Projectionsebene parallelen Ebene liegen.

Hieraus folgt aber unmittelbar, dass die Gerade (l_1, l'_1) in der eben eingenommenen Lage, sowie in jeder anderen Lage, welche die besagte Erzeugende bei der Drehung um Z annehmen kann, von sämmtlichen Geraden der Schar g geschnitten wird.

Die Fläche besitzt daher zwei Systeme geradliniger Erzeugenden von der Beschaffenheit, dass jede Gerade des einen Systems von allen Geraden des anderen Systems geschnitten wird.

Eine so gebildete Fläche kann, auf Grund der in kurzen Umrissen angedeuteten Entstehungsweise derselben, offenbar nur ein Hyperboloid sein. Wählt man drei beliebige Geraden der einen

Schar, so sind auch sämmtliche Geraden der anderen Schar, da diese die ersteren schneiden müssen, und demnach die Fläche selbst vollkommen bestimmt. Daher der Satz:

112. „Eine Gerade, welche sich um eine zweite, die erstere nicht schneidende Gerade dreht, erzeugt ein windschiefes Hyperboloid.“

Letzteres Hyperboloid wird der Erzeugungsweise entsprechend, das „windschiefe Rotationshyperboloid“ genannt.

IX. Capitel.

Darstellung des allgemeinen Hyperboloides in verschiedenen Projectionsarten und Lösung einiger dasselbe betreffenden Aufgaben.

§. 114.

Bisher haben wir bloß die allgemeinste Darstellungsweise eines windschiefen Hyperboloides hervorgehoben und hierbei in den Vordergrund gestellt, dass man behufs Erzeugung desselben drei sich gegenseitig nicht schneidende Geraden als Leitlinien anzunehmen, beziehungsweise durch ihre Projectionen festzustellen und sodann einzelne Lagen von Erzeugenden, nach vorher ausgesprochenen Grundsätzen, zu construieren habe.

Nachdem aber durch das bereits Vorausgeschickte die Eigenschaften des Hyperboloides erörtert, klar gelegt und somit bekannt sind, wird es keinerlei Schwierigkeit unterliegen, dasselbe auch auf andere als die bisher besprochene und für gewisse Zwecke einfachere und vortheilhaftere Weise darzustellen.

Eine der am häufigsten vorkommenden Darstellungsweisen ist an die Annahme geknüpft, dass die eine Hauptebene des Hyperboloides, gewöhnlich die Ebene der Kehlellipse, parallel zur horizontalen und eine zweite Hauptebene parallel zur verticalen Projectionsebene sei.

Liegen die Bestimmungsstücke nicht unmittelbar in der hier angedeuteten oder in anderweitig festgestellten Weise vor, so kann selbstverständlich durch entsprechende „Transformation“ den jeweilig gestellten Bedingungen anstandslos Genüge geleistet werden.

Setzen wir also voraus, es sei' e (Taf. IV, Fig. 29) die Ebene der Kehlellipse E. Diese letztere wird, als parallel zur horizontalen

Projectionsebene angenommen, in der horizontalen Projection E', in wahrer Größe dargestellt erscheinen.

Die Tangentialebenen des Hyperboloides in den Punkten des Kehlkreises umhüllen einen zu der Ebene e senkrechten Cylinder; dieselben sind somit im vorliegenden Falle horizontal-projicierend.

Da aber jede Tangentialebene des Hyperboloides zwei Erzeugenden des letzteren enthält, welche verschiedenen Systemen angehören und sich im Berührungspunkte dieser Ebene schneiden, so gelangen wir zu dem Schlusse, dass die horizontalen Projectionen sämmtlicher Erzeugenden des Hyperboloides Tangenten an die horizontale Projection der Kehlellipse sind.

Behalten wir dieses Ergebnis im Auge, so werden wir weiter leicht festzustellen vermögen, dass ein windschiefes Hyperboloid auch dadurch vollkommen unzweideutig bestimmt werden könne, dass man dessen Kehlellipse (E, E') und einen Punkt (a, a') der Fläche angibt.

Auf Grund dieser Bestimmungsstücke ist man sofort im Stande die beiden Erzeugenden g und l zu finden, welche durch den betreffenden Punkt (a, a') gehen.

Die horizontalen Projectionen g' und l' derselben sind nämlich die von a' aus an die horizontale Projection E' der Kehlellipse gezogenen Tangenten.

Die besagten Tangenten berühren die Kehlellipse in den Punkten m' und n'. Dies sind zugleich die Horizontalprojectionen jener beiden Punkte (m, m') und (n, n'), in welchen die gesuchten Erzeugenden die Kehlellipse (E, E') treffen. Die Verticalprojectionen g und l ergeben sich unmittelbar als die Verbindungsgeraden der bezüglichen Punkte m und a, n und a.

Es unterliegt nunmehr auch keiner Schwierigkeit, beliebig viele Erzeugenden des Hyperboloides zu construieren.

Soll beispielsweise eine Erzeugende (l_1, l'_1) ermittelt werden, so wird es genügen, auf (g, g') irgend einen beliebigen Punkt (p, p') anzunehmen, durch p' die zweite Tangente l'_1 an die horizontale Projection E' der Kehlellipse zu führen, um so direct die horizontale Projection der verlangten Erzeugenden zu erhalten. Bestimmt man ferner die verticale Projection r des betreffenden Berührungspunktes r', so ist, wie früher, durch die Verbindungsgerade der Punkte p und r die Verticalprojection l_1 der gesuchten Erzeugenden dargestellt.

Hätte man eine Erzeugende des Systems g zu ermitteln, so wird bloß zu berücksichtigen sein, dass dieselbe die Erzeugende (l, l') in

irgend einem Punkte treffen müsse. Nimmt man diesen Punkt auf (l, l') beliebig an und construiert man die durch denselben gehende Erzeugende in der nämlichen Weise, wie vorher die Erzeugende l_1 durch den Punkt (p, p'), so ist der gestellten Forderung Genüge geschehen. Diese Betrachtung liefert somit den Satz:

113. „Ein windschiefes Hyperboloid ist vollkommen bestimmt, sobald die Kehlellipse und ein Punkt der Fläche gegeben ist.“

Ebenso einfach und leicht werden wir auch zur Kenntnis des Schnittes des Hyperboloides mit der horizontalen Projectionsebene gelangen.

Nachgewiesen wurde bereits, dass parallele ebene Schnitte des Hyperboloides ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte sind, deren Mittelpunkte auf dem der Schar paralleler schneidender Ebenen conjugierten Durchmesser liegen.

Im vorliegenden Falle wird daher der Schnitt des Hyperboloides mit der horizontalen Projectionsebene eine Ellipse sein, welche mit der Kehlellipse ähnlich und ähnlich gelegen ist.

Nachdem der zur Ebene der Kehlellipse (E, E') conjugierte Durchmesser des Hyperboloides die horizontal-projicierende Hauptachse (Z, Z') ist, so folgt, dass die Horizontalspur des Hyperboloides und die horizontale Projection E' der Kehlellipse concentrisch, ähnlich und ähnlich gelegen sein müssen.

Um diese Horizontalspur K des Hyperboloides constructiv festzustellen, wird es genügen, einen Punkt derselben zu kennen. Als solchen kann man direct den horizontalen Durchstoßpunkt $\varDelta'$ einer beliebigen Erzeugenden (g, g') wählen.

Sind nämlich $(1'2')$ und $(3'4')$ die Hauptachsen der Kehlellipse und schneidet die Gerade $O'\varDelta'$ die Kehlellipse in δ', so hat man bloß durch $\varDelta'$ parallele Geraden zu $\delta'1'$, $\delta'2'$, $\delta'3'$, $\delta'4'$ zu ziehen, um im Schnitte dieser mit $1'2'$ und $3'4'$ die Achsenendpunkte I', II', III', IV' der Horizontalspur K zu erhalten.

Soll zu dem durch die Kehlellipse und die Erzeugende (g, g') gegebenen Hyperboloide der Asymptotenkegel construiert werden, so wird man sich, um der gestellten Forderung mit Bequemlichkeit entsprechen zu können, bloß der Eigenschaften des letzteren zu erinnern haben.

In dieser Beziehung fanden wir bereits, dass der Scheitel des Asymptotenkegels gleichzeitig der Mittelpunkt des Hyperboloides, also auch der Mittelpunkt der Kehlellipse sei, dass die Erzeugenden desselben parallel laufen zu den Erzeugenden des Hyperboloides und dass irgend eine Ebene das Hyperboloid und den Asymptotenkegel stets

in concentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten schneidet.

Zieht man demnach durch den Mittelpunkt (O, O') der Kehlellipse eine Parallele (γ, γ') zu der Erzeugenden (g, g') des Hyperboloides, so wird diese bereits eine Erzeugende des Asymptotenkegels darstellen.

Die Horizontalspur K_α des Asymptotenkegels wird sodann eine Ellipse sein, welche einerseits durch die Horizontalspur h' von (γ, γ') geht und andererseits mit E' concentrisch, ähnlich und ähnlich gelegen ist. Die Hauptachsen dieser Ellipse K_α können auf dieselbe Weise, wie früher jene der Ellipse K, bestimmt werden.

Man kann jedoch diesbezüglich noch kürzer verfahren und schneller zum Ziele gelangen, indem man den Endpunkt der einen Achse sofort direct fesstellt.

Zieht man nämlich an die Kehlellipse E' eine Tangente L' parallel zur Achse $1'2'$ derselben oder parallel zur Grundlinie, so stellt diese die Horizontalprojection einer Erzeugenden vor, deren Verticalprojection L vermittelst (g, g') auf die vorher angegebene Weise construiert werden kann.

Die zu (L, L') durch (O, O') parallel gezogene Gerade (λ, λ') ist sodann eine Erzeugende des Asymptotenkegels (O, K_α) und nachdem besagte Erzeugende nothwendig in der zur verticalen Projectionsebene parallelen Achsenebene liegt, ist deren horizontaler Durchstoßpunkt η'_1 ein Punkt von $1'2'$, also ein Achsenendpunkt von K_α.

Die übrigen drei Achsenendpunkte lassen sich (durch ähnliche Dreiecke) aus $(\eta_1' \eta_1)$ leicht ableiten.

Die Contour des Hyperboloides auf der verticalen Projectionsebene ist der Durchschnitt der letzteren mit dem dem Hyperboloide umschriebenen vertical-projicierenden Cylinder, oder mit anderen Worten, ist die verticale Projection der Berührungscurve dieses Cylinders.

Nachdem aber die Erzeugenden des obgenannten Cylinders parallel zu der Hauptachse $(3\,4,\ 3'4')$ des Hyperboloides sind, so ist dessen Berührungscurve der Schnitt des Hyperboloides mit der der Achse $(3\,4,\ 3'4')$ conjugierten Hauptebene $(Z,\ 1\,2)$ oder ε_h.

Diese Ebene ε_h schneidet den Asymptotenkegel in den beiden Erzeugenden $(O\eta_1,\ O'\eta'_1)$ und $(O\eta_2,\ O'\eta'_2)$.

Berücksichtigen wir ferner, dass der Asymptotenkegel $(O,\ K_\alpha)$ das Hyperboloid längs des in unendlicher Entfernung liegenden Kegel-

schnittes berührt, so ergibt sich, dass die beiden Geraden $(O\eta_1, O'\eta'_1)$ und $(O\eta_2, O'\eta'_2)$ die Asymptoten der Schnittcurve repräsentieren, welche demgemäß eine Hyperbel (H, H') ist.

Die reelle Hauptachse dieser Hyperbel ist, was wohl nicht erst eines Beweises bedarf, die Hauptachse (1 2, 1'2') des Hyperboloides. Die Hyperbel (H, H') liegt in einer zur verticalen Projectionsebene parallelen Ebene ε_h und ihre verticale Projection H, die durch $O\eta_1$, $O\eta_2$ und 1 2 gegeben ist, erscheint daher in wahrer Größe.

§. 115.

6. Aufgabe. **Ein windschiefes Hyperboloid ist durch die Kehlellipse und den Asymptotenkegel gegeben; ein beliebiger ebener Schnitt des Hyperboloides ist durch ein Paar conjugierter Durchmesser darzustellen.**

Die Kehlellipse E sei durch ihre Achsen (1 2, 3 4) (Taf. IV, Fig. 30) in der horizontalen Ebene ε gegeben.

Der Mittelpunkt derselben, welcher gleichzeitig Scheitel des Asymptotenkegels ist, sei (O, O'). Die Trace des Asymptotenkegels auf der horizontalen Projectionsebene ist ein mit der horizontalen Projection der Kehlellipse concentrischer, ähnlicher und ähnlich gelegener Kegelschnitt, welcher gleichfalls durch seine Achsen $(I\,II, III\,IV)$ gegeben vorliege.

Durch Angabe dieser Stücke ist das Hyperboloid vollständig bestimmt und kann somit der Schnitt desselben mit einer Ebene $E_v E_h$ construiert werden.

Zunächst wollen wir untersuchen und feststellen, welche der Kegelschnittslinien diesfalls die fragliche Schnittcurve sein wird.

Legen wir zu diesem Zwecke durch den Scheitel (O, O') des Asymptotenkegels eine Ebene $e_v e_h$ parallel zu der gegebenen Ebene $E_v E_h$. Im vorliegenden Falle schneidet die Ebene $e_v e_h$ den Asymptotenkegel in keinen reellen Erzeugenden (da ihre Horizontalspur e_h an dem Kegelschnitte $I\,II\,III\,IV$ vorübergeht); es gibt daher auch auf dem Hyperboloide keine Erzeugende, welche zu der schneidenden Ebene parallel ist. Die Schnittcurve ist somit eine Ellipse.

Nachdem das Hyperboloid und dessen Asymptotenkegel von einer Ebene in concentrischen, ähnlich gelegenen Kegelschnitten getroffen wird, werden wir zunächst den Schnitt der Ebene $E_v E_h$ mit dem Asymptotenkegel ermitteln und sodann aus diesem die zu bestimmende Schnittcurve ableiten.

Wir führen zu diesem Behufe an die Horizontalspur K_α oder $I'\,II'\,III'\,IV'$ parallel zu E_h die beiden möglichen Tangenten und

bestimmen den ihnen conjugierten Durchmesser. Letzteres wird am einfachsten in folgender Weise geschehen können.

Man betrachtet die Ellipse K_α als affin entsprechend dem über $I' II'$ als Durchmesser beschriebenen Kreise $K_\alpha{}^0$. Der Achse $III' IV'$ der Ellipse entspricht sodann der Kreisdurchmesser $III_0 IV_0$. Zieht man durch IV' die Gerade $IV'\Delta$ parallel zu E_h, so entspricht derselben affin die Gerade $IV_0 \Delta$.

Der auf $IV_0\Delta$ senkrechte Kreisdurchmesser $\alpha_0\beta_0$ trifft den Kreis $K_\alpha{}^0$ in den Punkten α_0 und β_0, in welchen die Kreistangenten parallel zu $IV_0\Delta$ sind. Diesen Punkten entsprechen affin die Ellipsenpunkte α' und β'. In den letztgenannten Punkten haben selbstverständlich die Ellipsentangenten eine zu $IV'\Delta$, oder was dasselbe ist, eine zu E_h parallele Richtung. Hieraus folgt aber, dass die Gerade $\alpha'\beta'$ den der Richtung E_h conjugierten Durchmesser der Ellipse K_α darstelle.

Construiert man weiters die diesen Punkten entsprechenden Erzeugenden des Asymptotenkegels $(O\alpha, O'\alpha')$ und $(O\beta, O'\beta')$, so sind die horizontalen Tracen der ihnen entsprechenden Berührebenen des Kegels parallel zu E_h. Diese Berührebenen werden also von der Ebene E_vE_h in zwei zu E_h, also auch unter einander parallelen Tangenten jener Ellipse geschnitten, welche dem Asymptotenkegel und der Ebene E_vE_h gemeinsam ist. Die Berührungspunkte sind die Schnittpunkte der Erzeugenden $O\alpha$ und $O\beta$ mit der Ebene E_vE_h und die Verbindungsgerade derselben stellt einen Durchmesser der genannten Ellipse dar.

Um besagten Durchmesser zu erhalten, legen wir durch die beiden Erzeugenden $O\alpha$ und $O\beta$ die horizontalprojicierende Ebene h_h. Dieselbe schneidet die Ebene e_ve_h in der durch (O, O') gehenden Geraden (σ, σ') und die Ebene E_vE_h', als parallel zu e_ve_h, in einer zu (σ, σ') parallelen Geraden (s, s'), welche bereits den vorerwähnten Ellipsendurchmesser darstellt. Die Endpunkte (a, a') und (b, b') desselben ergeben sich direct im Schnitte mit den Erzeugenden $(O\alpha, O'\alpha')$ und $(O\beta, O'\beta')$.

Nachdem die Tangenten der Schnittellipse in den Punkten (a, a') und (b, b') parallel zu E_h sind, so erhält man ohneweiters den dem Durchmesser $(ab, a'b')$ conjugierten Durchmesser, wenn man durch den Mittelpunkt (m, m') von $(ab, a'b')$ eine Gerade (ϱ, ϱ') parallel zu E_h legt. Die Grenzpunkte dieser Durchmesser sind die Schnittpunkte der Geraden (ϱ, ϱ') mit dem Asymptotenkegel, welche, wie folgt, leicht ermittelt werden können. Die horizontale Trace der durch (O, O') und (ϱ, ϱ') gehenden Hilfsebene ist eine zu E_h parallele Gerade η_h, welche durch die Horizontalspur μ' der Geraden $(Om, O'm')$ geht. Dieselbe

trifft den Kegelschnitt K_α in den beiden Punkten γ' und δ', welche mittelst des Affinkreises K^0_α leicht erhalten werden. Die beiden Erzeugenden $(O\gamma, O'\gamma')$ und $(O\delta, O'\delta')$ des Asymptotenkegels liegen, der Construction gemäß, mit der Geraden (ϱ, ϱ') in einer und derselben Ebene, treffen diese daher in den beiden Punkten (c, c') und (d, d'), welche die Schnittpunkte von (ϱ, ϱ') mit dem Asymptotenkegel, also die Endpunkte des Ellipsendurchmessers (ϱ, ϱ') repräsentieren.

Die Ellipse, in welcher der Asymptotenkegel von der Ebene $E_v E_h$ geschnitten wird, ist somit durch die conjugierten Durchmesser $(ab, a'b')$ und $(cd, c'd')$ dargestellt.

Um den Schnitt der Ebene $E_v E_h$ mit dem Hyperboloide zu finden, werden wir bloß zu berücksichtigen haben, dass die diesfallsige Schnittfigur mit der eben construierten Ellipse ähnlich gelegen und concentrisch ist. Zur Bestimmung des verlangten Schnittes wird somit die Kenntnis eines seiner Punkte vollkommen ausreichen.

Um jedoch ein Paar conjugierter Durchmesser direct zu finden, erscheint es angemessener, sogleich die Schnittpunkte der Geraden (ϱ, ϱ') mit dem Hyperboloid aufzusuchen, was allenfalls in nachstehender Weise geschehen kann.

Die Gerade (ϱ, ϱ') ist horizontal. Wir legen daher durch dieselbe eine horizontale Ebene H_v, welche das vorliegende Hyperboloid in einer Ellipse, die ähnlich und ähnlich gelegen zur Kehlellipse ist, schneiden wird. Die Achsen der zu bestimmenden Schnittellipse sind demnach leicht construierbar. Die Schnittpunkte (C, C') und (D, D') dieser Ellipse mit der Geraden (ϱ, ϱ') können mittelst eines affinen Kreises direct bestimmt werden.

Nachdem die verlangte Schnittcurve ähnlich, ähnlich gelegen und concentrisch mit dem Kegelschnitte (ab, cd) ist, und CD den mit cd zusammenfallenden Durchmesser vorstellt, so ergibt sich der andere Durchmesser AB direct durch die Proportion

$$Am : Cm = am : cm.$$

§. 116.

7. *Aufgabe.* **„Der Schnitt eines Rotationshyperboloides mit einer Ebene ist direct durch seine Achsen darzustellen.“**

a) Die schneidende Ebene ist zu keiner Erzeugenden des Hyperboloides parallel; die Schnittcurve wird demgemäß eine Ellipse sein.

Die horizontale Projectionsebene nehmen wir wieder senkrecht zu der Drehungsachse (Z, Z') (Taf. IV, Fig. 31) des Hyperboloides an.

Das Hyperboloid selbst sei durch den Kehlkreis (K, K') und durch die Asymptoten (A_1, A_1') und (A_2, A_2') des verticalen Hauptschnittes oder des Hauptmeridians (Contourgeraden des Asymptotenkegels in der verticalen Projection) gegeben. Die schneidende Ebene E ist durch ihre Tracen $E_v E_h$ bestimmt. Besagte Ebene schneidet, parallel zu sich selbst so weit verschoben, bis sie durch den Mittelpunkt (O, O') des Hyperboloides geht, den Asymptotenkegel (der Voraussetzung nach) nicht in reellen Erzeugenden, daher der gesuchte Schnitt eine Ellipse sein wird.

Um die Achsen dieser Ellipse zu ermitteln, denken wir uns durch die Achse (Z, Z') des Umdrehungshyperboloides eine Ebene H senkrecht zu der gegebenen Ebene $E_v E_h$ geführt. Diese Ebene H, deren Horizontaltrace H_h senkrecht zur Horizontaltrace E_h der gegebenen Ebene steht, ist, wie überhaupt jede durch die Drehachse des Hyperboloides gehende Ebene eine Ebene orthogonaler Symmetrie für das Hyperboloid.

Die Schnittgerade (s, s') der Ebene H mit jener E wird infolge dessen gleichfalls eine Achse orthogonaler Symmetrie für die dem Hyperboloide und der Ebene $E_v E_h$ gemeinschaftliche Curve, d. h. eine Hauptachse der darzustellenden Ellipse sein.

Um die Endpunkte (A, A') und (B, B') derselben, d. h. die Schnittpunkte von (s, s') mit dem Hyperboloide zu ermitteln, stellen wir folgende Betrachtung an.

Ziehen wir parallel zur verticalen Projectionsebene (richtiger gesagt, parallel zur Grundlinie) eine Tangente g' an den Kehlkreis K', und betrachten wir dieselbe als Horizontalprojection einer Geraden (g, g'), deren verticale Projection g mit der Geraden A_2 (oder auch mit A_1) zusammenfällt, so repräsentiert bekanntlich diese Gerade (g, g') eine zur verticalen Projectionsebene parallele Erzeugende des vorliegenden Hyperboloides, welches nunmehr auch durch Umdrehung von (g, g') um (Z, Z') erzeugt gedacht werden kann. Um die Schnittpunkte (A, A') und (B, B') der Geraden (s, s') mit diesem Hyperboloide zu construieren, wird man vor allem zu berücksichtigen haben, dass die Gerade (s, s'), da sie in der die Drehungsachse (Z, Z') enthaltenden Ebene H liegt, die Drehungsachse in einem Punkte (S, S') schneidet, und dass diese somit bei der Umdrehung um (Z, Z') einen geraden Kreiskegel (S, K_2), ihre Schnittpunkte (A, A') und (B, B') mit dem Hyperboloide dagegen zwei Kreise, welche selbstverständlich auch dem letzteren angehören werden, beschreiben wird.

Diese beiden Kreise sind vollkommen bestimmt, sobald von jedem irgend ein Punkt bekannt ist. Einen solchen Punkt erhält man

im Durchschnitte des Kegels (S, K_2) mit der Geraden (g, g'). Legt man zu diesem Zwecke durch (S, S') und durch (g, g') eine Ebene e, so schneidet die Horizontaltrace e_h derselben die Basis K'_2 des Kegels (S, K_2) in zwei Punkten (α, α') und (β, β'), während die durch diese Punkte gehenden Kegelerzeugenden die Gerade (g, g') in den beiden Punkten (a, a') und (b, b') treffen, welche bei der Drehung um (Z, Z') jene beiden Kreise beschreiben, die dem Kegel und dem Hyperboloid gemeinschaftlich sind. Diese Kreise begegnen der Kegelerzeugenden (s, s') in den Punkten (A, A') und (B, B'), in welchen die letztere das Hyperboloid schneidet.

Es wird demgemäß $(AB, A'B')$ die eine Achse der gesuchten Ellipse darstellen.

Die zweite Achse geht durch den Mittelpunkt der Ellipse und steht auf (s, s') senkrecht. Dieselbe ist somit durch die Gerade $(\varepsilon, \varepsilon')$ repräsentiert, welche durch den Halbierungspunkt (M, M') von $(AB, A'B')$ parallel zur Horizontaltrace E_h der schneidenden Ebene gezogen wird.

Um deren Endpunkte (C, C') und (D, D'), d. i. die Schnittpunkte von $(\varepsilon, \varepsilon')$ mit dem Hyperboloide, zu ermitteln, legen wir durch $(\varepsilon, \varepsilon')$ eine zur Achse (Z, Z') senkrechte, also zur horizontalen Projectionsebene parallele Ebene P. Letztgenannte Ebene schneidet das Hyperboloid in einem Kreise (K_3, K'_3), welcher in der horizontalen Projection als Kreis K'_3 mit dem Mittelpunkte Z' in wahrer Größe erscheint und durch den Punkt (x, x'), in welchem (g, g') von der genannten Ebene geschnitten wird, geht. Der Kreis (K_3, K'_3) trifft $(\varepsilon, \varepsilon')$ in den gesuchten Endpunkten (C, C') und (D, D').

Die Ellipse, welche sich als Schnitt des Hyperboloides mit der Ebene $E_v E_h$ ergibt, ist somit durch ihre Achsen $(AB, A'B')$ und $(CD, C'D')$ dargestellt.

$A'B'$ und $C'D'$ sind auch die Hauptachsen der horizontalen Projection dieser Ellipse, während AB und CD zwei conjugierte Durchmesser der verticalen Projection der Schnittellipse repräsentieren.

§. 117.

b) Die schneidende Ebene ist parallel zu zwei Erzeugenden des Umdrehungshyperboloides; der gegenseitige Schnitt ist demnach eine Hyperbel.

Die horizontale Projectionsebene setzen wir normal zur Rotationsachse (Z, Z') (Taf. V, Fig. 32) des Hyperboloides voraus und nehmen weiters an, dass das Hyperboloid durch den Kehlkreis (K, K') und die verticalen Contourerzeugenden (A_1, A') und (A_2, A'_2) des Asymptotenkegels bestimmt sei. Die Trace des Asymptotenkegels auf der hori-

zontalen Projectionsebene ist ein Kreis K'_1, welcher die Verbindungsgerade der horizontalen Durchstoßpunkte von (A_1, A'_1) und (A_2, A'_2) zum Durchmesser hat.

Die schneidende Ebene $E_v E_h$ ist, der Voraussetzung gemäß, parallel zu zwei Erzeugenden des Hyperboloides, und eine Ebene $E'_v E'_h$, welche parallel zu derselben durch den Scheitel (O, O') des Asymptotenkegels geführt wird, schneidet den letzteren in zwei reellen Erzeugenden (σ_1, σ'_1) und (σ_2, σ'_2).

Um die Hauptachsen der Schnitthyperbel oder, was in diesem Falle auf dasselbe hinausläuft, die reelle Achse und die beiden Asymptoten der Schnittcurve zu bestimmen, denken wir uns, wie im vorhergehenden Falle, durch die Achse (Z, Z') des Hyperboloides eine Ebene H senkrecht zur schneidenden Ebene $E_v E_h$ gelegt.

Nachdem diese Ebene H eine Ebene orthogonaler Symmetrie für das Hyperboloid ist, so schneidet dieselbe die zu ihr senkrechte Ebene $E_v E_h$ in einer Geraden (s, s'), welche eine Achse orthogonaler Symmetrie für die der Ebene E und dem Hyperboloid gemeinsame Curve ist, und welche somit eine Hauptachse der gesuchten Hyperbel darstellt.

Die Endpunkte (A, A') und (B, B') der letztgenannten Achse, welche keine anderen sind, als die Schnittpunkte von (s, s') mit dem Hyperboloide, können in voller Übereinstimmung mit der vorher besprochenen Bestimmungsweise festgestellt werden. Man bestimmt nämlich zunächst eine Erzeugende des Hyperboloides, am einfachsten eine Erzeugende (g, g'), deren horizontale Projection g' eine zur Grundlinie parallele Tangente an die Horizontalprojection K' des Kehlkreises vorstellt und deren Verticalprojection g mit einer der beiden Geraden A_1 oder A_2 zusammenfällt.

Der Kreiskegel, welchen die Gerade (s, s') bei der Umdrehung um (Z, Z') beschreibt, schneidet die Gerade (g, g') in zwei Punkten (a, a') und (b, b'), welche ihrerseits bei der Umdrehung um (Z, Z') zwei Kreise erzeugen, die dem genannten Hyperboloide gemeinschaftlich sind, und auf welchen demgemäß die zu bestimmenden Schnittpunkte (A, A') und (B, B') liegen. Halbiert man die Strecke $(AB, A'B')$ in (M, M'), so erhält man den Mittelpunkt der darzustellenden Hyperbel.

Berücksichtigt man endlich, dass die schneidende Ebene $E_v E_h$ parallel ist zu zwei Erzeugenden des Hyperboloides, welche ihrerseits wieder zu den beiden Erzeugenden (σ_1, σ_1') und (σ_2, σ_2') des Asymptotenkegels (O, K_1) parallel sind, so ergeben sich die

Asymptoten der Schnitthyperbel direct als jene Geraden (Σ_1, Σ_1') und (Σ_2, Σ_2'), welche durch (M, M'), beziehungsweise parallel zu (σ_1, σ_1') und (σ_2, σ_2') geführt werden.

§. 118.

c) Die schneidende Ebene sei parallel zu einer Berührebene des Asymptotenkegels; der Schnitt derselben mit dem Hyperboloide wird folglich eine Parabel sein.

Das Hyperboloid sei, wie in den beiden vorhergehenden Fällen, durch die zur horizontalen Projectionsebene senkrechte Drehachse (Z, Z') (Taf. V, Fig. 33), durch den Kehlkreis (K, K') und die beiden Geraden A_1, A_2 bestimmt.

Die schneidende Ebene $E_v E_h$ ist der obigen Bedingung entsprechend, parallel zu einer Berührebene $E_v' E_h'$ des Asymptotenkegels $[(O, K_1), (O', K_1')]$.

Nachdem eine Parabel eine einzige eigentliche Hauptachse besitzt, so kann diese letztere, früheren Erörterungen gemäß, keine andere als die Schnittgerade (s, s') der Ebene $E_v E_h$ mit jener Ebene H sein, welche durch die Drehachse (Z, Z') des Hyperboloides senkrecht zur Ebene $E_v E_h$ geführt wird.

Vorgenannte Gerade (s, s') ist parallel zur Berührungserzeugenden der Ebene $E_v' E_h'$ mit dem Asymptotenkegel, also auch parallel zu einer Erzeugenden des Hyperboloides, und kann folglich von dem letzteren nur noch in einem, im Endlichen gelegenen Punkte (A, A') „dem Scheitel der Schnittparabel" begegnet werden.

Diesen Punkt A bestimmen wir, in Übereinstimmung mit den vorhergehenden Fällen, vermittelst einer Erzeugenden (g, g') des Hyperboloides und dem durch Drehung von (s, s') um (Z, Z') beschriebenen Hilfskegels.

Berücksichtigt man ferner, dass der von dem horizontalen Durchstoßpunkte h', der Hyperboloiderzeugenden (g, g') beschriebene Kreis K_2' dem Hyperboloide angehört, so ergeben sich im Schnitte desselben mit der Horizontaltrace E_h zwei Punkte (m, m') und (n, n') der Parabel, welche durch die genannten Punkte, die Achse (s, s') und den Scheitel (A, A') vollständig bestimmt ist.

Die in den drei eben durchgeführten Schnittbestimmungen benützte Construction zur Ermittelung des Durchschnittes des Hyperboloides mit einer die Drehachse schneidenden Geraden (s, s') (durch Zuhilfenahme eines Hilfskegels) kann auch eine vortheilhafte Verwendung bei der Lösung von Aufgaben finden, welche der Geometrie der Ebene angehören.

§. 119.

8. Aufgabe. Eine Hyperbel ist durch ihre reelle Achse und die Asymptoten gegeben; es sind die Schnittpunkte derselben mit einer beliebigen Geraden l durch directe Construction festzustellen.

Die reelle Achse der gegebenen Hyperbel werde durch AB, deren Asymptoten durch A_1 und A_2 und die gegebene Gerade durch l (Taf. VI, Fig. 34) dargestellt.

Die so bestimmte Hyperbel betrachten wir als Schnitt eines Umdrehungshyperboloides mit einer durch die Drehachse desselben (im vorliegenden Falle durch die imaginäre Achse Z der Hyperbel) gehenden Ebene. Letztgenannte Ebene wählen wir als verticale Projectionsebene. Die horizontale Projectionsebene setzen wir senkrecht zur Achse Z voraus. Die Grundlinie GG ist daher irgend eine zu Z senkrechte Gerade. Der Durchmesser des Kehlkreises (K, K') stimmt mit der Länge der reellen Achse AB der gegebenen Hyperbel überein. Die Geraden A_1 und A_2 repräsentieren endlich die in der verticalen Projectionsebene liegenden Erzeugenden des Asymptotenkegels. Hiermit ist das Umdrehungshyperboloid vollkommen bestimmt.

Betrachtet man die gegebene Gerade l als Verticalprojection einer in der verticalen Projectionsebene liegenden Geraden (l, l'), so sind deren Schnittpunkte mit dem Hyperboloid identisch mit ihren Schnittpunkten mit der gegebenen Hyperbel, und können dieselben sonach folgendermaßen construiert werden.

Man bestimmt zunächst diejenige Erzeugende (g, g') des Hyperboloides, deren Horizontalprojection g' eine zur Grundlinie parallele Tangente an die horizontale Projection K' des Kehlkreises (K, K') ist und deren verticale Projection g mit der Geraden A_2 zusammenfällt.

Denkt man sich ferner die Gerade (l, l') um (Z, Z') derart gedreht, dass dieselbe einen Rotationskegel (S, K_3') erzeugt, dessen Spur auf der horizontalen Projectionsebene der von dem horizontalen Durchstoßpunkte h_2 der Geraden (l, l') beschriebene Kreis K_3' ist, und construiert man die Schnittpunkte des Kegels (S, K_3') mit der Geraden (g, g'), indem man durch die letzteren und durch den Kegelscheitel (S, S') eine Ebene e legt, deren Horizontaltrace e_h den Kreis K_3' in μ' und ν' schneidet, so treffen bereits die diesen Punkten entsprechenden Kegelerzeugenden $S'\mu'$ und $S'\nu'$ die Gerade (g, g') in den verlangten Durchstoßpunkten (m, m') und (n, n').

Zeichnet man weiters die beiden Kreise ϱ_1' und ϱ_2', welche die Punkte (m, m') und (n, n') bei der Drehung um (Z, Z') beschreiben, so gehören dieselben sowohl dem Hyperboloide, als auch dem vorgenannten

Hilfskegel an. Besagte Kreise werden daher auch die Gerade (l, l') in zwei Punkten (M, M') und (N, N') treffen, welche gleichzeitig auf dem Hyperboloide liegen.

Die verticalen Projectionen M und N dieser beiden Punkte bestimmen somit die gesuchten Schnittpunkte der Geraden l mit der gegebenen Hyperbel.

§. 120.

9. *Aufgabe.* *a*) **Durch eine Gerade sind an ein Umdrehungshyperboloid die möglichen Berührebenen zu legen.**

b) **Es sind die Schnittpunkte einer Geraden mit einem Umdrehungshyperboloide zu ermitteln.**

Erste Lösungsweise.

Die beiden eben aufgestellten Aufgaben können, sobald in beiden Fällen die nämliche Gerade als gegeben betrachtet wird, durch eine und dieselbe Construction gleichzeitig ihrer Erledigung zugeführt werden.

Das Hyperboloid sei durch den Kehlkreis (K, K') (Taf. V, Fig. 35) und den Asymptotenkegel $[(O, K_1), (O', K_1')]$ gegeben. Die Achse (Z, Z') des Hyperboloides sei, allenfalls durch Transformation, in eine solche Lage gegen die Projectionsebenen gebracht worden, dass dieselbe zur horizontalen Projectionsebene senkrecht stehe. Die Gerade L sei durch ihre Projectionen (l, l') bestimmt. Das erstere der gestellten Probleme fordert die Construction der durch (l, l') gehenden Tangentialebenen des Hyperboloides.

Denkt man sich die beiden, diesfalls möglichen Berührebenen E_1 und E_2 bereits construiert und dem Hyperboloide einen Cylinder umschrieben, dessen Erzeugenden zu der Geraden (l, l') parallel sind, so werden die genannten Ebenen E_1 und E_2 auch diesen Cylinder berühren müssen. Die Horizontaltracen $E_h{}'$ und $E_h{}^2$ der vorbezeichneten Ebenen werden demnach Tangenten der Horizontalspur des Cylinders sein. In erster Linie wird es sich also um die Construction der Horizontalspur des dem Hyperboloide parallel zu (l, l') umschriebenen Cylinders handeln.

Nachdem die Achse eines dem Hyperboloide umschriebenen Cylinders einerseits stets durch den Mittelpunkt (O, O') des letzteren geht und andererseits die Horizontalspur des vorerwähnten Cylinders ein Kegelschnitt P ist, dessen Mittelpunkt mit dem Horizontal-Durchstoßpunkte der Cylinderachse zusammenfällt, so ergibt sich der Mittelpunkt der Horizontalspur P als horizontaler Durchstoßpunkt (o, o') jener Geraden (λ, λ'), welche durch den Mittelpunkt (O, O') des Hyperboloides parallel zur Geraden (l, l') gezogen wird.

Da ferner die Ebene, welche durch diese Gerade (λ, λ') und durch die Drehachse (Z, Z') geführt werden kann, sowohl eine Symmetrieebene des Hyperboloides, als auch des umschriebenen Cylinders ist, so wird deren horizontale Trace $O'o'$ eine Achse der Horizontalspur P sein, während die zweite Achse $o'x$ derselben durch den Mittelpunkt o' geht und zu $O'o$ senkrecht steht.

Weiters ist bekannt, dass jede horizontal-projicierende Ebene, welche den Kehlkreis in irgend einem Punkte tangiert, auch das Hyperboloid in dem nämlichen Punkte berührt.

Ziehen wir demgemäß parallel zu $O'o'$ zwei Tangenten τ_α und τ_β an die horizontale Projection K' des Kehlkreises, so stellen diese die Horizontaltracen zweier horizontal-projicierender, zu der gegebenen Geraden (l, l') paralleler Berührebenen des Hyperboloides sowohl, als auch des umschriebenen Cylinders dar. Hieraus folgt unmittelbar, dass die Horizontaltracen τ_α und τ_β der besagten Berührungsebenen, Tangenten der horizontalen Cylinderspur P sind.

Nachdem dieselben aber überdies zu der einen Achse $O'o'$ dieses Kegelschnittes P parallel laufen, so sind deren Berührungspunkte gleichzeitig die Endpunkte α und β der anderen Achse $o'x$.

Denkt man sich endlich vom Mittelpunkte O' aus, an die Horizontalspur K_1' des Asymptotenkegels (O, K_1) die beiden Tangenten σ_1 und σ_2 gezogen, so repräsentieren diese die Horizontaltracen jener beiden Berührungsebenen des Asymptotenkegels, welche zur Geraden (l, l') parallel sind.

Nachdem aber, wie bereits bekannt, jede Berührebene des Asymptotenkegels auch das Hyperboloid und zwar in unendlicher Entfernung berührt, so sind diese beiden Ebenen auch *Berührebenen des dem Hyperboloide parallel zu* (l, l') *umschriebenen Cylinders*, und ihre *Horizontaltracen* σ_1 und σ_2 *mithin Tangenten des Kegelschnittes* P. Berücksichtigt man jedoch, dass die letzteren durch den Mittelpunkt o' von P gehen, so gelangen wir zu der Überzeugung, dass dieselben *nur die Asymptoten dieses Kegelschnittes* sein können.

Wir erhalten daher die *Horizontalspur* P *des dem Hyperboloide parallel zu* (l, l') *umschriebenen Cylinders* dargestellt durch die reelle Achse $\alpha\beta$ und die Asymptoten σ_1 und σ_2.

Jede Tangente dieses Kegelschnittes ist die Horizontaltrace einer Berührebene des Cylinders, also auch einer zur Geraden (l, l') parallelen Berührebene des Hyperboloides. Diejenigen Tangenten von P aber, welche insbesondere durch den *horizontalen Durchstoßpunkt*

h' der Geraden (l, l') gehen, sind die Horizontaltracen der durch (l, l') gehenden Berührebenen des Hyperboloides.

Besagte Berührungsebenen können vermittelst einer bekannten elementaren Construction auf nachstehende Weise bestimmt werden.

Verlängert man τ_α bis zum Schnitte ω mit σ_2 und überträgt $o'\omega = o'f_1 = o'f_2$ auf die reelle Achse ox, so sind f_1 und f_2 die Brennpunkte der Spurhyperbel P.

Vermittelst dieser Brennpunkte wird man nun anstandslos die die durch h' gehenden Tangenten $E^1{}_h$ und $E^2{}_h$ der Hyperbel, d. i. die Horizontaltracen der gesuchten Berührebenen E_1 und E_2 bestimmen.

Zu diesem Behufe hat man die beiden Kreise ϱ_1 und ϱ_2 zu beschreiben, deren einer, d. i. ϱ_1, den Punkt h' zum Mittelpunkte hat und durch den Brennpunkt f_2 geht; der andere ϱ_2 dagegen den zweiten Brennpunkt f_1 als Mittelpunkt und die reelle Achse $\alpha\beta$ zum Halbmesser hat. Diese beiden Kreise ϱ_1 und ϱ_2 schneiden sich diesfalls in zwei Punkten, d. i. in γ und δ. Halbiert man die Bögen γf_2 und δf_2 durch die Punkte ξ und η, so sind die Verbindungsgeraden $h'\xi$ oder $E^1{}_h$ und $h'\eta$ oder $E^2{}_h$ bekanntlich die durch h' gehenden Hyperbeltangenten, während deren Berührungspunkte unmittelbar die Schnittpunkte μ und ν von beziehungsweise $E^1{}_h$ mit $f_1\gamma$ und $E^2{}_h$ mit $f_1\delta$ sind.

Da die vorerwähnten Ebenen E_1 und E_2 durch die Gerade (l, l') gehen, so sind ihre Verticaltracen $E^1{}_v$ und $E^2{}_v$ leicht festzustellen.

Auf das zweite der gestellten Probleme übergehend, heben wir zunächst eine der gefundenen Berührebenen, etwa die Ebene $E'_v E'_h$, besonders hervor.

Jede Berührebene des Hyperboloides schließt bekanntlich zwei Erzeugende verschiedener Systeme in sich, deren Schnitt im Berührungspunkte der ersteren erfolgt.

Im vorliegenden Falle kann man die beiden in der Berührungsebene $E^1{}_v E^1{}_h$ liegenden Erzeugenden des Hyperboloides folgendermaßen bestimmen.

Vor allem ermitteln wir die Spur des Hyperboloides auf der horizontalen Projectionsebene, d. i. jenen Kreis K_2, welchen der horizontale Durchstoßpunkt (δ, δ') irgend einer Erzeugenden (g, g') bei der Drehung um (Z, Z') beschreibt.

Die Horizontaltrace E'_h schneidet diesen Kreis K_2 in zwei Punkten (h_1, h_1') und (h_2, h_2'), welche bereits die Horizontaldurchstoßpunkte der beiden in der Berührebene $E^1{}_v E^1{}_h$ liegenden Erzeugenden (g_1, g_1') und (g_2, g_2') darstellen.

Zieht man von diesen Punkten h'_1 und h'_2 die Tangenten g'_1 und g'_2 an die Horizontalprojection K' des Kehlkreises — es ist stets leicht festzustellen, welches Paar unter den möglichen vier Tangenten der Aufgabe entspricht — so erhält man unmittelbar die horizontalen Projectionen der gesuchten Erzeugenden. Die verticalen Projectionen g_1 und g_2 derselben lassen sich aus den ersteren direct ableiten.

Die beiden Erzeugenden (g_1, g_1') und (g_2, g_2') schneiden sich in einem Punkte (m, m'), welcher den Berührungspunkt der Ebene $E^1_v E^1_h$ mit dem Hyperboloide repräsentiert.

In gleicher Weise erhält man in der zweiten Berührebene $E^2_v E^2_h$ zwei Erzeugende (g_3, g_3') und (g_4, g_4') des Hyperboloides, deren Schnittpunkt (n, n') den Berührungspunkt der Ebene $E^2_v E^2_h$ mit dem Hyperboloide darstellt.

Bezugnehmend auf die Aufgabe *b*) ist weiters zu beachten, dass die Ebene $E^1_v E^1_h$ (Taf. V, Fig. 35) außer den Erzeugenden g_1 und g_2 des Hyperboloides auch die gegebene Gerade (l, l') enthalte.

Die Punkte (p, p') und (q, q'), in welchen die genannten Erzeugenden die Gerade (l, l') treffen, sind nun offenbar die Schnittpunkte von (l, l') mit dem Hyperboloide.

Desgleichen treffen die in der Ebene E^2 liegenden Erzeugenden g_3 und g_4 die Gerade l in zwei Punkten, welche dieser letzteren und dem Hyperboloide gemeinschaftlich sind.

Nachdem aber eine Gerade mit einem Hyperboloide bloß zwei Punkte gemein haben kann, so folgt, dass die Schnittpunkte von l mit g_3 und g_4, mit jenen von l mit g_1 und g_2 übereinstimmen, also ebenfalls die Punkte p und q sein müssen.

Anmerkung. Hat die gegebene Gerade L eine derartige Lage, dass die zu ihr durch den Mittelpunkt O des Hyperboloides gezogene parallele Gerade λ innerhalb des Asymptotenkegels (O, K_1) zu liegen kommt, so sind durch diese letztere keine reellen Tangentialebenen an den Asymptotenkegel möglich. Infolge dessen besitzt auch die Horizontalspur P des dem Hyperboloide parallel zur gegebenen Geraden umschriebenen Cylinders keine Asymptoten. Besagte Horizontalspur ist demnach eine Ellipse.

Die eine der Achsen der soeben genannten Ellipse ergibt sich auf dieselbe Weise, wie im früheren Falle die reelle Achse der Hyperbel. Die Endpunkte der zweiten Achse dagegen, welche der Lage nach durch die Horizontaltrace jener Ebene gegeben ist, die durch die Rotationsachse parallel zu der gegebenen Geraden gelegt wird, sind die Horizontaldurchstoßpunkte der an die in dieser Ebene liegenden Meridianhyperbel parallel zur gegebenen Geraden gezogenen Tangenten.

§. 121.

10. Aufgabe. Durch eine Gerade sind an ein Umdrehungshyperboloid die beiden Berührebenen zu legen.

Zweite Lösungsart.

Es sei (Z, Z') (Taf. VI, Fig. 36) die zur horizontalen Projectionsebene senkrechte Achse des Hyperboloides und (K, K') der Kehlkreis; ferner seien A_1 und A_2 die verticalen Contourlinien des Asymptotenkegels, d. i. die zur verticalen Projectionsebene parallelen Erzeugenden des letzteren, und schließlich sei (l, l') die gegebene Gerade.

Die Methode, deren wir uns nun bedienen wollen, besteht in einer bloßen Specialisierung der allgemeinen, für die Führung von Tangentialebenen durch eine Gerade an eine beliebige Fläche besprochenen Constructionen.

Ist nämlich F irgend eine Fläche, an welche durch irgend eine Gerade l die möglichen Berührebenen gelegt werden sollen, so besteht das allgemeine Verfahren darin, dass man auf der Geraden l einen beliebigen Punkt s annimmt, denselben als Scheitel eines der Fläche umschriebenen Kegels betrachtet, und sodann durch die Gerade l die möglichen Berührungsebenen an diesen Kegel legt. Dieselben werden gleichzeitig auch die ursprüngliche Fläche F berühren.

Im vorliegenden Falle wird es sich somit darum handeln, eine zweckmäßige Wahl des vorerwähnten Punktes s auf der Geraden l zu treffen.

Am vortheilhaftesten dünkt es uns, den Schnittpunkt (s, s') der Geraden (l, l') mit der Kehlkreisebene P_v, als den vorher genannten Kegelscheitel anzunehmen.

Der dem Hyperboloid aus dem Punkte (s, s') als Scheitel umschriebene Kegel berührt dasselbe, wie aus früheren theoretischen Betrachtungen hervorgeht, in einer Hyperbel, deren Ebene e senkrecht zur Kehlkreisebene steht und durch die Berührungssehne $(a'b', ab)$ der von (s, s') aus an den Kehlkreis (K, K') gezogenen Tangenten geht, oder mit anderen Worten, der aus (s, s') dem Hyperboloide umschriebene Kegel berührt das Hyperboloid in jener Hyperbel, welche sich als Schnitt des letzteren mit der Ebene $e_v e_h$ ergibt.

Die reelle Achse der genannten Hyperbel ist, wie leicht einzusehen, die Strecke $a'b'$. Die Asymptoten derselben sind parallel zu jenen Erzeugenden des Asymptotenkegels, welche zu der horizontalprojicierenden Ebene $e_v e_h$ parallel sind.

Nachdem diese Hyperbel, welche dem Kegel, dessen Scheitel (s, s') ist, als Leitcurve dient, der durch $(AB, A'B')$, (O, O') und

$(A_1, A'_1; A_2, A'_2)$ gegebenen Hyperbel ähnlich ist, so schließen auch die Asymptoten der ersteren den nämlichen Winkel unter einander ein, wie die der letzteren, d. i. wie (A_1, A_1') und (A_2, A_2').

An den vorgenannten Kegel sind nun durch die Gerade (l, l') die möglichen Berührungsebenen zu legen.

Die Spuren dieser Berührungsebenen auf der Ebene $e_v e_h$ werden bekanntlich jene Tangenten sein, welche von dem Durchstoßpunkte $(\varDelta, \varDelta')$ der Geraden (l, l') mit der Ebene $e_v e_h$ an die in der letzteren liegende Hyperbel geführt werden können.

Um diese Tangenten mit möglichster Sicherheit und Leichtigkeit festzustellen, legen wir den Punkt $(\varDelta, \varDelta')$ sowohl, als auch die vorher genannte Leithyperbel um die Verticaltrace e_v in die verticale Projectionsebene um. Der Punkt $(\varDelta, \varDelta')$ gelangt hierbei nach δ; die reelle Achse $(ab, a'b')$ der Hyperbel kömmt bei dieser Umlegung nach $\alpha\beta$, und die gleichzeitig umgelegten Asymptoten derjenigen Hyperbel, welche dem, dem Hyperboloide aus (s, s') umschriebenen Kegel als Leitlinie (Berührungscurve) dient und auf dem gegebenen Hyperboloide liegt, erscheinen nach vollführter Drehung durch die beiden Geraden σ_1 und σ_2 dargestellt. Letztere sind selbstverständlich durch den Halbierungspunkt o von $\alpha\beta$, parallel zu A_1 und A_2 zu führen.

Ermittelt man nun die Brennpunkte f_1 und f_2 der so erhaltenen Hyperbel, so kann man mit Hilfe derselben in voller Übereinstimmung mit der in der vorher gehenden Lösungsweise besprochenen Construction die durch δ gehenden Hyperbeltangenten τ_1 und τ_2, sowie die ihnen entsprechenden Berührpunkte μ und ν feststellen.

Man hat zu diesem Zwecke nichts anderes zu thun, als zwei Kreise zu beschreiben, von welchen der eine δ zum Mittelpunkt hat und durch den einen Brennpunkt f_1 geht; der andere hingegen den zweiten Brennpunkt f_2 zum Mittelpunkte und die reelle Achse zum Radius hat.

Diese beiden Kreise schneiden sich in den Punkten η und ζ. Halbiert man die Bögen ηf_1 und ζf_1 durch die Punkte φ und δ, so sind die Verbindungsgeraden $\delta\varphi = \tau_1$ und $\delta\varepsilon = \tau_2$ bekanntlich die durch δ gehenden Hyperbeltangenten, während deren Berührungspunkte die Schnittpunkte μ und ν von τ_1 und $f_2\eta$ resp. von τ_2 und $f_2\zeta$ sind.

Führt man die letztgenannten Punkte in die Ebene $e_v e_h$ nach (m, m') und (n, n') zurück, so repräsentieren dieselben bereits die Berührungspunkte des Hyperboloides mit den beiden durch (l, l') gehenden Berührebenen.

Zieht man durch m' die Tangenten g'_1 und g'_2 an den Kehlkreis K', so stellen diese die horizontalen Projectionen der in der einen Berührungsebene $E'_v E'_h$ liegenden Erzeugenden des Hyperboloides dar.

Dieselben treffen die Horizontalspur K'_2 des Hyperboloides in zwei Punkten h'_1 und h'_2, welche mit dem horizontalen Durchstoßpunkte h von (l, l') in einer und derselben Geraden — der Horizontaltrace E'_h der Berührebene E' liegen müssen. Die verticale Trace E'_v ist nun auf bekannte Weise zu construieren.

In gleicher Weise findet man die zweite Berührungsebene E_2, vermittelst jener beiden in (n, n') sich schneidenden Erzeugenden g_3 und g_4, welche dieser Ebene $E^2_v E^2_h$ angehören.

Die Erzeugenden g_1 und g_2, g_3 und g_4 treffen die Gerade (l, l') in den zwei Punkten (p, p') und (q, q'), welche unmittelbar die Schnittpunkte von (l, l') mit dem Hyperboloide darstellen.

§. 122.

11. Aufgabe. **„An ein Umdrehungshyperboloid sind, parallel zu einer gegebenen Ebene $E_v E_h$, Berührungsebenen zu legen."**

Das Hyperboloid ist durch den in einer horizontalen Ebene liegenden Kehlkreis (K, K') (Taf. VI, Fig. 37) und durch die zur verticalen Projectionsebene parallelen Erzeugenden A_1 und A_2 des Asymptotenkegels (O, K_1) bestimmt.

Nachdem die fraglichen Berührebenen zu der Ebene $E_v E_h$ parallel sein sollen, so müssen dieselben offenbar Erzeugende des Hyperboloides enthalten, welchen eine zu $E_v E_h$ parallele Lage entspricht.

Legt man daher durch den Mittelpunkt (O, O') des Hyperboloides eine Ebene $e_v e_h$ parallel zur Ebene $E_v E_h$, so wird diese den Asymptotenkegel entweder in zwei imaginären oder in zwei reellen Erzeugenden treffen. Tritt der erstere der genannten Fälle ein, so wird es auch auf dem Hyperboloide keine reellen Erzeugenden geben, welche zur Ebene $E_v E_h$ parallel sind; es werden mithin auch die zur Ebene $E_v E_h$ parallelen Berührebenen des Hyperboloides nicht reell sein.

Fassen wir aber den Fall in's Auge, in welchem die vorgenannte Ebene $e_v e_h$ den Asymptotenkegel in zwei reellen Erzeugenden $(O\alpha, O'\alpha')$ und $(O\beta, O'\beta')$ schneidet, so lassen sich stets Erzeugende auf dem Hyperboloide finden, welche zu $(O\alpha, O'\alpha')$ und $(O\beta, O'\beta')$ parallel sind.

Zieht man an die Horizontalprojection K' des Kehlkreises die Tangenten g'_1 und g'_3 parallel zu $O'\beta'$, so stellen diese bereits die Horizontalprojectionen der genannten Erzeugenden dar. Die verticalen Projectionen g_1 und g_3 derselben, deren Richtung durch $O\beta$ festgestellt

erscheint, bestimmt man einfach vermittelst der entsprechenden horizontalen Durchstoßpunkte (h_1, h'_1) und (h_3, h'_3). Ebenso findet man die beiden Erzeugenden (g_2, g'_2) und (g_4, g'_4) des Hyperboloides, welche zu der Erzeugenden $(O\alpha, O'\alpha')$ des Asymptotenkegels (O, K_1) parallel sind.

Die beiden Erzeugenden (g_1, g'_1) und (g_2, g'_2) gehören verschiedenen Systemen an, müssen sich daher in einem Punkte (m, m') des Hyperboloides schneiden. Da aber die beiden genannten Geraden überdies zur Ebene $E_v E_h$ parallel sind, so bestimmen dieselben eine Ebene $E'_v E'_h$, welche zu $E_v E_h$ parallel ist, und das Hyperboloid im Punkte (m, m') berührt.

In gleicher Weise ergeben die beiden Erzeugenden (g_3, g'_3) und (g_4, g'_4) eine zweite zur Ebene $E_v E_h$ parallele Berührebene $E^2_v E^2_h$ des Hyperboloides, deren Berührungspunkt der Schnittpunkt (n, n') von (g_3, g'_3) und (g_4, g'_4) ist.

Die beiden Berührungspunkte (m, m') und (n, n') liegen, wie sich leicht nachweisen lässt, in einer Ebene, welche durch die Drehachse (Z, Z') des Hyperboloides senkrecht zur Ebene $E_v E_h$ gelegt wird.

Die Horizontaltrace dieser Ebene ist die Gerade H_h, welche durch Z' normal zu E_h gezogen werden kann.

Berücksichtigt man, dass die Gerade e_h ebenfalls senkrecht auf H_h steht und dass $O'\alpha' = O'\beta'$ ist, so folgt unmittelbar, dass $O'\alpha'$ und $O'\beta'$ gegen H_h symmetrisch liegen. Das Gleiche gilt selbstverständlich auch von den Paaren jener Tangenten, die an K' parallel zu $O'\alpha'$ und $O'\beta'$ geführt werden können; es sind folglich auch die Tangenten g'_1 und g'_2, ebenso wie die Tangenten g'_3 und g'_4 symmetrisch gegen H_h gelagert. Infolge dessen liegen auch die Schnittpunkte m' und n' dieser Paare von Tangenten in der Symmetrieachse H_h; die Punkte (m, m') und (n, n') mithin in der (durch die Drehachse (Z, Z') gehenden) horizontalprojicierenden und zur Ebene $E_v E_h$ senkrecht stehenden Ebene $H_v H_h$.

Es erübrigt noch die Betrachtung des besonderen Falles, wenn die durch den Scheitel (O, O') parallel zur Ebene $E_v E_h$ gelegte Ebene $e_v e_h$ den Asymptotenkegel in zwei zusammenfallenden Erzeugenden schneidet, oder mit anderen Worten, den Asymptotenkegel berührt.

In diesem Falle ist bekanntlich die Ebene $e_v e_h$ eine „asymptotische Ebene des Hyperboloides", und stellt daher als solche bereits eine Berührungsebene des Hyperboloides (mit unendlich fernem Berührungspunkte) dar, welche zu der gegebenen Ebene $E_v E_h$ parallel ist.

Die diesbezügliche Construction ergibt aber gleichzeitig, dass eben nur diese eine Berührebene möglich ist, oder vielmehr, dass in ihr die beiden vorher gefundenen Berührebenen $E^1_v E^1_h$ und $E^2_v E^2_h$ zusammenfallen.

Letzteres geht auch daraus hervor, wenn man in Erwägung zieht, dass, wie früher nachgewiesen wurde, die Berührungspunkte der zu $E_v E_h$ parallelen Berührebenen in der durch die Achse des Hyperboloides senkrecht zu $E_v E_h$ geführten Ebene H liegen. Dieselben ergeben sich als die Berührungspunkte derjenigen Tangenten an die in der Ebene H liegende Hyperbel, welche zur Schnittlinie der beiden Ebenen E und H parallel sind.

Ist jedoch die Ebene E parallel zu einer Berührebene e des Asymptotenkegels, so ist die Schnittlinie von E und H parallel zu der Berührerzeugenden der Ebene e mit dem Asymptotenkegel. Nachdem aber die letztere eine Asymptote der vorgenannten Hyperbel ist, so existiert außer derselben keine zu ihr parallele Tangente der Hyperbel, folglich auch keine zweite zu $E_v E_h$ parallele Berührebene des Hyperboloides.

§. 123.

12. Aufgabe. **„Gegeben ist eine Ebene, ein Rotationskegel und zwei Kreise, deren Ebenen zur Kegelachse senkrecht stehen, und deren Mittelpunkte auf der Kegelachse liegen; es ist eine Gerade zu suchen, welche den Kegel berührt, beide Kreise schneidet, und zur gegebenen Ebene parallel ist.“**

Setzen wir der Einfachheit wegen voraus, die Kegelachse $(SZ, S'Z')$ (Taf. VI, Fig. 38) sei horizontal projicierend, ferner seien (S, S') der Kegelscheitel und (K, K') der Kreis, in welchem der Kegel die horizontale Projectionsebene schneidet. Die beiden in den horizontalen Ebenen e^1_v und e^2_v gegebenen Kreise seien durch (C_1, C'_1) und (C_2, C'_2) dargestellt, während $E_v E_h$ die gegebene Ebene repräsentiert.

Um die gestellte Aufgabe zu lösen, wird bloß zu berücksichtigen sein, dass die zu suchende Gerade, da sie den Kegel (S, K) berühren soll, in einer Tangentialebene des Kegels liegen müsse. Construieren wir demgemäß zunächst eine Hilfsgerade, welche den Kegel (S, K) berührt, und die Kreise (C_1, C'_1) und (C_2, C'_2) schneidet, zur Ebene $E_v E_h$ jedoch nicht nothwendig parallel zu sein braucht. Dies wird am einfachsten dadurch erreicht, dass man von einer der beiden vertical-projicierenden Tangentialebenen des Kegels, beispielsweise von der Ebene $B_v B_h$, Gebrauch macht. Die letztgenannte Ebene schneidet die beiden Kreise (C_1, C'_1) und (C_2, C'_2) in je zwei Punkten (α_1, α'_1); (β_1, β'_1)

und (α_2, α'_2); (β_2, β'_2), von welchen wir jedoch nur die Punkte (α_1, α'_1) und (α_2, α'_2) berücksichtigen wollen. Die Verbindungsgerade $(\alpha_1 \alpha_2, \alpha'_1 \alpha'_2)$ oder (g, g') hat bereits die oben geforderte Eigenschaft, beide Kreise C_1 und C_2 zu schneiden und den Kegel (S, K) zu berühren.

Wenn wir beachten, dass der Kegel (S, K) ein Rotationskegel ist, und dass die Mittelpunkte der beiden Kreise C_1 und C_2 auf der Kegelachse liegen, während gleichzeitig ihre Ebenen e^1_v und e^2_v zur Kegelachse senkrecht stehen, so ist einleuchtend, dass die Gerade (g, g'), sobald sie um die Kegelachse $(SZ, S'Z')$ gedreht wird, in jeder Lage den vorangeführten Bedingungen genügen wird. Bei dieser Drehung bleibt selbstverständlich die relative Lage der Geraden gegen die Drehachse unverändert, woraus direct folgt, dass *a*) ihre Horizontalprojection jenen Kreis K'_2 umhüllt, dessen Mittelpunkt Z' ist und die ursprüngliche Lage g' berührt, und dass *b*) dieselbe in jeder Lage den nämlichen Winkel mit der Achse SZ, also auch mit der zur Achse SZ senkrechten horizontalen Projectionsebene einschließt.

Dieser letzteren Eigenschaft zufolge werden alle Geraden (γ, γ'), welche zu den Lagen der gedrehten Geraden (g, g') durch einen beliebigen Punkt im Raume (wir wählen diesfalls einen Punkt (σ, σ') in der Verticaltrace E_v der gegebenen Ebene) parallel gezogen werden, einen auf der horizontalen Projectionsebene aufruhenden Rotationskegel (σ, K'_1) umhüllen, welcher offenbar durch die zu der ursprünglichen Lage (g, g'), durch (σ, σ'), parallel gezogene Erzeugende (γ, γ') bereits vollständig gegeben ist.

Der bezeichnete Rotationskegel (σ, K'_1) wird von der Ebene $E_v E_h$ nach zwei Erzeugenden geschnitten, von welchen (γ_1, γ'_1) die eine derselben repräsentieren möge.

Zu der hiermit bestimmten Kegelerzeugenden (γ_1, γ'_1) wird eine Lage (g_1, g_1') der gedrehten Geraden (g, g') parallel sein. Dieselbe kann in nachstehender Weise festgestellt werden.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen wissen wir, dass die Horizontalprojection g'_1 den Kreis K'_2 berühren müsse. Es wird hierbei leicht zu unterscheiden sein, welche von den beiden zu γ'_1 parallelen Tangenten des Kreises K'_2 zu wählen sein wird. Ferner schneidet g'_1 die Kreise C'_1 und C'_2 beziehungsweise in den Punkten a'_1 und a'_2 deren Verticalprojectionen a_1 und a_2 sich unmittelbar auf C_1 und C_2 ergeben. Die Verbindungsgerade von a_1 und a_2 stellt somit die Verticalprojection g_1 der Geraden (g_1, g'_1) dar, welche nothwendig (sobald von den beiden Tangenten des Kreises K'_2 die richtige, d. i. diesfalls g'_1, gewählt wurde) zu γ_1 parallel sein muss.

Die so erhaltene Gerade $(g_1 g'_1)$ ist einerseits zur Ebene $E_v E_h$ parallel und andererseits, als durch Drehung um SZ aus der Geraden (g, g'), welche den anderweitigen Bedingungen der Aufgabe entsprach, hervorgegangen, diejenige, welche den gestellten Anforderungen Genüge leistet.

§. 124.

Sämmtliche bisher in Bezug auf das Umdrehungshyperboloid gelösten Probleme lassen sich direct auf ein allgemeines (dreiachsiges) windschiefes Hyperboloid übertragen, indem man das letztere, was jederzeit möglich ist, in ein Umdrehungshyperboloid transformiert.

Sei (Z, Z') (Taf. VII, Fig. 39) die eine Achse des Hyperboloides; dieselbe möge zur horizontalen Projectionsebene senkrecht stehen. Die beiden anderen Achsen $(AB, A'B')$ und $(CD, C'D')$ sind sodann zur horizontalen Projectionsebene parallel, und bestimmen als solche gleichzeitig die Achsen der Kehlellipse (K, K'). Die Spur des Asymptotenkegels auf der horizontalen Projectionsebene sei ein Kegelschnitt (K_1, K'_1), welcher, wie bekannt, mit (K, K') ähnlich und ähnlich gelegen ist, und dessen Mittelpunkt auf der Achse (Z, Z') liegen muss. Endlich repräsentiere der (aus (K, K') und (K_1, K_1') abgeleitete) Kegelschnitt (K_2, K'_2) die Spur des Hyperboloides auf der horizontalen Projectionsebene. K'_2 ist selbstverständlich wieder concentrisch, ähnlich und ähnlich gelegen mit K' sowohl, als auch mit K'_1.

Um die vorher aufgestellte Behauptung zu rechtfertigen, werden wir die Punkte des Raumes affin transformieren.

Als Affinitätsebene nehmen wir jene zur verticalen Projectionsebene parallele Ebene E_h an, welche durch die Achsen (Z, Z') und $(AB, A'B')$ des Hyperboloides geführt werden kann.

Die Affinitätsstrahlen sollen zu derselben senkrecht, also verticalprojicierend sein.

Weiters möge der Affinitätsmodul, d. h. das Verhältnis der Abstände irgend eines Punktes x und des aus ihm abgeleiteten affinen Punktes x_0 von der Affinitätsebene E_h dem Verhältnisse der Achsen CD und AB gleich sein.

Untersuchen wir nun, in was für eine Fläche das gegebene dreiachsige windschiefe Hyperboloid durch diese affine Transformation übergeht.

Vor allem ist zu beachten, dass alle Punkte, welche in der Affinitätsebene E liegen, bei der Transformation ungeändert bleiben; es wird daher als natürliche Folge die Hyperbel, in welcher die besagte

Ebene das Hyperboloid schneidet, auch der transformierten Fläche angehören.

Da ferner ein Punkt im Raume und dessen Transformation auf einem verticalprojicierenden Strahle liegen, so werden die verticalen Projectionen aller Punkte mit den verticalen Projectionen der aus ihnen affin abgeleiteten Punkte zusammenfallen.

Die horizontalen Projectionen dagegen ändern sich in nachstehender Weise.

Ist beispielsweise m' die Horizontalprojection irgend eines Punktes (m, m') und fällen wir von demselben eine Senkrechte $m'\mu$ auf E_h, so stellt diese die wahre Größe des Abstandes des diesbezüglichen Punktes im Raume von der Affinitätsebene dar. Der aus (m, m') abgeleitete Punkt m_0 hat seine horizontale Projection auf der Geraden $m'\mu$, und zwar muss, der Voraussetzung gemäß, das Verhältnis $\frac{m'\mu}{m_0\mu}$ dem Verhältnisse $\frac{C'O'}{A'O'}$ gleich sein.

Aus dieser einfachen Betrachtung ist ersichtlich, dass die horizontalen Projectionen aller Punkte des Raumes und die horizontalen Projectionen der aus ihnen abgeleiteten Punkte in orthogonal affiner Verwandtschaft stehen, wobei die Trace E_h die Affinitätsachse, und das Verhältnis $\frac{C'O'}{A'O'}$ den Affinitätsmodul repräsentiert.

Betrachten wir nun eine beliebige Gerade, etwa die Erzeugende (g, g') der windschiefen Fläche.

Bei der Transformation bleibt die verticale Projection, den früheren Auseinandersetzungen gemäß, ungeändert. Der horizontalen Projection g' dagegen entspricht eine andere Gerade g_0, welche mit g', in Bezug auf E_h als Affinitätsachse und $\frac{C'O'}{A'O'}$ als Affinitätsmodul, orthogonal affin ist.

Die Gerade (g, g') übergeht daher durch die affine Transformation wieder in eine Gerade, welche durch (g, g_0) dargestellt erscheint.

Hieraus folgt aber, dass das windschiefe Hyperboloid durch affine Transformation in eine andere windschiefe Fläche verwandelt wird, welcher gleichfalls zwei Systeme von geradlinigen Erzeugenden zukommen, und daher wieder ein Hyperboloid sein muss.

Als weitere Folgerung ergibt sich, dass die Ebene E, welche eine Symmetrieebene für das erste Hyperboloid ist, eine eben solche auch für das abgeleitete darstelle.

Betrachten wir endlich einen beliebigen zur horizontalen Projectionsebene parallelen Schnitt des ursprünglichen

Hyperboloides. Derselbe ist eine Ellipse, welche mit der Kehlellipse ähnlich ist, deren Achsenverhältnis also dem Affinitätsmodul $\frac{C'O'}{A'O'}$ gleich ist. Besagte Ellipse verwandelt sich somit bei der Transformation in einen Kreis.

Das abgeleitete Hyperboloid wird sonach von allen zur horizontalen Projectionsebene parallelen Ebenen nach Kreisen geschnitten. Da die Mittelpunkte aller dieser Kreise auf der horizontalprojicierenden Geraden (Z, Z') liegen, so folgt, dass dieses Hyperboloid ein Umdrehungshyperboloid sein müsse.

Diese Eigenschaft kann mit Vortheil benützt werden, um Constructionen, welche an einem allgemeinen Hyperboloide durchgeführt werden sollen, auf solche eines Umdrehungshyperboloides zurückzuführen.

Die Art und Weise, wie letzteres geschehen kann, ist im allgemeinen folgende.

Gesetzt, es wäre mit dem allgemeinen Hyperboloide ein anderes geometrisches Gebilde in (nicht metrische) Beziehung zu bringen und es sollte das Resultat dieser Beziehung durch Construction zur Geltung gebracht werden.

Diesfalls wird man das Hyperboloid in der vorher besprochenen Weise affin in ein Umdrehungshyperboloid transformieren, gleichzeitig aber auch das andere gegebene geometrische Gebilde affin verwandeln. Hierauf construiert man das oben gedachte Beziehungsresultat an dem abgeleiteten Hyperboloide und transformiert (im entgegengesetzten Sinne) dieses Resultat zurück.

Einige Beispiele werden den hier kurz angedeuteten Vorgang klarlegen.

§. 125.

13. Aufgabe. **Ein windschiefes Hyperboloid ist durch seine drei Hauptachsen gegeben; es ist der Schnitt desselben mit einer Ebene zu bestimmen und dieser direct durch irgend ein Paar conjugierter Durchmesser darzustellen.**

Die drei gegebenen Hauptachsen des Hyperboloides wollen wir beziehungsweise zu den betreffenden Projectionsebenen senkrecht stehend voraussetzen, und zwar möge die imaginäre Achse $(FG, F'G')$ (Taf. VII, Fig. 40) horizontalprojicierend, die Achse $(CD, C'D')$ verticalprojicierend und die Achse $(AB, A'B')$ kreuzrissprojicierend (parallel zur Grundlinie X) sein. Die schneidende Ebene E sei durch ihre Tracen E_v und E_h bestimmt.

Transformieren wir das Hyperboloid affin in ein Rotationshyperboloid, indem wir die durch die Achsen FG und AB gehende, zur verticalen Projectionsebene parallele Ebene e als Affinitätsebene, die verticalprojicierenden Geraden als Affinitätsstrahlen und das Verhältnis der Achsen CD und AB als Affinitätsmodul annehmen.

Durch diesen Vorgang wird das gegebene Hyperboloid in ein Umdrehungshyperboloid verwandelt, dessen imaginäre Achse ($FG, F'G'$) unverändert bleibt und dessen Kehlkreis die Achse (AB, $A'B'$) zum Durchmesser hat; die in der Hauptebene e liegenden Erzeugenden des Asymptotenkegels sind die Asymptoten der Hyperbel (AB, FG), also, wie bekannt, zwei Geraden A_1 und A_2, welche zu AG und AF parallel sind. Gleichzeitig verwandelt sich, oder was dasselbe ist, übergeht die schneidende Ebene $E_v E_h$ in eine zweite Ebene $E^0{}_v E^0{}_h$, welche mit der ersteren Ebene E, deren Schnitt (σ, σ') mit der Affinitätsebene e gemein hat, während deren Horizontaltrace $E^0{}_h$ mit E_h, in Bezug auf e_h als Affinitätsachse und $\frac{C'O'}{A'O'} = \frac{C'O'}{C'_0 O'}$ als Affinitätsmodul orthogonal affin ist.

Die Trace $E^0{}_h$ wird mithin aus E_h, wie folgt, abgeleitet. Der Punkt Δ', in welchem E_h die Affinitätsachse e_h trifft, bleibt selbstverständlich ungeändert. Ferner sind die beiden durch C' und C^0 parallel zu e_h geführten Geraden affin, treffen daher auch E_h und $E^0{}_h$ in zwei affinen Punkten ϱ' und ϱ'_0, von welchen der zweite direct aus dem ersten abgeleitet werden kann. Die transformierte Trace $E^0{}_h$ ergibt sich demgemäß als Verbindungsgerade der Punkte Δ' und ϱ'_0.

Die Achsen (ab, $a'_0 b'_0$) und (cd, $c'_0 d'_0$) jenes Kegelschnittes, in welchem die Ebene $E^0{}_v E^0{}_h$ das Rotationshyperboloid schneidet, können in voller Übereinstimmung mit dem in Aufgabe 7) eingeschlagenen Wege festgestellt werden.

Dieser Kegelschnitt stellt aber offenbar nichts anderes, als die affine Transformation desjenigen Kegelschnittes dar, in welchem die Ebene $E_v E_h$ das ursprünglich gegebene Hyperboloid schneidet. Es wird mithin genügen, denselben im entgegengesetzten Sinne zurückzutransformieren, um den verlangten Schnitt zu erhalten. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass, den vorher angestellten Betrachtungen gemäß, die verticalen Projectionen zweier einander affin entsprechender Gebilde zusammenfallen, dass also ab und cd bereits zwei conjugierte Durchmesser der Verticalprojection, also auch des gesuchten Schnittes darstellen müssen.

Nachdem ferner der besagte Kegelschnitt in der Ebene $E_v E_h$ liegt, so lassen sich dessen Horizontalprojection, beziehungsweise die

zwei conjugierten Durchmesser $a'b'$ und $c'd'$ aus der Verticalprojection ab und cd auf bekannte Weise ableiten.

Da wir aber weiters wissen, dass die Horizontalprojectionen zweier einander affin entsprechender Gebilde, auch orthogonal affin sind in Bezug auf e_h als Affinitätsachse und $\frac{C'O'}{C'_0O'}$ als Affinitätsmodul, so werden auch $a'_0b'_0$ und $a'b'$, ebenso wie $c'_0d'_0$ und $c'd'$ affin entsprechend sein und es können daher vermöge dieser Eigenschaft, $a'b'$ und $c'd'$ auch direct aus $a'_0b'_0$ und $c'_0d'_0$ abgeleitet werden.

Die Geraden $(ab, a'b')$ und $(cd, c'd')$ repräsentieren somit zwei conjugierte Durchmesser des gesuchten Schnittes; einer derselben, d. i. $(cd, c'd')$, hat überdies eine zur horizontalen Projectionsebene parallele Lage.

§. 126.

14. Aufgabe. **Ein windschiefes dreiachsiges Hyperboloid ist durch seine drei Hauptachsen und eine Gerade durch ihre Projectionen gegeben; es sind die durch diese Gerade gehenden Tangentialebenen des Hyperboloides zu bestimmen.**

Sowie in der vorhergehenden Aufgabe denken wir uns die drei Hauptachsen $(FE, F'E')$, $(AB, A'B')$ (Taf. VII, Fig. 41) und $(CD, C'D')$ durch entsprechende Transformation in eine solche Lage gegen die Projectionsebenen gebracht, dass dieselben beziehungsweise zu der horizontalen Projectionsebene, der Querriss- oder Kreuzrissebene und der verticalen Projectionsebene senkrecht stehen. Die gegebene Gerade sei durch ihre Projectionen l und l' dargestellt.

Denkt man sich durch (l, l') die beiden möglichen Tangentialebenen P und Q des Hyperboloides wirklich construiert und hierauf das letztere affin in ein Rotationshyperboloid transformiert, so übergeht gleichzeitig die Gerade (l, l') durch die gleiche Affinitätstransformation in eine andere Gerade l_0 und die beiden durch l gehenden Berührebenen P und Q des ursprünglichen Hyperboloides in die zwei durch l_0 gehenden Berührebenen P_0 und Q_0 des Rotationshyperboloides.

Behufs Durchführung des Angedeuteten, denken wir uns das gegebene Hyperboloid wie im vorhergehenden Falle durch Affinität in ein Umdrehungshyperboloid verwandelt, indem wir die Ebene e, welche durch die Achsen $(AB, A'B')$ und $(FE, F'E')$ geht, als Affinitätsebene und das Verhältnis der Achsen CD und AB als Affinitätsmodul annehmen.

Gleichzeitig transformieren wir die gegebene Gerade (l,l'). Hiebei bleibt deren Verticalprojection l ungeändert, während an die Stelle

von l' eine Gerade l'_0 tritt, welche mit l', in Bezug auf e_h als Affinitätsachse und $\frac{C'D'}{A'B'} = \frac{C'O'}{C'_0 O'}$ als Affinitätsmodul orthogonal affin ist.

Die transformierte Gerade l_0 wird demgemäß folgendermaßen erhalten. Man denke sich von irgend einem Punkte der Geraden (l, l'), beispielsweise von dem horizontalen Durchstoßpunkte h' eine Senkrechte $h'\varphi$ zu e_h gezogen und auf derselben den zu h' affinen Punkt h'_0 derart bestimmt, dass $\frac{h'\varphi}{h'_0\varphi} = \frac{C'O'}{C'_0 O'}$ wird.

Verbindet man h'_0 mit dem Punkte $\varDelta'$, in welchem l' die Gerade e_h trifft, so erhält man die Gerade l'_0.

Weiters lege man nach irgend einer der vorher besprochenen Methoden durch (l, l'_0) die beiden Berührebenen $P^0_v P^0_h$ und $Q^0_v Q^0_h$ an das Umdrehungshyperboloid, bestimme deren Berührungspunkte (p, p'_0) und (q, q'_0), sowie auch, vermittelst der durch diese Punkte gehenden Erzeugenden des Rotationshyperboloides die Schnittpunkte (s, s'_0) und (σ, σ'_0) des letzteren mit der Geraden (l, l'_0) und transformiere hierauf diese Ebenen und Punkte in die entsprechende Lage zurück. Letzteres kann allenfalls in folgender Weise geschehen.

Die Horizontaltrace P^0_h trifft die Affinitätsachse e_h in einem Punkte α', durch welchen Punkt selbstverständlich auch die transformierte Trace P_h gehen wird.

Nachdem aber P^0_h gleichzeitig auch durch h'_0 zu führen ist, muss P_h durch h' gehen und wird sonach durch die Verbindungsgerade von α' und h' dargestellt erscheinen. Die Horizontaltrace P_h trifft die Grundlinie X in einem Punkte γ, welcher offenbar auch der Verticaltrace P_v angehört.

Berücksichtigt man, dass die Ebene P, die zur verticalen Projectionsebene parallele Affinitätsebene e in der nämlichen Geraden, wie die Ebene P_0 schneiden muss, so folgt unmittelbar, dass die Verticaltracen der Ebenen P und P_0 parallel sein müssen. Die Trace P_v wird somit erhalten, indem man durch γ eine Parallele zu P^0_v zieht.

Der Berührungspunkt p_0' wird nach p' transferiert, indem man von einem Paare bekannter affiner Punkte, etwa von D' und D_0' Gebrauch macht. In ganz gleicher Weise kann die Transformation der Ebene Q_0 in der Ebene Q, deren Berührungspunkt (q, q_0') nach (q, q') und endlich auch die Überführung der Schnittpunkte (s, s_0') und (σ, σ_0') der Geraden (l, l_0') mit dem Rotationshyperboloide in die Schnittpunkte (s, s') und (σ, σ') von (l, l') mit dem gegebenen dreiachsigen Hyperboloide erfolgen.

In analoger Weise lassen sich alle nicht metrischen Probleme, bezüglich eines allgemeinen windschiefen Hyperboloides, auf solche eines Rotationshyperboloides zurückführen.

§. 127.

Kegelschnittsconstructionen mit Hilfe windschiefer Hyperboloide.

Die Eigenschaften des windschiefen Hyperboloides lassen sich unter anderem auch vortheilhaft zur Lösung gewisser, der Geometrie der Ebene angehörenden Aufgaben verwenden. Einige Beispiele mögen die Richtigkeit des Gesagten bestätigen.

15. Aufgabe. **„Eine Hyperbel ist durch ihre Achsen bestimmt. Zwischen den Ästen derselben sind drei Punkte gegeben; es ist ein Kegelschnitt zu construieren, welcher durch die drei Punkte geht und die Hyperbel in zwei Punkten berührt.“**

Die Hyperbel Σ (Taf. VIII, Fig. 42) ist durch ihre reelle Achse AB und die imaginäre Achse CD festgestellt; die drei gegebenen Punkte seien a, b und c. Besagte Hyperbel wollen wir behufs Lösung der gestellten Aufgabe, als die Contour eines Rotationshyperboloides (bezogen auf die verticale Projectionsebene, welche durch die Ebene der Hyperbel (Zeichnungsebene) selbst repräsentiert werden mag), auffassen. Die horizontale Projectionsebene wählen wir senkrecht zu der imaginären Achse CD der Hyperbel, oder mit anderen Worten, senkrecht zur Drehachse des Hyperboloides. Diesen Voraussetzungen gemäß nehmen wir als Grundlinie GG, eine beliebige, auf CD senkrechte Gerade an.

Die Achse AB bestimmt diesfalls den Durchmesser des Kehlkreises (K, K'). Die Geraden A_1 und A_2, welche durch den Mittelpunkt C der Hyperbel, parallel zu AC und AD gezogen werden, stellen die Asymptoten der Hyperbel Σ und gleichzeitig die in der verticalen Projectionsebene liegenden Erzeugenden des Asymptotenkegels dar. Das auf diese Weise construierte Rotationshyperboloid schneidet die verticale Projectionsebene in der Hyperbel Σ, welch' letztere zugleich auch die Berührungscurve des Hyperboloides mit dem demselben umschriebenen verticalprojicierenden Cylinder repräsentiert.

Denken wir uns nun das Hyperboloid durch eine beliebige Ebene E geschnitten. Diese Ebene E möge die Hyperbel Σ in zwei Punkten x und y treffen. Die Schnittcurve derselben mit dem Hyperboloide ist ein Kegelschnitt, und wird das Gleiche auch von deren verticaler Projection gelten.

Die Tangenten der Schnittcurve in den Punkten x und y liegen selbstverständlich in den Berührungsebenen des Hyperboloides, welche

in den nämlichen Punkten an das letztere geführt werden können. Nachdem aber diese Ebenen verticalprojicierend sind, so folgt, dass die verticalen Projectionen der obgenannten zwei Tangenten der Schnittcurve in den Punkten x und y mit den Tangenten der Hyperbel Σ in den Punkten x und y zusammenfallen, oder mit anderen Worten, dass die verticale Projection des ebenen Schnittes die Contourcurve Σ in jenen zwei Punkten berühren müsse, in welchen die Contourcurve Σ von der schneidenden Ebene getroffen wird.

Nachdem die Forderung gestellt ist, einen Kegelschnitt zu construieren, welcher die Hyperbel Σ in zwei Punkten berührt, und durch die gegebenen drei Punkte a, b, c geht, so betrachten wir zu diesem Zwecke die drei Punkte a, b, c als die Verticalprojectionen dreier auf dem Hyperboloid liegender Punkte (a, a'), (b, b') und (c, c'). Die Horizontalprojectionen a', b' und c' dieser Punkte können leicht auf nachfolgende Weise ermittelt werden.

Um beipielsweise die Horizontalprojection a' zu finden, denken wir uns durch a eine zur horizontalen Projectionsebene parallele Ebene ε_1 gelegt. Diese Ebene schneidet das Hyperboloid in einem Kreise (K_1, K_1'), dessen Mittelpunkt auf der Drehachse $(CD, C'D')$ liegt. Ein Punkt (a, a') desselben ergibt sich als Durchstoßpunkt der Ebene ε_1 mit irgend einer Erzeugenden (g, g') des Hyperboloides, und da der gesuchte Punkt auch auf dem vorerwähnten Kreise liegen muss, so erhalten wir dessen Horizontalprojection a' im Schnitte von K_1' mit der von a aus senkrecht zur Grundlinie gezogenen Geraden. Zwischen den beiden sich diesfalls ergebenden Schnittpunkten kann, wenn keine weitere Bedingung vorliegt, beliebig gewählt werden; jeder derselben führt zu einer Lösung der Aufgabe. Die Horizontalprojectionen der übrigen Punkte b und c können in gleicher Weise bestimmt werden.

Legt man nun durch die drei Punkte (a, a'), (b, b'), (c, c') eine Ebene $E_v E_h$, und bestimmt den Schnitt derselben mit dem Hyperboloide [$(I\,II, I'II')$ und $(III\,IV, III'IV')$ sind die Achsen dieses Schnittes], so repräsentiert besagte Schnittfigur einen Kegelschnitt, welcher gleichfalls durch die drei eben genannten Punkte (a, a'), (b, b'), (c, c') geht.

Die verticale Projection dieses Kegelschnittes ist selbst wieder ein Kegelschnitt, welcher durch die drei Punkte a, b, c führt und, den vorhergehenden Auseinandersetzungen gemäß, die Hyperbel Σ in zwei Punkten berührt.

Die Berührungspunkte sind jene, in welchen die schneidende Ebene $E_v E_h$ die Hyperbel Σ trifft. Nach der diesfalls getroffenen Anordnung der Projectionsebenen sind aber die bezeichneten Punkte

keine anderen, als die Schnittpunkte der Hyperbel Σ mit der Verticaltrace E_v, und können dieselben direct, wie in Aufgabe 8) gezeigt wurde, ermittelt werden.

Da einem jeden der drei Punkte a, b und c zwei Horizontalprojectionen entsprechen, so lassen sich diese drei Punkte auf achtfache Art gruppieren; man erhält somit acht zur Lösung der Aufgabe führende Ebenen E.

Berücksichtigt man jedoch, dass diese acht Ebenen zu je zwei symmetrisch gegen die verticale Projectionsebene und gegen das Hyperboloid liegen, dass also die Schnitte von zwei derartigen Ebenen mit dem Hyperboloide die nämliche Verticalprojection besitzen, so ist einleuchtend, dass sich die Zahl der möglichen Lösungen der vorstehenden Aufgabe auf die Hälfte, d. i. auf „vier" reduciert.

Es gibt sonach vier Kegelschnitte, welche durch a, b und c hindurchgehen und die Hyperbel Σ doppelt berühren, wobei allerdings die Berührpunkte auch imaginär sein können. Letzterer Fall tritt dann ein, wenn E_v die Hyperbel Σ in nicht reellen Punkten schneidet.

§. 128.

16. Aufgabe. **Gegeben ist eine Hyperbel durch ihre Achsen und ein Punkt zwischen den Ästen derselben; es ist ein Kreis zu construieren, welcher durch diesen Punkt geht und die beiden Hyperbeläste berührt.**

Wie im vorhergehenden Falle denken wir uns die Hyperbel AB, CD (Taf. VIII, Fig. 43) als verticale Contour eines Umdrehungshyperboloides und betrachten den gegebenen Punkt a als Verticalprojection eines Punktes auf dem besagten Rotationshyperboloide. Die Horizontalprojection a' dieses Punktes ist leicht zu bestimmen.

Es wird sich nun bloß darum handeln, durch den Punkt (a, a') eine Ebene E derart zu legen, dass die verticale Projection ihrer Schnittcurve mit dem Hyperboloide ein Kreis werde. Dieser Kreis wird sodann durch a gehen und beide Äste des Hyperboloides berühren, mithin der gestellten Aufgabe entsprechen.

Um die Lage der Ebene E zu finden, werden wir zunächst zu beachten haben, dass ein windschiefes Hyperboloid von parallelen Ebenen in ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten getroffen wird.

Denken wir uns demgemäß P_1 und P_2 als zwei derartige Kegelschnitte. Die Achsen des einen sind parallel zu jenen des anderen, und die Achsen des einen Kegelschnittes stehen in demselben Verhältnisse zu einander, wie die Achsen des zweiten Kegelschnittes.

Hieraus folgt aber unmittelbar, dass die orthogonalen Projectionen dieser Kegelschnitte auf irgend eine Ebene bezogen zwei ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte sein müssen, indem die Projection der parallelen Achsen der ersteren, parallele conjugierte Durchmesser der letzteren ergeben. Ferner stehen die Längen dieser conjugierten Durchmesser in beiden Kegelschnitten in dem nämlichen Verhältnisse. Dieses Verhältnis ist dem Achsenverhältnisse der beiden Kegelschnitte im Raume, multipliciert mit dem Verhältnisse der Cosinusse jener Winkel, welchen die Achsen mit der Projectionsebene einschließen, gleich.

Es ergibt sich daher der Satz:

114. „Die Parallelprojectionen paralleler Schnitte eines windschiefen Hyperboloides auf eine Ebene sind ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte.“

Die diese Projectionen einhüllende Curve ist selbstverständlich keine andere, als die Contour des Hyperboloides auf die betreffende Projectionsebene.

Diese Eigenschaft erlaubt uns, die gestellte Aufgabe in nachstehender Weise zu lösen.

Wir zeichnen über der reellen Achse AB der Hyperbel Σ als Durchmesser einen Kreis C und betrachten denselben als verticale Projection eines ebenen Schnittes des Umdrehungshyperboloides.

Da der besagte Kreis die Contourhyperbel in A und B berührt, so muss auf Grund der vorausgeschickten Erörterungen die schneidende Ebene durch die Punkte A und B, d. i. durch die Achse AB gehen. Nachdem ferner der Kreis C die Projection eines auf dem Hyperboloide liegenden Kegelschnittes darstellen soll, so wird es genügen, irgend einen Punkt m auf dem Kreise C anzunehmen und dessen Horizontalprojection m' derart zu bestimmen, dass (m, m') thatsächlich die Projectionen eines Punktes auf dem Hyperboloide repräsentiere.

Denkt man sich weiters durch $(AB, A'B')$ und durch (m, m') eine Ebene e gelegt, so schneidet diese das Hyperboloid nach einem Kegelschnitt, dessen verticale Projection durch m geht und die Contourhyperbel Σ in A und B berührt. Besagte Kegelschnittprojection muss sonach mit dem Kreise C zusammenfallen.

Nach obigem Satze 114) wird es nunmehr hinreichen, durch den gegebenen Punkt (a, a') eine Ebene E parallel zu dieser Ebene e zu führen.

Um letzteres constructiv durchzuführen, denken wir uns die Profil- oder Kreuzrissebene durch die Achse CD gelegt. Es ergibt

sich sodann nach bekannter Operation die Profiltrace der Ebene e in e_k (als Verbindungsgerade von O mit der Profilprojection m'' des Punktes (m, m'). Führt man nun durch die Profilprojection a'' des Punktes (a, a') eine Parallele E_k zur Trace e_k, so repräsentiert E_k die Profiltrace der zu suchenden Ebene E.

Die Gerade E_k trifft die Profilachse Z in einem Punkte z. Selbstverständlich muss durch diesen Punkt z die Verticaltrace E_v der verlangten Ebene parallel zu AB geführt werden.

Die Ebene E schneidet (nach dem früher bewiesenen Satze 114), das Hyperboloid in einem Kegelschnitte, dessen verticale Projection durch a geht und mit C ähnlich, folglich selbst wieder ein Kreis ist. Dieser Kreis wird die Contourhyperbel Σ in den zwei Punkten α und β berühren, in welchen die letztere von der schneidenden Ebene E getroffen wird.

Der getroffenen Disposition der Projectionsebenen zufolge, sind diese Punkte α und β keine anderen, als die Schnittpunkte von E_v mit der Hyperbel Σ, welche auf einfache Weise vermittelst jenes Kreises, in welchem die horizontale durch E_v gehende Ebene das Hyperboloid schneidet, bestimmt werden können.

Der durch die drei Punkte a, α und β gelegte Kreis berührt die Hyperbel Σ in α und β, und genügt daher den Bedingungen der gestellten Aufgabe.

Bei Bestimmung der Horizontalprojection a' des Punktes a findet man, dass die durch a senkrecht zur Grundlinie gezogene Gerade den durch a gehenden Parallelkreis außer in dem Punkte a' noch in einem zweiten Punkte a'_1 trifft. Der Punkt a kann daher als die vereinigte verticale Projection zweier verschiedener auf dem Rotationshyperboloide liegender Punkte betrachtet werden. Diese Punkte liegen symmetrisch gegen die Ebene der Hyperbel Σ.

Offenbar kann man sowohl durch den Punkt (a, a'), als auch durch den Punkt (a, a'_1) eine Ebene parallel zu der Ebene e legen. Beide Ebenen werden das Hyperboloid nach Kegelschnitten schneiden, deren verticale Projectionen Kreise sind, welche durch a gehen und die Contourhyperbel Σ in zwei Punkten berühren.

Hieraus folgt, dass die gestellte Aufgabe zwei Lösungen zulässt, dass es also zwei verschiedene Kreise gebe, welche den gestellten Forderungen entsprechen.

Zu dem nämlichen Resultate gelangt man auch auf einem anderen Wege. Bei Bestimmung der horizontalen Projection m' tritt nämlich ebenfalls eine Zweideutigkeit auf; es ergeben

sich daselbst auch zwei Punkte (m, m') und (m, m'_1), welche symmetrisch gegen die Ebene der Hyperbel Σ liegen.

Infolge dessen kann der Kreis C als die Projection zweier verschiedener Kegelschnitte des Hyperboloides betrachtet werden, deren Ebenen durch AB gehen und symmetrisch gegen die Ebene der Hyperbel Σ gelagert sind. Man kann daher parallel zu diesen Ebenen durch den Punkt (a, a') zwei Ebenen legen, deren jede zu einer anderen Lösung der gestellten Aufgabe führt.

Die vorstehenden Aufgaben gestatten die verschiedenartigsten Variationen, indem man statt der drei Punkte, durch welche der die Hyperbel doppelt berührende Kegelschnitt zu gehen hat, theilweise oder durchwegs Gerade supponiert, mit welchen derselbe eine Berührung eingehen soll. Am schwierigsten ist die Aufgabe dann zu lösen, wenn der die Hyperbel doppelt berührende Kegelschnitt drei gegebene Geraden zu berühren hat, da es sich diesfalls darum handeln würde, die drei gegebenen Geraden als Verticalprojectionen dreier in einer und derselben (näher zu ermittelnden) Ebene liegenden Tangenten des Hyperboloides zu betrachten und unter dieser Bedingung ihre zweiten Projectionen zu bestimmen.

Es ist jedoch leicht möglich, das letztgenannte Problem auf jenes zu reducieren, durch welches die Forderung gestellt wird, dass der die Hyperbel doppelt berührende Kegelschnitt durch drei Punkte gehe.

Diesen interessanten Fall wollen wir im Nachstehenden durchführen.

§. 129.

17. Aufgabe. **Es ist eine Hyperbel durch ihre Achsen bestimmt, ferner sind drei Geraden gegeben; es soll ein Kegelschnitt construiert werden, welcher diese Geraden in je einem Punkte und die Hyperbel selbst in zwei Punkten berührt.**

Die gegebene Hyperbel Σ (Taf. VIII, Fig. 44) sei durch ihre reelle Achse AB und die Asymptoten A_1 und A_2 fixiert; die drei gegebenen Geraden seien l_1, l_2 und l_3.

Denken wir uns zunächst den Kegelschnitt K, welcher der Aufgabe Genüge leistet, bereits construiert.

Setzen wir weiters voraus, dass der gedachte Kegelschnitt die Hyperbel Σ in den Punkten α und β berühre, und dass die diesen Punkten entsprechenden Tangenten t_α und t_β sein mögen. Die Geraden l_1, l_2 und l_3 mögen von K beziehungsweise in den Punkten p_1, p_2 und p_3 berührt werden.

Nehmen wir nun noch einen beliebigen anderweitigen Kegelschnitt D an und betrachten wir denselben als Directrix einer polaren Reciprocität, so wird, wenn man die bisherigen Gebilde in Bezug auf D polar transformiert, Folgendes eintreten:

Der Hyperbel Σ und dem Kegelschnitte K entsprechen polarreciprok wieder zwei Kegelschnitte Σ' und K' und zwar derart, dass die Polare eines jeden Punktes von beziehungsweise Σ und K eine Tangente des Kegelschnittes Σ' resp. K' ist.

Die beiden Kegelschnitte K und Σ berühren sich aber auf Grund der Voraussetzung in α und β, d. h. sie haben die Punkte α und β und die ihnen zugehörigen Tangenten t_α und t_β gemein. Infolge dessen werden aber auch die Kegelschnitte Σ' und K' zwei Punkte, sowie die denselben entsprechenden Tangenten gemein haben, oder mit anderen Worten: Σ' und K' werden sich in zwei Punkten berühren, welche die Pole der Tangenten t_α und t_β in Bezug auf D sind.

Denn drei Tangenten l_1, l_2 und l_3 des Kegelschnittes K entsprechen als Pole drei Punkte L_1, L_2 und L_3, welche dem Kegelschnitte K' angehören.

Denken wir uns daher außer der gegebenen Hyperbel Σ und den drei gegebenen Tangenten l_1, l_2 und l_3 den vorerwähnten Kegelschnitt D als Directrix einer Polarreciprocität angenommen und bestimmen wir die Polarcurve Σ' zu Σ und die Pole L_1, L_2, L_3 der drei Geraden l_1, l_2 und l_3, so ist die vorige Aufgabe mit jener in Verbindung gebracht, die darin besteht: „Einen Kegelschnitt K' zu construieren, welcher den Kegelschnitt Σ' in zwei Punkten berührt und durch die drei Punkte L_1, L_2 und L_3 geht."

Die Polare des Kegelschnittes K' wird sodann offenbar ein Kegelschnitt K sein, welcher die Hyperbel Σ in zwei Punkten berührt, nebstbei aber auch die drei Geraden l_1, l_2, l_3 tangiert und mithin den gegebenen Bedingungen entspricht.

Sind wir nun im Stande die Directrix der Polarreciprocität, d. h. den Kegelschnitt D so zu wählen, dass die Polarcurve Σ' der Hyperbel Σ wieder eine Hyperbel wird, so können wir mit Rücksicht auf die Aufgabe 15) auch die eben gestellte anstandslos lösen. Dass das Gesagte in der That leicht möglich sei, wird nachstehende Betrachtung rechtfertigen.

Denken wir uns als Directrix der Reciprocität jenen Kreis C (Taf. VIII, Fig. 44) angenommen, welcher mit der gegebenen Hyperbel Σ concentrisch ist und durch die Endpunkte A und B der reellen Achse geht, so lässt sich ohne Schwierigkeit zeigen, dass die Polarcurve Σ' der Hyperbel Σ in diesem Falle selbst wieder eine Hyperbel sei.

Der Geraden A_1 (Asymptote der Hyperbel Σ) entspricht als Pol ein unendlich ferner Punkt, und zwar der unendlich ferne Punkt des zu A_1 senkrechten Kreisdurchmessers A'_1, da A_1 ein Durchmesser der Directrix ist. Nachdem aber A_1 andererseits eine Asymptote, d. i. eine Tangente der Hyperbel Σ ist, so muss ihr Pol — der eben erwähnte unendlich ferne Punkt von A'_1 — ein Punkt der Polarcurve Σ' sein.

Aus ganz gleichen Gründen findet man, dass der unendlich ferne Punkt des zur Asymptote A_2 senkrechten Kreisdurchmessers A'_2 gleichfalls ein Punkt der Polarcurve sein müsse.

Die Polarcurve Σ' der Hyperbel Σ besitzt also zwei unendlich ferne Punkte, ist daher selbst wieder eine Hyperbel. Es erübrigt noch, diese Hyperbel näher zu bestimmen.

Der Annahme gemäß, berührt die Hyperbel Σ die Directrix C in den Punkten A und B. Eine natürliche Folge hievon ist, dass auch die Polarcurve, d. i. die Hyperbel Σ' die Directrix C in den nämlichen zwei Punkten A und B berühren werde.

Dies vorausgesetzt, muss aber AB nothwendig auch die reelle Achse der Polarhyperbel Σ', O deren Mittelpunkt und müssen A'_1 und A'_2 ihre Asymptoten sein. Letzteres wird aus dem Grunde stattfinden, weil diese einerseits durch den Mittelpunkt O der Hyperbel gehen und weil andererseits, wie oben gezeigt wurde, ihre unendlich fernen Punkte der Hyperbel angehören.

Es lässt sich jedoch auch direct nachweisen, dass A'_1 und A'_2 die Asymptoten der Polarhyperbel Σ sind. Da nämlich die Gerade A'_1 den zu A_1 senkrechten Kreisdurchmesser darstellt, so ist diese die Polare des unendlich fernen Punktes von A_1. Nachdem aber der besagte Punkt ein Punkt der Hyperbel Σ ist, so muss A'_1 eine Tangente der Hyperbel Σ' sein.

Weiters ist bekannt, dass die Tangente eines Kegelschnittes mit dem letzteren, außer dem Berührungspunkte, keinen Punkt gemein haben kann. Im vorliegenden Falle wurde aber gefunden, dass die Gerade A'_1 einerseits einen unendlich fernen Punkt der Hyperbel Σ' enthalte und andererseits eine Tangente der letzteren sei. Dieselbe kann somit nur die Tangente in diesem unendlich fernen Punkte, d. i. eine Asymptote von Σ' sein. Dasselbe gilt von der Geraden A'_2.

Durch die vorgenommene polarreciproke Transformation wurde also die Hyperbel Σ in eine zweite Hyperbel Σ' verwandelt, welche mit der ersteren die nämliche reelle Achse AB besitzt und deren Asymptoten auf jenen der ersteren senkrecht stehen.

Denken wir uns nun gleichzeitig die Pole L_1, L_2 und L_3 der gegebenen drei Geraden l_1, l_2 und l_3 in Bezug auf den Kreis C er-

mittelt, so können wir, wie schon in Aufgabe 15) durchgeführt wurde, einen Kegelschnitt K' zeichnen, welcher durch die drei Punkte L_1, L_2 und L_3 geht und die Hyperbel Σ' in zwei Punkten berührt.

Suchen wir endlich die Polarcurve K zu dem oberwähnten Kegelschnitt, so wird diese, den früher angestellten Betrachtungen gemäß, einen Kegelschnitt K repräsentieren, welcher die gegebene Hyperbel Σ in zwei Punkten und jede der drei gegebenen Geraden l_1, l_2 und l_3 in je einem Punkte berührt, womit der gestellten Aufgabe vollkommen Genüge geleistet ist.

Da die vorausgeschickte Hilfsaufgabe, wie wir gesehen haben, vier verschiedene Lösungen zulässt, so sind auch hier vier verschiedene Kegelschnitte möglich, welche sämmtlich den Bedingungen der Aufgabe entsprechen werden.

§. 130.

18. Aufgabe. **Eine Hyperbel ist durch ihre reelle Achse AB und durch ihre Asymptoten bestimmt; ferner sind eine Gerade t und zwei Punkte a, b gegeben. Es ist ein Kegelschnitt zu construieren, welcher die Hyperbel in zwei Punkten, die Gerade t in einem Punkte berührt und durch die beiden Punkte a, b geht.**

Wenn die beiden gegebenen Punkte a und b (Taf. VIII, Fig. 45) in jenem Raume zwischen den Hyperbelästen liegen, in welchem sich auch die Asymptoten der Hyperbel vorfinden, so kann die gestellte Aufgabe in ähnlicher Weise wie die vorhergehenden, mit Zuhilfenahme eines Rotationshyperboloides gelöst werden.

Die Ebene der Hyperbel Σ (AB, A_1, A_2) betrachten wir als verticale Projectionsebene; die Hyperbel selbst als Schnitt und gleichzeitig als verticale Contour eines Rotationshyperboloides. Die horizontale Projectionsebene wählen wir senkrecht zur Drehachse (Z, Z') des Hyperboloides, als welche die imaginäre Achse CD der Hyperbel Σ angesehen werden kann. Die Grundlinie X ist folglich eine zu Z senkrechte Gerade.

Das Hyperboloid ist somit dargestellt durch den Kehlkreis (K, K') und durch die in der verticalen Projectionsebene liegenden Umriss-Erzeugenden A_1 und A_2 des Asymptotenkegels.

Die Lösung der Aufgabe besteht nun in Folgendem.

Es wird zunächst eine Ebene aufzusuchen sein, welche das Hyperboloid nach einem Kegelschnitte schneidet, dessen verticale Projection durch die Punkte a und b geht und überdies die Gerade t berührt.

In erster Linie muss also die Ebene durch zwei Punkte des Hyperboloides gehen, deren Verticalprojectionen a und b sind.

Diese Punkte lassen sich aus a und b vermittelst der durch dieselben gehenden Kreise des Hyperboloides ableiten. Die diesfallsigen Horizontalprojectionen erscheinen sodann durch a' und b' dargestellt.

Die zu bestimmende Ebene, welche durch die Punkte (a, a') und (b, b') geht, muss aber selbstverständlich auch deren Verbindungsgerade (l, l') enthalten.

Soll ferner die zu ermittelnde Ebene das Hyperboloid in einem Kegelschnitte schneiden, dessen verticale Projection von der Geraden t berührt wird, so ist einleuchtend, dass t die verticale Projection einer in dieser Ebene liegenden Kegelschnittstangente, oder, was dasselbe ist, die verticale Projection einer die Gerade (l, l') schneidenden Tangente des Hyperboloides darstellen müsse.

Die verticalen Projectionen l und t treffen sich in einem Punkte s. Dieser Punkt (s, s') auf der Geraden (l, l') wird mithin derjenige sein, durch welchen die genannte Tangente zu führen ist.

Demnach ist vor allem die Aufgabe zu lösen:

„Durch den Punkt (s, s') eine Gerade zu ziehen, welche eine gegebene, durch s gehende Verticalprojection t besitzt, und das Hyperboloid berührt."

Nachdem diese Gerade offenbar in der verticalprojicierenden Ebene ε_v liegt, deren Verticaltrace mit t zusammenfällt, so wird sie eine der beiden Tangenten sein, welche von dem Punkte (s, s') an den in der Ebene ε_v liegenden Kegelschnitt des Hyperboloides geführt werden können. Es genügt daher, die horizontale Projection der Schnittcurve der Ebene ε_v mit dem Hyperboloide zu ermitteln, und an dieselbe von s' aus eine Tangente zu ziehen, um durch die letztere die Horizontalprojection t' der gesuchten Geraden dargestellt zu erhalten.

Behufs Vollführung des Gesagten verfahren wir folgendermaßen.

Wir ziehen an den Kehlkreis, oder beziehungsweise an dessen horizontale Projection K' die beiden Tangenten g'_1 und g'_2. Jede dieser beiden Tangenten bildet, wie bekannt, mit jeder der Geraden A_1 und A_2 die Projectionen einer zur verticalen Projectionsebene parallelen Erzeugenden des Hyperboloides. — Es sind mithin (A_1, g'_1), (A_2, g'_1), (A_1, g'_2) und (A_2, g'_2) vier Erzeugende des Hyperboloides, welche von der Ebene ε_v in den vier Punkten (m_1, m'_1) (m_2, m'_2), (n_1, n'_1) (n_2, n'_2) geschnitten werden.

Die horizontalen Projectionen m'_1, m'_2, n'_1 und n'_2 sind sodann bereits vier Punkte jenes Kegelschnittes, welcher die horizontale Projection des Schnittes von ε_v mit dem Hyperboloide repräsentiert. Um diesen Kegelschnitt vollkommen bestimmt zu erhalten, denken wir uns noch dessen Tangente in einem der vier Punkte, etwa in n'_1, ermittelt.

Wir wissen bereits, dass sich die Tangenten in einem Punkte eines ebenen Schnittes einer krummen Fläche als Schnittgerade der Ebene jenes Schnittes mit der Berührungsebene der Fläche in dem betreffenden Punkte ergibt.

Es wird also vorerst die Tangentialebene des Hyperboloides in dem Punkte (n_1, n'_1) zu construieren sein. Diese enthält die beiden durch (n_1, n'_1) gehenden Erzeugenden des Hyperboloides, deren horizontale Projectionen $n'_1 \alpha$ und $n'_1 \delta$ die von n_1 aus an K' gezogenen Tangenten sind. Die eine dieser Erzeugenden ist die Gerade (A_2, g'_2), deren horizontaler Durchstoßpunkt δ ist.

Beschreibt man aus Z' einen durch δ gehenden Kreis K'_2, so trifft dieser die horizontale Projection $\alpha n'_1 \alpha_1$ der zweiten durch n'_1 gehenden Erzeugenden in deren horizontalem Durchstoßpunkte α_1 so, dass sich die Horizontaltrace H_h der Berührungsebene des Hyperboloides im Punkte (n_1, n'_1) als Verbindungsgerade der Punkte α und δ herausstellt. Die Verticaltrace H_v kann direct verzeichnet werden; dieselbe ist bekanntlich parallel zu A_2, da die Berührebene die zur verticalen Projectionsebene parallele Erzeugende (A_2, g'_2) des Hyperboloides enthält.

Der Schnitt (t_1, t'_1) der Ebenen ε_v und H_v ist sodann die Tangente des ebenen Schnittes ε_v im Punkte (n_1, n'_1).

Die Horizontalprojection dieses Schnittes ist somit durch die vier Punkte m'_1, m'_2, n'_1, n'_2 und die Tangente t'_1 in n'_1 vollkommen bestimmt.

An diesen Kegelschnitt soll nun durch den Punkt s' eine Tangente gezogen werden.

Berücksichtigt man, dass die Punkte m'_1 und m'_2, sowie auch n'_1 und n'_2 symmetrisch gegen die Grundlinie liegen, so wird auch die Tangente t'_2 im Punkte n'_2 symmetrisch zur Tangente t'_1 in Bezug auf die Grundlinie X sein müssen.

Zeichnet man nunmehr einen Kreis K_0, welcher t'_1 und t'_2 in n'_1 und n'_2 berührt, so kann dieser als collinear mit dem obgenannten Kegelschnitte betrachtet werden. Die Collineationsachse ist $n'_1 n'_2$; das Collineationscentrum dagegen der Schnittpunkt v' von t'_1 und t'_2. Mittelst dieser Collineation ist es jetzt leicht, auf bereits bekannte Weise die durch s' gehenden Tangenten des Kegelschnittes $(m_1 m_2 n_1 n_2 t_1)$ zu construieren.

Gesetzt es sei t' eine dieser beiden Tangenten. Dieser Annahme gemäß sind t und t' die Projectionen einer Tangente des Hyperboloides, welche gleichzeitig die Gerade (l, l') in einem Punkte (s, s') trifft. Die durch (l, l') und (t, t') gelegte Ebene $E_v E_h$ wird nun das Hyper-

boloid in einem Kegelschnitte treffen, welcher durch die Punkte (a, a') und (b, b') geht, und von der Geraden (t, t') berührt wird.

Die verticale Projection dieses Kegelschnittes ist mithin ein Kegelschnitt, welcher die Hyperbel doppelt berührt, die Gerade t tangiert und durch die Punkte a und b geht, somit der gestellten Aufgabe genügt.

Berücksichtigt man, dass die Punkte a und b als Verticalprojectionen je zweier verschiedenen Punkte des Hyperboloides betrachtet werden können, und dass in jedem dieser Fälle auch an den betreffenden Kegelschnitt in der Ebene ε_v von s' aus zwei Tangenten möglich sind, so folgt, dass es $2.2.2 = 8$ verschiedene Lagen der schneidenden Ebene $E_v E_h$ gibt. Nachdem aber, wie man sich leicht überzeugen kann, diese acht Ebenen gegen die verticale Projectionsebene paarweise symmetrisch sind, ihre Schnitte mit dem Hyperboloid daher paarweise zusammenfallende verticale Projectionsebenen besitzen, so folgt, dass die gestellte Aufgabe vier verschiedene Lösungen zulässt.

§. 131.

19. Aufgabe. Eine Hyperbel, zwei Gerade und ein Punkt sind gegeben; es ist ein Kegelschnitt zu construieren, welcher die Hyperbel in zwei Punkten berührt, die beiden Geraden zu Tangenten hat, und durch den obbezeichneten Punkt geht.

Diese Aufgabe kann unmittelbar auf die vorhergehende zurückgeführt werden.

Man lege durch die reelle Achse der Hyperbel als Durchmesser einen Kreis D, und betrachte denselben als Directrix einer polaren Reciprocität.

Der Hyperbel entspricht sodann polar eine zweite mit derselben reellen Achse und zwei Asymptoten, welche auf jenen der ersteren senkrecht stehen. (Siehe Aufgabe 17.) Den beiden Geraden l_1 und l_2 entsprechen zwei Punkte L_1 und L_2, und dem gegebenen Punkte L entspricht eine Gerade l. Construiert man nun, sowie vorher, einen Kegelschnitt K', welcher die zweite Hyperbel doppelt berührt, die Gerade l tangiert, und durch die beiden Punkte L_1 und L_2 geht; sucht man hierauf die Polarcurve K zu dem oberwähnten Kegelschnitte, so wird diese die gegebene Hyperbel doppelt, die beiden Geraden l_1 und l_2 einfach berühren, und schließlich durch den Punkt L gehen, mithin allen Bedingungen der gestellten Aufgabe entsprechen. Selbstverständlich gestattet auch diese Aufgabe wieder vier verschiedene Lösungen.

Nebenbei sei noch bemerkt, dass die vorstehende Aufgabe vermittelst eines windschiefen Rotationshyperboloides nur dann gelöst werden kann, wenn die Punkte L_1 und L_2 (Pole der Geraden l_1 und l_2) zwischen den Ästen jener Hyperbel liegen, welche sich als Polarcurve der gegebenen Hyperbel ergibt, da nur in diesem Falle L_1 und L_2 als Projectionen zweier Punkte des Hyperboloides betrachtet werden können.

§. 132.

20. Aufgabe. **Gegeben ist eine Hyperbel, zwei Punkte und eine Gerade, welche durch einen dieser Punkte geht. Es ist ein Kegelschnitt zu construieren, welcher die Hyperbel doppelt berührt, durch die beiden gegebenen Punkte geht und in einem derselben von der gegebenen Geraden berührt wird.**

Die gegebene Hyperbel Σ $[AB, A_1 A_2]$ (Taf. VIII, Fig. 46) betrachten wir wieder als den verticalen Schnitt und gleichzeitig als die verticale Contour eines Umdrehungshyperboloides, für welches A_1 und A_2 die in der verticalen Projectionsebene liegenden Erzeugenden des Asymptotenkegels vorstellen und dessen Kehlkreis sich direct in (K, K') ergibt.

Sind a und b die beiden gegebenen Punkte, t die gegebene durch a gehende Gerade, so wird es sich zunächst darum handeln, eine Ebene E derart zu bestimmen, dass dieselbe durch zwei Punkte des Hyperboloides, deren Verticalprojectionen a und b sind, gehe, und nebstbei eine Tangente des Hyperboloides im Punkte a, deren verticale Projection mit t zusammenfällt, enthalte.

Sämmtliche Tangenten des Hyperboloides in dem Punkte (a, a') — a' und b' wurden aus a und b auf bekannte Weise abgeleitet — liegen in der durch diesen Punkt geführten Berührungsebene des Hyperboloides. Bestimmt man daher vermittelst der Erzeugenden (g, g'), $[g = A_2]$, den Kreis K_2', in welchem das Hyperboloid die horizontale Projectionsebene schneidet und zieht man durch a' die beiden Tangenten γ_1' und γ_2' an die horizontale Projection K' des Kehlkreises, so erhalten wir die horizontalen Projectionen der durch (a, a') gehenden, beziehungsweise die die zugehörige Berührebene bestimmenden Erzeugenden.

Die horizontale Trace B_h dieser Berührebene ist die Verbindungslinie der horizontalen Durchstoßpunkte h_1' und h_2' der Erzeugenden γ_1' und γ_2', d. i. die Verbindungsgerade jener Punkte, in welchen γ_1' und γ_2' den Kreis K_2' schneiden.

Nachdem t die Projection einer Tangente des Hyperboloides im Punkte (a, a'), d. h. die verticale Projection einer in der Berührebene $B_v B_h$ liegenden Geraden darstellen soll, so ergibt sich sofort deren

horizontaler Durchstoßpunkt (h, h') in der Horizontaltrace B_h, und weiters die horizontale Projection t' derselben, als Verbindungsgerade der Punkte h' und a'.

Legt man nun durch die Gerade (t, t') und den Punkt (b, b') eine Ebene $E_v E_h$, und bestimmt deren Schnitt mit dem Hyperboloide, so erhält man einen Kegelschnitt, welcher durch den Punkt (b, b') geht und die Gerade (t, t') im Punkte (a, a') berührt.

Die verticale Projection dieses Kegelschnittes berührt die Hyperbel Σ in zwei Punkten, die Gerade t in a und geht durch den gegebenen Punkt b, entspricht somit den gestellten Bedingungen.

Da es zwei Punkte auf dem Hyperboloid gibt, deren verticale Projection a und ebenso zwei Punkte existieren, deren verticale Projection b ist, so gibt es im ganzen vier Ebenen $E_v E_h$. Nachdem diese Ebenen jedoch paarweise symmetrisch gegen die verticale Projectionsebene sind, so lässt die eben gelöste Aufgabe nur zwei verschiedene Lösungen zu.

§. 133.

21. Aufgabe. **Eine Hyperbel, zwei Geraden t und t_1 und auf t ein Punkt a sind gegeben; es ist ein Kegelschnitt zu construieren, welcher die Hyperbel doppelt, die Gerade t_1 einfach und endlich die Gerade t im Punkte a berührt.**

Vorstehendes Problem kann auf zweifache Weise mittelst eines Rotationshyperboloides gelöst werden.

a) Man transformiert durch polare Reciprocität die gegebene Hyperbel Σ in eine andere Σ'. Den beiden Geraden t und t_1 entsprechen polar zwei Punkte T und T_1, während dem in t liegenden Punkte a eine Gerade A, welche durch den Punkt T geht, entspricht. Construiert man nun einen Kegelschnitt K', welcher die Hyperbel Σ' doppelt berührt, die Gerade A in T tangiert und durch den Punkt T_1 geht (vorhergehende Aufgabe), so wird die dieser Curve K' polarreciprok entsprechende Kegelschnittslinie K die gestellten Bedingungen erfüllen.

b) Man betrachtet, wie in der vorher gelösten Aufgabe, die gegebene Hyperbel als die verticale Contour des Rotationshyperboloides und bestimmt, wie dort, eine Tangente (t, t') des Hyperboloides, welche dasselbe im Punkte (a, a') berührt und zur verticalen Projection die gegebene Gerade t hat.

Ferner ermittelt man (wie in Aufgabe 18) eine zweite Tangente (t_1, t_1') des Hyperboloides, welche die erstere Tangente (t, t') in einem Punkte (s, s') schneidet und deren verticale Projection mit der gegebenen Geraden t_1 zusammenfällt.

Eine Ebene $E_v E_h$, welche durch die Geraden (t, t') und (t_1, t_1') gelegt wird, schneidet das Rotationshyperboloid in einem Kegelschnitte, welcher mit den beiden Geraden (t, t') und (t_1, t_1') eine Berührung eingeht, von der ersteren aber speciell im Punkte (a, a') berührt wird.

Die verticale Projection dieses Kegelschnittes ist demgemäß ein Kegelschnitt, welcher die gegebene Hyperbel in zwei Punkten, die Gerade t im Punkte a und endlich auch die Gerade t_1 berührt, mithin den gestellten Bedingungen entspricht.

Nebenbei sei noch erwähnt, dass obige Aufgabe zwei Lösungen zulasse.

§. 134.

Das Hyperboloid findet auch eine vortheilhafte Verwerthung bei der Lösung von Problemen, durch welche die Anforderung gestellt wird, Kegelschnitte zu zeichnen, welche eine Ellipse oder einen Kreis doppelt berühren, dessen Punkte aber sämmtlich außerhalb der gegebenen Curve liegen. Einige Beispiele mögen auch in dieser Richtung die nothwendige Erläuterung des Angedeuteten schaffen.

22. Aufgabe. **Gegeben sei ein Kreis K' und außerhalb desselben drei Punkte a', b' und c'; es ist ein Kegelschnitt zu construieren und durch seine Achsen zu bestimmen, welcher den Kreis in zwei Punkten berührt und durch die gegebenen drei Punkte geht.**

Den gegebenen Kreis K' betrachten wir als die horizontale Projection des Kehlkreises eines Hyperboloides.

Um überflüssige Constructionen zu vermeiden, denken wir uns die Projectionsebenen bereits derart transformiert, dass die Projectionsachse, resp. die Grundlinie GG als eine Gerade erscheint, welche zu der einen von a' (Taf. IX, Fig. 47) aus an K' gezogenen Tangente g' parallel läuft. Der Grund dieser Annahme wird sofort klar hervortreten. Die verticale Projection der Drehungsachse des Hyperboloides ist sodann, der gemachten Voraussetzung gemäß, die zu GG normale Gerade Z, welche durch den Mittelpunkt Z' von K' gezogen werden kann. Als Kehlkreisebene wählen wir eine beliebige zur horizontalen Projectionsebene parallele Ebene ε_v. Besagte Ebene ε_v schneidet die Drehachse (Z, Z') in dem Mittelpunkte (O, O') des Hyperboloides.

Setzen wir weiters noch voraus, der Punkt a' gehöre dem Hyperboloide an und liege überdies in der horizontalen Projectionsebene. Die verticale Projection a desselben ergibt sich sodann selbstverständlich in der Grundlinie.

Die Gerade g' ist als Tangente an die horizontale Projection K' des Kehlkreises, gleichzeitig die horizontale Projection einer Erzeugenden (g, g') des Hyperboloides. Da diese Tangente zu der Grundlinie parallel läuft, wird die genannte Erzeugende (g, g') auch parallel zur verticalen Projectionsebene sein. Die verticale Projection g dieser Erzeugenden geht aber diesfalls durch die verticale Projection O des Mittelpunktes des Hyperboloides, und ergibt sich demgemäß als die Verbindungsgerade der Punkte a und O. Durch diese Bestimmungsstücke ist das Umdrehungshyperboloid vollkommen festgestellt.

Betrachten wir nun weiters auch die Punkte b' und c' als Horizontalprojectionen von Punkten, welche auf dem nämlichen Hyperboloide liegen sollen, so wird es sich bloß um die diesbezügliche Bestimmung der verticalen Projectionen derselben handeln.

Soll beispielsweise die verticale Projection b des Punktes b' ermittelt werden, so denke man sich aus dem Mittelpunkte O' einen durch b' gehenden Kreis K'_1 gezeichnet. Letzterer stellt nichts anderes als die Horizontalprojection jenes Kreises dar, in welchem die durch den zu suchenden Punkt (b, b') gelegte horizontale Ebene η_v das Hyperboloid schneidet. Dieser Kreis K'_1 trifft die horizontale Projection g' der zur Bildebene parallelen Erzeugenden des Hyperboloides in zwei Punkten β' und β'_1, wovon wir den einen β' als die Horizontalprojection jenes Punktes (β, β') betrachten wollen, in welchem die Erzeugende (g, g') von der Ebene η_v getroffen wird. Hierdurch ergibt sich unmittelbar auf g die Verticalprojection β dieses Punktes und durch denselben sowohl die zur Grundlinie parallele Trace η_v der genannten Ebene η, als auch zugleich die verticale Projection des durch (b, b') gehenden Kreises. Die durch b' zur Grundlinie senkrechte Gerade trifft η_v in der Verticalprojection b des gesuchten Punktes (b, b').

In gleicher Weise bestimmt man zu c' die Verticalprojection c derart, dass der Punkt (c, c') auf dem Hyperboloide liegt.

Legen wir durch die drei Punkte (a, a'), (b, b') und (c, c') eine Ebene $E_v E_h$, so geht, infolge der getroffenen Annahme, die horizontale Trace E_h derselben einerseits durch a' und andererseits durch den Durchstoßpunkt h' der Geraden $(bc, b'c')$ mit der horizontalen Projectionsebene.

Die Ebene $E_v E_h$ schneidet das Hyperboloid in einem Kegelschnitte, dessen Achsen (nach Aufgabe 7) direct bestimmt werden können. Dieser Kegelschnitt geht durch die drei Punkte (a, a'), (b, b') und (c, c'), seine horizontale Projection mithin durch die drei gegebenen Punkte a', b' und c'.

Es lässt sich aber unschwer nachweisen, dass die horizontale Projection des vorerwähnten Kegelschnittes die Horizontalprojection K' des Kehlkreises in zwei Punkten berührt.

Die Ebene $E_v E_h$ trifft nämlich den Kehlkreis (K, K') in zwei Punkten (m, m') und (n, n'), welche dem vorgenannten Kegelschnitte angehören. Die Berührungsebenen B^m und B^n des Hyperboloides in diesen Punkten sind, wie überhaupt in jedem Punkte des Kehlkreises, horizontalprojicierende Ebenen, deren horizontale Tracen B^m_h und B^n_h den Kreis K' in m' und n' berühren. Die Schnittgeraden dieser Berührebenen mit der Ebene $E_v E_h$ sind bekanntlich die Tangenten des Schnittes in den Punkten (m, m') und (n, n'); es müssen demgemäß die Geraden B^m_h und B^n_h die horizontale Projection der Schnittcurve in m' und n' berühren. Hieraus folgt aber, dass die horizontale Projection des ebenen Schnittes $(E_v E_h)$ den Kreis K' selbst in den beiden Punkten m' und n' berühren müsse und mithin den gesuchten Kegelschnitt repräsentiert.

Da jeder der Punkte a', b' und c' die horizontale Projection zweier symmetrisch gegen die Kehlkreisebene liegender Punkte darstellt, so gibt es im ganzen acht verschiedene Lagen der Ebene $E_v E_h$, welche aber wieder paarweise symmetrisch gegen die Kehlkreisebene gelagert sind. Zwei solche symmetrisch gelegene Ebenen $E_v E_h$ und $E_v' E_h'$ schneiden offenbar das Hyperboloid nach Kegelschnitten, welche die nämliche Horizontalprojection besitzen. Daraus ersieht man, dass im ganzen eigentlich vier verschiedene Kegelschnitte existieren, welche den gestellten Bedingungen Genüge leisten.

§. 135.

23. Aufgabe. **Eine Hyperbel ist zu construieren, welche einen gegebenen Kreis K' in zwei Punkten berührt, durch einen gegebenen Punkt a' geht, und deren Asymptoten zu zwei gegebenen Geraden Σ_1 und Σ_2 parallel sind.**

Wir denken uns, ebenso wie in der vorhergehenden Aufgabe, ein Rotationshyperboloid construiert, für welches der gegebene Kreis K' (Taf. VIII, Fig. 48) die horizontale Projection des Kehlkreises vorstellt, und dessen zur verticalen Projectionsebene parallele Erzeugende (g, g') durch den (in der Horizontalebene liegenden) Punkt a' gehen möge. Die Trace des Hyperboloides auf der horizontalen Projectionsebene sei der durch a' gehende mit K' concentrische Kreis K'_2; die Trace des Asymptotenkegels werde durch den ebenfalls mit K' concentrischen Kreis K'_1 dargestellt. Der Zusammenhang, in welchem K'_1 und K'_2 stehen, ist bekannt.

Behufs Lösung der gestellten Aufgabe wird man eine Ebene $E_v E_h$ zu bestimmen haben, welche das Hyperboloid nach einem Kegelschnitte (C, C') so schneidet, dass dessen Horizontalprojection C' durch den Punkt a' geht, und dass dessen Asymptotenprojectionen den gegebenen Asymptotenrichtungen Σ_1 und Σ_2 parallel sind.

Eine Ebene, welche durch den Scheitel des Asymptotenkegels zu einer das Hyperboloid schneidenden Ebene parallel gelegt wird, schneidet, wie wir wissen, den Asymptotenkegel in zwei (reellen oder imaginären) Erzeugenden, welche zu den (reellen oder imaginären) Asymptoten des ebenen Schnittes parallel sind.

Im vorliegenden Falle sind aber die Richtungen der Horizontalprojectionen der Asymptoten, also auch der Horizontalprojectionen jener Erzeugenden des Asymptotenkegels durch Σ_1 und Σ_2 gegeben.

Zieht man demgemäß durch O' die Geraden $O'\alpha'$ oder σ'_1 und $O'\beta'$ oder σ'_2 beziehungsweise parallel zu Σ_1 und Σ_2, so erhält man die horizontalen Projectionen zweier Erzeugenden (σ_1, σ'_1) und (σ_2, σ'_2) des Asymptotenkegels, deren verticale Projectionen $O\alpha$ oder σ_1 und $O\beta$ oder σ_2 mittelst der horizontalen Durchstoßpunkte (α, α') und (β, β') erhalten werden können.

Legt man durch (σ_1, σ'_1) und (σ_2, σ'_2) eine Ebene $e_v e_h$, und zu dieser durch den Punkt (a, a') eine parallele Ebene $E_v E_h$, so wird die letztere das Umdrehungshyperboloid in einem Kegelschnitte treffen, welcher durch den Punkt (a, a') geht, und deren Asymptoten zu den Kegelerzeugenden (σ_1, σ'_1) und (σ_2, σ'_2) parallel sind.

Die Horizontalprojection dieses Kegelschnittes berührt somit zweimal den Kreis K', geht durch den Punkt a', und die Asymptoten desselben sind parallel zu σ'_1 und σ'_2, folglich auch parallel zu Σ_1 und Σ_2. Durch diese Horizontalprojection wird sonach der verlangte Kegelschnitt dargestellt.

Auf demselben Principe wie die besprochenen Probleme beruhend, kann nunmehr eine ganze Reihe von Aufgaben über Kegelschnitte, welche einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berühren, gelöst werden. Auf diese und ähnliche Aufgaben werden wir gelegentlich und insbesondere bei Besprechung anderer Flächen zweiten Grades zurückkommen.

Nebenbei wollen wir hier noch erwähnen, dass in den beiden letzterörterten Aufgaben statt des dort benützten Kreises selbstverständlich auch eine Ellipse mit der gleichen Berechtigung gegeben sein kann. Dass sodann diese letztere als Horizontalprojection der Kehlellipse eines allgemeinen windschiefen Hyperboloides zu betrachten sein wird, braucht wohl kaum besonders bemerkt zu werden.

Es erübrigt jedoch noch zu zeigen, dass das Rotationshyperboloid auch zur Construction von Kegelschnitten verwendet werden kann, welche eine gegebene Parabel in zwei Punkten berühren und nebstbei drei einfachen Bedingungen Genüge leisten.

Bevor wir auf die Lösung der eben angedeuteten Probleme übergehen, wollen wir noch Einiges vorausschicken, da wir durch seinerzeitige entsprechende Verwendung des Nachstehenden das oben angegebene Ziel leichter erreichen werden.

§. 136.

24. Aufgabe. **Ein Rotationshyperboloid, dessen Drehachse auf der horizontalen Projectionsebene senkrecht steht, ist gegeben; es ist die Richtung eines zur verticalen Projectionsebene parallelen Strahles zu ermitteln, für welchen als „Projectionsstrahl" die Contour des Hyperboloides auf der horizontalen Projectionsebene als gleichseitige Hyperbel erscheint.**

Der Kehlkreis des Hyperboloides sei (K, K') (Taf. IX, Fig. 49), die Drehungsachse desselben sei (Z, Z') und (A_1, A_2) stelle die verticale Contour des Asymptotenkegels dar, dessen Spur auf der horizontalen Projectionsebene sich als ein Kreis K'_1 ergibt.

Wir wählen vorerst eine beliebige, zu der verticalen Projectionsebene parallele Gerade S als schief projicierenden Strahl und suchen jene Eigenschaften auf, welche diesfalls der Contour des Rotationshyperboloides auf der horizontalen Projectionsebene für die Richtung S der Projectionsstrahlen zukommen werden.

Die fragliche Contour ist die Enveloppe der Horizontaltracen aller Tangentialebenen des Hyperboloides, welche parallel zu der Geraden S an dasselbe gelegt wurden.

Jede dieser Horizontaltracen berührt die Contour in jenem Punkte, welcher sich als die schiefe Projection desjenigen Punktes ergibt, in welchem die betreffende Tangentialebene das Hyperboloid berührt.

Vor allem fallen die beiden Berührungsebenen T_1 und T_2 des Hyperboloides auf, welche zur verticalen Projectionsebene und mithin auch zu dem projicierenden Strahle S parallel sind. Dieselben berühren das Hyperboloid in jenen Punkten (a, a') und (b, b') des Kehlkreises (K, K'), welche auf dem zur verticalen Projectionsebene senkrechten Durchmesser des genannten Kreises liegen.

Die Horizontaltracen T'_h und T^2_h dieser Tangentialebenen sind demnach die zur Grundlinie GG parallelen Tangenten an die Horizontalprojection K' des Kehlkreises.

Dem Obigen zufolge sind die Tracen aber auch Tangenten an die horizontale Contour des Hyperboloides, u. zw. berühren besagte Tracen diese Contour in den Punkten a'_s und b'_s, welche sich als die schiefen Projectionen der Punkte (a, a') und (b, b') ergaben.

Da $a'_s b'_s$ parallel zu $a'b'$ ist und die Tangenten T^1_h und T^2_h in den Endpunkten a'_s, b'_s zu $a'_s b'_s$ senkrecht stehen, stellt die bezeichnete Gerade die reelle Achse der Contour dar. Der Mittelpunkt o'_s der Strecke $a'_s b'_s$, welcher offenbar die schiefe Projection des Mittelpunktes (O, O') des Hyperboloides darstellt, ist folglich der Mittelpunkt der Contour.

Zieht man von o'_s aus die Tangenten B^1_h und B^2_h an die Horizontalspur des Asymptotenkegels, so repräsentieren diese Geraden die Horizontaltracen der zur Geraden S parallelen Berührungsebenen des Asymptotenkegels, da jede dieser Ebenen die zu S parallele Gerade Oo_s enthält. Nachdem wir aber wissen, dass jede Berührebene des Asymptotenkegels gleichzeitig eine asymptotische, d. i. eine im Unendlichen berührende Ebene des Hyperboloides ist, so müssen als natürliche Folge die Horizontaltracen B^1_h und B^2_h dieser Ebenen ebenfalls Tangenten der Contour sein und da diese überdies durch den Mittelpunkt o_s der Contour gehen, so werden sie insbesondere die Asymptoten der letzteren darstellen.

Der gestellten Aufgabe gemäß soll die Contour des Hyperboloides eine gleichseitige Hyperbel sein; es müssen also die beiden Geraden (Asymptoten) B^1_h und B^2_h wechselseitig aufeinander senkrecht stehen.

Man wird daher, weil der schief projicierende Strahl S zur verticalen Projectionsebene parallel sein soll, bloß die beiden Tangenten B^1_h und B^2_h an die Horizontalspur K'_1 des Asymptotenkegels zu ziehen haben, um sogleich Geraden zu erhalten, welche mit der Grundlinie den Winkel von 45° einschließen und mithin als solche auch aufeinander senkrecht stehen.

Diese Tangenten repräsentieren bereits die Asymptoten der gesuchten Contour. Der Schnittpunkt o'_s derselben ist der Mittelpunkt der Contour und gleichzeitig die schiefe Projection des Mittelpunktes (O, O') des Hyperboloides.

Hiernach ergibt sich die gewünschte Richtung des schief projicierenden Strahles als Verbindungsgerade der Punkte (O, O') und (o_s, o'_s).

Um endlich die reelle Achse der Contourhyperbel zu erhalten, hat man den zur verticalen Projectionsebene senkrechten Durchmesser $(ab, a'b')$ des Kehlkreises (K, K') schief nach $a'_s b'_s$ zu projicieren, oder, was gleichbedeutend ist, man hat durch

o'_s eine Senkrechte zur Grundlinie zu ziehen und auf derselben von o'_s aus zu beiden Seiten die Strecke $a'_s o'_s = b'_s o'_s$ gleich dem Radius des Kehlkreises aufzutragen, um in a'_s und b'_s bereits die Scheitel der Contourhyperbel zu erhalten.

§. 137.

Erzeugung eines Rotationshyperboloides, wenn verschiedene Elemente desselben gegeben sind.

25. Aufgabe. **Ein Rotationshyperboloid ist durch zwei Erzeugende, welche einem und demselben Systeme angehören und durch einen Punkt der Fläche gegeben; es soll der Mittelpunkt, der Kehlkreis und der Asymptotenkegel bestimmt werden.**

In Anbetracht der Einfachheit der Lösung der gestellten Aufgabe dürfte die bloße Angabe derselben auch ohne graphische Durchführung vollkommen hinreichen.

Die beiden Erzeugenden seien g_1 und g_2, der gegebene Punkt sei P.

Nachdem durch jeden Punkt auf einem Hyperboloide zwei Erzeugende, welche verschiedenen Systemen angehören, gehen, und jede Erzeugende des einen Systems (l) sämmtliche Erzeugenden des anderen Systems (g) schneidet, so wird man unmittelbar eine Erzeugende l finden, wenn man jene Gerade aufsucht, die durch den Punkt P geführt, die beiden Geraden g_1 und g_2 schneidet.

Da weiters das Hyperboloid ein Umdrehungshyperboloid sein soll, so müssen dessen sämmtliche Erzeugenden zu den Erzeugenden eines Kreiskegels parallel sein.

Ein solcher Kreiskegel (Richtungskegel) wird sogleich erhalten, wenn man irgend einen Punkt S als den Scheitel desselben beliebig wählt, und durch S drei seiner Erzeugenden γ_1, γ_2 und λ als die Parallelen zu den Geraden g_1, g_2 und l führt.

Durch die drei Erzeugenden γ_1, γ_2 und λ ist der Kreiskegel vollkommen bestimmt. Schneidet man nämlich auf diesen Geraden vom Punkte S drei gleiche Strecken $S\alpha_1$, $S\alpha_2$ und $S\beta$ ab, so sind γ_1, γ_2 und λ gegen die Ebene der drei Punkte α_1, α_2 und β gleich geneigt, woraus folgt, dass diese Ebene den Kegel nach einem Kreise K schneidet, welcher durch die drei Punkte α_1, α_2 und β geht. Die Gerade So, welche den Scheitel S mit dem Mittelpunkte o des Kreises K verbindet, ist die Achse des Kegels, zu welcher, wie bekannt, die Achse des Umdrehungshyperboloides parallel sein muss.

Berücksichtigt man, dass jeder Richtungskegel eines Hyperboloides zu dem Asymptotenkegel desselben parallel ist, dass also auch jede Berührungsebene des Richtungskegels zu einer asymptotischen Ebene des Hyperboloides parallel sein wird, so ergeben sich folgende weitere Constructionen. Construiert man nämlich die Berührungsebenen A'_1, A'_2 und B' des Richtungskegels (S, K) in den drei Erzeugenden γ_1, γ_2 und λ, und führt man durch die Erzeugenden g_1, g_2 und l des Umdrehungshyperboloides die Parallelebenen A_1, A_2 und B zu jenen drei Ebenen, so repräsentieren diese die asymptotischen Ebenen der drei Erzeugenden g_1, g_2 und l, welche sich in dem Mittelpunkte O des Umdrehungshyperboloides schneiden werden. Die Umdrehungsachse Z des letzteren ergibt sich nun direct als die Parallele durch O zu der Achse So des Richtungskegels.

Führt man ferner durch O eine Ebene e senkrecht zu Z, so stellt diese bereits die Kehlkreisebene vor. Den Kehlkreis selbst erhält man als jenen Kreis, welcher durch die Schnittpunkte der drei Erzeugenden g_1, g_2 und l mit der Ebene e gelegt werden kann.

Den Asymptotenkegel endlich construiert man als den Parallelkegel zu dem Richtungskegel (S, K), sobald als Scheitel des letzteren der Mittelpunkt O des Hyperboloides angenommen wird.

In derselben Weise kann auch die folgende, die Bestimmung eines Umdrehungshyperboloides betreffende Aufgabe gelöst werden.

§. 138.

26. Aufgabe. **Ein Rotationshyperboloid ist durch zwei Erzeugende desselben Systems und eine Berührungsebene gegeben; es ist der Kehlkreis und der Asymptotenkegel zu construieren.**

Sind g_1 und g_2 die beiden Erzeugenden und T die Tangierungs- oder Berührungsebene, so beachte man einerseits, dass in jeder Berührungsebene zwei Erzeugende verschiedener Systeme liegen, und andererseits, dass jede Erzeugende des einen Systems alle Erzeugenden des anderen Systems schneidet.

Bestimmt man somit die Durchstoßpunkte $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ der gegebenen Erzeugenden g_1 und g_2 mit der Berührebene T, so stellt die Verbindungsgerade $\varDelta_1 \varDelta_2$ der obgenannten Punkte bereits eine Erzeugende des Systems l vor.

Im weiteren bleiben die Operationen zur Ermittelung des Kehlkreises und des Asymptotenkegels genau dieselben, wie diese in der vorhergehenden Aufgabe auseinandergesetzt wurden.

§. 139.

27. Aufgabe. **Ein windschiefes Hyperboloid ist durch einen Richtungskegel und durch vier Punkte gegeben; es ist die Kehlellipse (der Kehlkreis) und der Asymptotenkegel zu construieren.**

Da das Princip der Lösung von dem Achsenverhältnisse des gegebenen Richtungskegels unabhängig ist, so können wir ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, diesen Kegel als geraden Kreiskegel, und mithin das Hyperboloid als Umdrehungshyperboloid voraussetzen.

Denken wir uns die horizontale Projectionsebene senkrecht zu der Achse des gegebenen Richtungskegels gelegt, so wird sich die Horizontalspur des letzteren als Kreis (C, C') (Taf. IX, Fig. 50) darstellen.

Die verticale Projectionsebene legen wir, um die Constructionen zu vereinfachen, unmittelbar durch den Scheitel S des Richtungskegels.

Die Projectionen der vier gegebenen Punkte des Hyperboloides mögen sich, auf diese beiden Ebenen bezogen, in (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d') ergeben.

Der Ort der Mittelpunkte paralleler Sehnen eines windschiefen Hyperboloides ist, wie wir bereits nachwiesen, eine Ebene, und zwar die der Richtung der genannten Sehnen conjugierte Durchmesserebene. Diese Sehnen schneiden aber auch den dem Hyperboloide zugehörigen Asymptotenkegel in je zwei Punkten, und der geometrische Ort aller Halbierungspunkte der von diesen Punktepaaren gebildeten Strecken ist dieselbe vorher angeführte Ebene.

Berücksichtigt man, dass jeder Richtungskegel eines Hyperboloides, da seine Erzeugenden zu jenen des Hyperboloides parallel sind, auch zu dem Asymptotenkegel parallel sein muss, der Richtungskegel somit stets als eine Parallelverschiebung des Asymptotenkegels betrachtet werden kann, so ergeben sich folgende Constructionen.

Denken wir uns zwei der gegebenen Punkte, allenfalls (b, b') und (c, c'), durch eine Gerade $(bc, b'c')$ verbunden, und suchen wir die zu der Richtung dieser Geraden conjugierte Durchmesserebene.

Den vorhergehenden Auseinandersetzungen gemäß geht diese Ebene einerseits durch Mittelpunkt (m, m') der Strecke $(bc, b'c')$ und ist dieselbe andererseits zu jener Durchmesserebene $e'_v e'_h$ des Richtungskegels parallel, welche dem durch den Kegelscheitel S parallel zu $(bc, b'c')$ gezogenen Strahle (α, α') conjugiert ist.

Die Ebene $e'_v e'_h$ kann, wie folgt, bestimmt werden. Man ermittelt zunächst die Polare e'_h des Horizontaldurchstoßpunktes h' des

Strahles (α, α') in Bezug auf den Basiskreis (C, C') des Richtungskegels. Diese Polare e'_h stellt bereits die Horizontaltrace der gesuchten Ebene e dar. Da weiters die besagte Ebene als eine Durchmesserebene des Kegels durch den Scheitel S des Kegels gehen muss und dieser in der verticalen Projectionsebene liegt, so folgt, dass die Verticaltrace e'_v durch S zu führen sei. Legt man nun durch (m, m') zu der Ebene $e'_v e'_h$ eine Parallelebene $E_v' E'_h$, so stellt diese diejenige Durchmesserebene des Hyperboloides dar, welche die Halbierpunkte der zu $(bc, b'c')$ parallelen Sehnen enthält.

Denkt man sich in derselben Weise die zu der Verbindungsgeraden zweier anderer Punkte (a, a') und (d, d') conjugierte Durchmesserebene $E^2_v E^2_h$, mit Hilfe der zur Richtung $(ad, a'd')$ oder (β, β') conjugierten Durchmesserebene $e^2_v e^2_h$ des Richtungskegels ermittelt, und endlich noch eine dritte Ebene $E^3_v E^3_h$ construiert, welche abermals zu der Verbindungslinie zweier Punkte (c, c') und (d, d') conjugiert ist, so ist klar, dass der Schnittpunkt (O, O') dieser drei Ebenen kein anderer als der Mittelpunkt des Hyperboloides sein kann.

Construiert man nun einen Kegel (O, K_1) parallel zum Richtungskegel (S, C) mit (O, O') als Scheitel, so repräsentiert dieser den Asymptotenkegel. Die Contourzeugenden desselben sind in verticaler Projection als die zu den Contourerzeugenden des Richtungskegels (S, C) parallelen Geraden A_1 und A_2 dargestellt.

Es erübrigt schließlich nur noch, den Kehlkreis des Hyperboloides zu construieren. Hiezu benützen wir einen der gegebenen vier Punkte, etwa (b, b'). Die durch (b, b') gelegte, zur Horizontalebene parallele Ebene ε_v schneidet das Hyperboloid in einem Kreise (K_3, K'_3), welcher durch (b, b') geht, und dessen Mittelpunkt auf der Drehachse des Hyperboloides, d. i. auf der durch (O, O') gehenden horizontalprojicierenden Geraden Z liegt.

Da weiters im Hyperboloide Erzeugende vorkommen, welche zur verticalen Projectionsebene parallel sind, und die Gerade A_1 die verticale Projection g zweier solcher Erzeugenden repräsentiert, so schneidet der genannte Kreis (K_3, K'_3) die Gerade A_1 in einem Punkte (δ, δ'), welcher dem Hyperboloide, also auch der zu suchenden Erzeugenden (g, g') angehört.

Durch δ' geht die horizontale Projection g' dieser Erzeugenden; dieselbe ist hiedurch, indem sie zur Grundlinie parallel sein muss, vollständig bestimmt.

Beschreibt man endlich aus dem Mittelpunkte O' einen Kreis K', welcher die Gerade g' in o' berührt, so ist einleuchtend, dass derselbe nichts anderes als die Horizontalprojection des Kehlkreises

(K, K') darstellt. Die Ebene des Kehlkreises ist die zur horizontalen Projectionsebene durch (O, O') gehende parallele Ebene η_0.

Wäre der Richtungskegel ein gerader elliptischer Kegel, so wird man überall dort, wo in der eben besprochenen Aufgabe Kreise gezeichnet wurden, concentrische, ähnlich gelegene und zum Hauptschnitte des Richtungskegels ähnliche Ellipsen zur Construction in Verwendung bringen müssen.

§. 141.

28. Aufgabe. **Es ist eine Gerade zu bestimmen, welche drei sich kreuzende Geraden schneidet und einen Kegel zweiten Grades berührt.**

Die drei sich kreuzenden Geraden seien (l_1, l'_1), (l_2, l'_2) und (l_3, l_3') (Taf. X, Fig. 51). Ferner möge der Kegel durch seinen Scheitel (S, S') und seine Horizontalspur (K, K') gegeben sein.

Fassen wir die drei Geraden l_1, l_2 und l_3 als die Leitgeraden für ein windschiefes Hyperboloid auf, so wird jede Gerade, welche l_1, l_2 und l_3 schneidet, eine Erzeugende dieses Hyperboloides vorstellen. Unter diesen Erzeugenden haben wir nun jene Erzeugende G zu bestimmen, welche gleichzeitig eine Tangente des gegebenen Kegels (S, K) repräsentiert.

Die Ebene, welche durch diese Erzeugende G und durch den Kegelscheitel (S, S') gelegt wird, muss demnach eine Tangentialebene des Kegels (S, K) sowohl, als auch eine Tangentialebene des Hyperboloides darstellen, oder mit anderen Worten, die zu bestimmende Gerade wird eine von jenen Erzeugenden des Hyperboloides $(l_1\, l_2\, l_3)$ sein müssen, welche gleichzeitig in einer der vier gemeinschaftlichen Berührebenen des Kegels (S, K) und des aus dem Punkte (S, S'), dem Hyperboloide umschriebenen Kegels liegt.

Hiemit ist die Lösung der Aufgabe principiell erledigt; bezüglich der constructiven Durchführung dürfte sich jedoch folgende Form empfehlen.

Wir betrachten vorübergehend die horizontale Projectionsebene als Bildebene für »centrale Projection«, und den Kegelscheitel (S, S') als das gewählte Projectionscentrum. Auf Grund dieser Voraussetzung ist einleuchtend, dass die Centralprojection einer jeden Tangente des Kegels (S, K') eine Tangente des Kegelschnittes K' sein müsse.

Ferner ist bekannt, dass die Centralprojectionen der beiden Systeme von Erzeugenden eines Hyperboloides, einen und denselben Kegelschnitt Σ — die Contour des Hyperboloides — einhüllen.

Es wird sich demnach zunächst um diese Contourbestimmung handeln. Behufs ihrer Feststellung construieren wir vorerst die Centralprojectionen $l_1 = d'_1 v'_1$; $l_2 = d'_2 v'_2$ und $l_3 = d'_3 v'_3$ der drei Leitgeraden l_1, l_2 und l_3, indem wir die Horizontaldurchstoßpunkte d'_1, d'_2, d'_3 derselben, sowie auch die Horizontaldurchstoßpunkte v'_1, v'_2 und v'_3 ihrer Fluchtstrahlen ermitteln.

Vermittelst dieser Centralprojectionen kann man weiters ohne jedwede Schwierigkeit die Centralprojectionen $\delta_1 \varphi_1$ und $\delta_2 \varphi_2$ zweier Erzeugenden des Hyperboloides finden. Zur Erreichung dieses Zweckes werden wir einfach jene Erzeugenden der genannten Fläche bestimmen, welche in zwei durch $d_2 v_2$ beliebig gelegten Ebenen $e^1_b e^1_v$ und $e^2_b e^2_v$ liegen.

Die Projectionen l_1, l_2, l_3, $\delta_1 \varphi_1$ und $\delta_2 \varphi_2$ der fünf auf dem Hyperboloide liegenden Geraden bestimmen „als Tangenten" den vorgenannten Kegelschnitt Σ, welcher aus diesen fünf Tangenten auf irgend eine der bekannten Arten construiert werden kann.

Ziehen wir nun eine von den vier gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kegelschnitte K' und Σ, beispielsweise $T_h = G$, so repräsentiert dieselbe die Centralprojection einer Erzeugenden des Hyperboloides, welche gleichzeitig den Kegel (S, K') berührt, also der gestellten Aufgabe genügt.

Die orthogonalen Projectionen g und g' der obbezeichneten Geraden können nunmehr anstandslos und höchst einfach in nachstehender Weise ermittelt werden.

Die Punkte A_1, A_2 und A_3, in welchen G die Geraden L_1, L_2 und L_3 trifft, sind die Centralprojectionen jener drei Punkte (a_1, a'_1), (a_2, a'_2) und (a_3, a'_3), in welchen (g, g') die drei Leitgeraden l_1, l_2, l_3 schneidet; man erhält daher a'_1, a'_2 und a'_3 im Schnitte von l'_1, l'_2 und l'_3 mit den Horizontalprojectionen $S'A_1$, $S'A_2$ und $S'A_3$ der diese Punkte A_1, A_2 und A_3 centralprojicierenden Strahlen. Die Verticalprojectionen a_1, a_2 und a_3 der Schnittpunkte können, wie bekannt, unmittelbar aus den Horizontalprojectionen a'_1, a'_2 und a'_3 abgeleitet werden.

X. Capitel.

Aufgaben und Constructionen über das hyperbolische Paraboloid.

§. 142.

29. Aufgabe. Gegeben sind drei sich kreuzende Geraden; es ist eine Gerade zu finden, welche jede dieser drei Geraden in einem Punkte schneidet, und zu einer gegebenen Ebene parallel ist.

Wir nehmen diesfalls die gegebene Ebene unmittelbar mit einer der Projectionsebenen, etwa mit der horizontalen Ebene, zusammenfallend an. Die drei gegebenen Geraden mögen in Bezug auf diese und die an beliebiger Stelle geführte verticale Projectionsebene durch (l_1, l'_1), (l_2, l'_2) und (S, S') (Taf. XI, Fig. 52) dargestellt erscheinen. Unter diesen Voraussetzungen fordert die Aufgabe die Construction einer zur Horizontalprojectionsebene parallelen Geraden, welche mit jeder der drei Geraden (l_1, l'_1), (l_2, l'_2), (S, S') je einen Punkt gemein hat.

Fassen wir zu diesem Behufe die beiden Geraden (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) als „Leitgeraden" und die horizontale Projectionsebene als „Richtebene" für ein hyperbolisches Paraboloid auf. Dieses Paraboloid wird von der Geraden (S, S') in zwei Punkten getroffen, und die durch diese Punkte gehenden Erzeugenden sind sodann offenbar die verlangten Geraden.

Um die Durchstoßpunkte der Geraden (S, S') mit dem Paraboloide festzustellen, denken wir uns die Richtung der Geraden (S, S') gleichzeitig als jene eines schief projicierenden Strahles, und bestimmen unter dieser Annahme die Contour des Paraboloides auf der horizontalen Projectionsebene. Besagte Contour ist bekanntlich (Satz 87) eine Parabel, welche von den schiefen Projectionen aller Erzeugenden des Paraboloides umhüllt wird.

Nachdem die gegebene Gerade (S, S') zum schief projicierenden Strahle parallel ist, so erscheint dieselbe in der schiefen Projection als ein Punkt, der mit dem Horizontaldurchstoßpunkt (H, H') derselben identisch ist. Die durch den Punkt (H, H') an die Contourparabel gezogenen Tangenten sind offenbar die schiefen Projectionen jener Erzeugenden des Paraboloides, welche die Gerade (S, S') schneiden.

Die Contourparabel selbst bestimmt man durch vier Tangenten in der folgenden höchst einfachen Weise. Die Gerade g_h, welche die Horizontaldurchstoßpunkte (h_1, h'_1) und (h_2, h'_2) der beiden Leitgeraden verbindet, ist eine Erzeugende des Paraboloides, und da dieselbe in

der horizontalen Projectionsebene liegt, so ist sie (als ihre eigene schiefe Projection) gleichzeitig eine Tangente der Contourparabel.

Die vertical-projicierende Gerade (g_1, g'_1), deren verticale Projection der Schnittpunkt g_1, der verticalen Projectionen l_1 und l_2 der beiden Leitgeraden ist, stellt gleichfalls eine Erzeugende des Paraboloides dar, indem dieselbe die beiden Leitgeraden in jenen Punkten (p_1, p'_1) und (p_2, p'_2) schneidet, deren Verticalprojectionen mit dem Schnittpunkte von l_1 und l_2 zusammenfallen.

Die schiefe Projection g'_s dieser Erzeugenden ist eine zweite Tangente der Contourparabel. Auf derselben liegen auch die schiefen Projectionen p^1_s und p^2_s der den Geraden l_1 und l_2 angehörigen Punkte (p_1, p'_1) und (p_2, p'_2), so dass sich die schiefen Projectionen der ersteren in den Verbindungsgeraden l^1_s und l^2_s der Punkte h'_1 und p'_s, resp. der Punkte h'_2 und p^2_s ergeben. Diese schiefen Projectionen l^1_s und l^2_s sind zwei weitere Tangenten der vorerwähnten Parabel.

Durch die vier Tangenten g_h, g_s, l^1_s und l^2_s ist die Contourparabel vollkommen bestimmt, und man kann nunmehr constructiv die durch den Punkt H' gehenden Tangenten derselben ermitteln.

Wir wissen nämlich, dass die sämmtlichen Tangenten einer Parabel auf zwei festen Tangenten l^1_s und l^2_s derselben, ähnliche Punktreihen bestimmen. Projiciert man diese beiden Punktreihen vom Punkte H', als Scheitel, durch zwei projectivische concentrische Strahlenbüschel, so stellen bekanntlich die Doppelstrahlen dieser beiden Büschel die von H' ausgehenden Tangenten der Parabel dar.

Da drei Paare entsprechender Punkte beider Reihen, d. i. die Punkte h'_1 und h'_2; p'_1 und p'_2, sowie die unendlich fernen Punkte beider Reihen bekannt sind, so kennt man auch drei Paare entsprechender Strahlen in den concentrischen, projectivischen Büscheln, d. i. die Strahlen: $\alpha_1 \alpha_2$, $\beta_1 \beta_2$, $\gamma_1 \gamma_2$, welche diese Punktpaare projicieren.

Mit Zuhilfenahme dieser Strahlen kann man nach der bekannten Steiner'schen Methode die Doppelstrahlen g^m_s und g^n_s leicht construieren.

Beide sind, als Tangenten der Contourparabel, schiefe Projectionen zweier Erzeugenden, welche die schief projicierende Gerade (S, S') schneiden. Um diese Erzeugenden, beispielsweise jene der Geraden g^m_s entsprechende Erzeugende (g_m, g'_m) zu finden, hat man nur zu beachten, dass der Punkt m_s, in welchem g^m_s die Gerade l^2_s trifft, die schiefe Projection jenes Punktes (m, m') sei, durch welchen die genannte Erzeugende (g_m, g'_m) geht. Der Punkt (m, m') ist ver-

mittelst des durch m_s geführten schief projicierenden Strahles leicht ermittelt.

Führt man endlich durch m die Parallele g_m zur Grundlinie, so repräsentiert diese die Verticalprojection der gesuchten Erzeugenden, während sich die horizontale Projection g'_m als die Parallele durch m' zu g^m_s ergibt.

In ganz gleicher Weise kann auch die der schiefen Projection g^n_s entsprechende Erzeugende (g_n, g'_n) construiert werden. Hiermit hat die gestellte Aufgabe ihre Lösung gefunden.

§. 143.

30. Aufgabe. **Vier sich kreuzende, zu einer und derselben Ebene parallele Geraden sind gegeben; es ist eine fünfte Gerade zu construieren, welche jede der gegebenen Geraden in je einem Punkte schneidet.**

Diese Aufgabe kann auf zweierlei Weise gelöst werden. Die erste Lösung ist mit der in Aufgabe 1) gegebenen Construction identisch; eine zweite besondere Lösung dagegen ist durch die Bedingung, dass die vier gegebenen Geraden zu einer und derselben Ebene parallel sind, ermöglicht.

Die gegebene Ebene, zu welcher die vier Geraden parallel sind, wählen wir als horizontale Projectionsebene, die verticale Ebene dagegen, welche wir an beliebiger Stelle senkrecht zu der ersteren führen können, nehmen wir, um constructive Vereinfachungen zu erzielen, so an, dass sie durch die eine der gegebenen Geraden, etwa durch l_1, hindurchgehe. Die übrigen drei Geraden (l_2, l'_2), (l_3, l'_3) und (l_4, l'_4) (Taf. X, Fig. 53) haben diesfalls, der obigen Voraussetzung gemäß, zur Grundlinie parallele Verticalprojectionen l_2, l_3 und l_4.

Das Princip der Lösung der vorstehenden Aufgabe beruht nun auf folgender Anschauung.

Wir können (nach Satz 95) drei beliebige von den vier gegebenen Geraden, beispielsweise l_1, l_2 und l_3, da sie zu der nämlichen Ebene, diesfalls, auf Grund der getroffenen Wahl, zu der horizontalen Projectionsebene parallel sind, als Leitlinien für ein hyperbolisches Paraboloid annehmen.

Werden zwei Erzeugende dieses Paraboloides bestimmt, und eine zu beiden parallele Ebene R_1 construiert, so ist diese, wie wir aus der vorausgeschickten Theorie dieser Fläche wissen, die zweite Richtebene. Die erste der diesbezüglichen Richtebenen wird unmittelbar durch die horizontale Projectionsebene vertreten.

Jede Gerade, welche zu dieser Ebene R_1 parallel läuft, und die Geraden l_1 und l_2 schneidet, ist, wie wir wissen, eine Erzeugende des Paraboloides, welche nothwendig auch die dritte Gerade l_3 schneiden muss.

Nehmen wir ferner die Geraden l_1, l_2 und l_4 als Leitlinien eines zweiten Paraboloides an, construieren wieder zwei Erzeugende desselben und legen parallel zu beiden eine Ebene R_2, so stellt diese Ebene offenbar die zweite Richtebene R_2 des Paraboloides dar; während die zugehörige erste Richtebene auch hier durch die horizontale Projectionsebene repräsentiert erscheint. Eine jede Gerade, welche zu R_2 parallel ist, und die Geraden l_1 und l_2 schneidet, ist eine Erzeugende des betreffenden Paraboloides. Letztere wird selbstverständlich auch die Leitgerade l_4 in einem Punkte treffen müssen.

Ermittelt man nun den Schnitt S der beiden Richtebenen R_1 und R_2, und sucht jene Gerade g, welche zu S parallel ist und die beiden Geraden l_1 und l_2 schneidet, so ist dieselbe eine Erzeugende, sowohl des einen, als auch des anderen Paraboloides, und muss demgemäß auch die beiden Geraden l_3 und l_4 schneiden; dieselbe erfüllt somit die durch die vorliegende Aufgabe gestellten Forderungen.

Was die graphische Durchführung anbelangt, so dürfte man auf Grund der hier getroffenen Anordnungen das angestrebte Ziel folgendermassen am einfachsten erreichen.

Die beiden Paraboloide, welche beziehungsweise durch l_1, l_2 und l_3 und durch l_1, l_2 und l_4 als Leitgeraden gegeben sind, bezeichnen wir der Kürze halber mit *P (123)* und *P (124)*.

Um irgend eine Erzeugende $(g_1 g'_1)$ des Paraboloides *P (123)* zu finden, nehmen wir auf der in der verticalen Projectionsebene liegenden Leitgeraden l_1 einen beliebigen Punkt (a_1, a'_1) an und führen durch diesen Punkt und durch die Leitgerade (l_2, l'_2) eine Ebene e_1. Die Verticaltrace e'_v dieser Ebene geht durch a und durch den verticalen Durchstoßpunkt (v, v') der Geraden (l_2, l'_2). Die Horizontaltrace e'_h (die, weil nicht nothwendig, auch nicht verzeichnet wurde) ist parallel zur Horizontalprojection l'_2. Ermittelt man weiters den Schnitt der Ebene e_1 mit der Leitgeraden (l_3, l'_3) etwa dadurch, dass man sich durch l_3 eine horizontale Ebene gelegt denkt, welche e_1 in einer zu (l_2, l'_2) parallelen Geraden (σ_1, σ'_1) schneidet, ihrerseits dagegen die Gerade (l_3, l'_3) in dem gesuchten Punkte (α_1, α'_1) trifft. Die Gerade (g_1, g'_1) (Erzeugende) ergibt sich sodann als die Verbindungsgerade der Punkte (a_1, a'_1) und (α_1, α'_1).

Eine zweite Erzeugende (g_2, g'_2) des Paraboloides *P (123)* findet man auf gleiche Weise durch Zuhilfenahme eines zweiten Punktes (a_2, a'_2) auf (l_1, l'_1).

Die nämlichen Punkte (a_1, a'_1) und (a_2, a'_2) kann man auch in Übereinstimmung mit dem Vorhergehenden zur Construction der durch dieselben gehenden Erzeugenden (g_3, g'_3) und (g_4, g'_4) des Paraboloides *P* (*124*) benützen.

Die beiden Richtebenen R_1 und R_2 der Paraboloide *P* (*123*) und *P* (*124*), sowie deren gegenseitiger Schnitt (s, s') sind nunmehr leicht zu construieren.

Ziehen wir zu diesem Zwecke durch (a_1, a'_1) eine Parallele (γ_2, γ'_2) zur Erzeugenden (g_2, g'_2) und eine Parallele (γ_4, γ'_4) zur Erzeugenden (g_4, g'_4), so ist die Richtebene R_1 durch die beiden erstgenannten Geraden (g_1, g'_1) und (γ_2, γ'_2) und deren Horizontaltrace R'_h durch die Verbindungsgerade der Horizontalspuren Δ'_1 und Δ'_2 dieser Geraden bestimmt.

Die zweite Richtebene R_2 geht durch die Geraden (g_3, g'_3) und (γ_4, γ'_4); ihre Horizontaltrace R^2_h ist die Verbindungsgerade der Horizontalspuren Δ'_3 und Δ'_4 der beiden obbezeichneten Geraden.

Nachdem die beiden Richtebenen R_1 und R_2 durch den nämlichen Punkt (a_1, a'_1) gehen, so ist derselbe ein Punkt ihres Schnittes (s, s'); ein zweiter Punkt des besagten Schnittes ist der den Horizontaltracen R^1_h und R^2_h gemeinschaftliche Punkt (d, d').

Die erlangte Schnittlinie (s, s') ist sonach die Verbindungsgerade von (a_1, a'_1) mit (d, d').

Es erübrigt endlich noch die Bestimmung einer Geraden (S, S'), welche zu (s, s') parallel ist, und die Geraden (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) schneidet. Diese Gerade muss, da (s, s') und (l_1, l'_1) einen Punkt (a_1, a'_1) gemein haben, in der durch diese beiden Geraden bestimmten (zur Grundlinie parallelen) Ebene $E_v E_h$ liegen.

Hiernach hat man bloß den Schnitt der Ebene $E_v E_h$ mit der Geraden (l_2, l'_2) aufzusuchen, und durch den so erhaltenen Schnittpunkt (A, A') eine Parallele zu (s, s') zu ziehen, um die gewünschte, der Aufgabe entsprechende Gerade (S, S') dargestellt zu erhalten. Zu diesem Behufe kann folgender Weg eingeschlagen werden.

Man denke sich den Schnitt der Ebene $E_v E_h$ mit der horizontalen durch (l_2, l'_2) gelegten Ebene ermittelt, und zu diesem Zwecke in einer der Ebene $E_v E_h$ angehörenden Geraden, beispielsweise direct in (s, s'), den Punkt (α, α') so bestimmt, dass dessen Verticalprojection α in l_2 liegt, und durch α' eine Parallele (η, η') zur Grundlinie gezogen. Letztere schneidet die Gerade (l_2, l'_2), wie einleuchtend, bereits in dem gesuchten Punkte (A, A'). Die durch (A, A') parallel zu (s, s') geführte Gerade (S, S') trifft die Geraden (l_1, l'_1), (l_3, l'_3) und (l_4, l'_4) beziehungsweise in den Punkten (V, V'), (B, B') und (C, C').

Vergleicht man die eben besprochene Lösung des vorliegenden Problems mit der allgemeinen in Aufgabe 1) gegebenen, so findet man, dass dort zwei Geraden existieren, welche den daselbst gestellten Bedingungen entsprechen, während im vorstehenden Falle scheinbar nur eine solche Gerade (S, S') vorhanden ist. Man darf hierbei aber nicht vergessen, dass der Voraussetzung nach die vier Geraden l zu derselben Ebene (horizontale Projectionsebene) parallel sind, und dass demgemäß die unendlich ferne Gerade dieser Ebene, die zweite der Aufgabe entsprechende Gerade repräsentiert.

§. 143.

31. Aufgabe. **An ein hyperbolisches Paraboloid ist in einem seiner Punkte eine Berührebene zu construieren.**

Die Richtebene des Paraboloides nehmen wir direct als horizontale Projectionsebene an. Die Projectionen der beiden Leitgeraden seien (l_1, l'_1), (l_2, l'_2).

Um irgend einen auf der Fläche des Paraboloides liegenden Punkt zu ermitteln, bestimmen wir zunächst eine beliebige Erzeugende (g, g') (Taf. IX, Fig. 54), indem wir, obiger Annahme gemäß, eine Gerade g an willkürlicher Stelle parallel zur Grundlinie ziehen, und die horizontale Projection g' vermittelst der den Leitgeraden l_1 und l_2 angehörigen Punkte (a, a') und (b, b') ableiten.

Auf der so bestimmten Erzeugenden (g, g') sei der Punkt (p, p') gegeben, in welchem die das Paraboloid berührende Ebene construiert werden soll.

Wie bereits aus früheren Erörterungen geläufig, muss die letztgenannte Ebene die Erzeugende (g, g') sowohl, als auch die durch (p, p') gehende Erzeugende des zweiten Systems enthalten. Es wird sich somit hauptsächlich um die Ermittelung dieser letzterwähnten Erzeugenden handeln.

Die verticalprojicierende Gerade (g_s, g'_s), welche durch den Durchschnittspunkt g_s der verticalen Projectionen l_1 und l_2 der beiden Leitgeraden geht, ist, da sie einerseits zur Richtebene (horizontale Projectionsebene) parallel läuft, andererseits aber die beiden Leitgeraden (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) schneidet, eine zum Systeme (g) gehörende Erzeugende.

Diese besondere Lage der Erzeugenden bietet für die meisten Constructionen wesentliche Vortheile, da allen ihren Punkten die nämliche Verticalprojection zukommt. Von deren graphischer Verwendbarkeit werden wir sofort Gelegenheit finden, uns zu überzeugen. Eine

anderweitige Erzeugende des Systems (g) ist die Gerade (g_h, g'_h), welche die Horizontalspuren h'_1 und h'_2 der Leitgeraden (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) verbindet.

Die durch den Punkt (p, p') der Fläche gehende Erzeugende (λ, λ') des zweiten Systems (l) ist eine Gerade, welche bekanntlich alle Erzeugenden des Systems (g), mithin auch die Geraden (g_s, g'_s) und g_h schneiden muss. Die Verticalprojection λ derselben ergibt sich daher direct als Verbindungsgerade der Punkte p und g_s, während deren Horizontalprojection λ' einerseits durch p', andererseits aber durch den Punkt $\varDelta'$ geht. Letztgenannter Punkt ist die Horizontalprojection des horizontalen Durchstoßpunktes $(\varDelta, \varDelta')$ von (λ, λ') und daher unmittelbar aus seiner Verticalprojection $\varDelta$ (Schnitt der Grundlinie mit λ) bestimmbar.

Die Berührungsebene $B_v B_h$ ist nunmehr durch diese beiden Erzeugenden g und λ vollständig bestimmt. Die Horizontaltrace B_h derselben erhält man unmittelbar als die durch $\varDelta'$ parallel zu g' geführte Gerade B_h, während deren Verticaltrace B_v sodann durch die Verticalspur v von (g, g') festgestellt erscheint.

§. 144.

32. Aufgabe. **Durch die Erzeugende (g, g') eines hyperbolischen Paraboloides wurde irgend eine beliebige Ebene gelegt; es ist deren Berührungspunkt mit der Fläche zu bestimmen.**

Denken wir uns (unter Beibehaltung von Fig. 54, Taf. IX) durch die Erzeugende (g, g') des Paraboloides eine ganz beliebige Ebene $B_v B_h$ gelegt.

Die vorausgeschickten theoretischen Betrachtungen haben gezeigt, dass die besagte Ebene das Paraboloid in einem gewissen Punkte der Erzeugenden (g, g') berühren müsse. Dieser Punkt wird offenbar gefunden sein, wenn man die dem System (l) angehörende, in der Ebene $B_v B_h$ liegende Erzeugende (λ, λ') kennt.

Die genannte Erzeugende muss alle Erzeugenden des Systems (g), mithin auch die Erzeugenden g_h und (g_s, g'_s) schneiden, und da dieselbe überdies in der Ebene $B_v B_h$ liegen soll, so wird sich die verlangte Gerade als jene ergeben, welche als die geradlinige Verbindungslinie der Durchstoßpunkte von g_h und (g_s, g'_s) mit der vorher willkürlich geführten Ebene $B_v B_h$ erhalten wird.

Der Schnittpunkt von g_h und $B_v B_h$ ist der Begegnungspunkt $(\varDelta, \varDelta')$ der Trace B_h und der Geraden g_h. Der Schnittpunkt von

$B_v B_h$ mit der Geraden (g_s, g'_s) dagegen hat seine Verticalprojection in g_s; es ist daher Δg_s die Verticalprojection λ der gesuchten Erzeugenden, und der Punkt p, in welchem Δg_s die Verticalprojection g der Erzeugenden (g, g') trifft, wird bereits die Verticalprojection des gesuchten Berührungspunktes (p, p') darstellen.

Man sieht hieraus, dass die eben gelöste Aufgabe die bloße Umkehrung der vorhergehenden Aufgabe sei, und dass zu ihrer Durchführung genau dieselben Constructionslinien wie vorher erforderlich sind.

§. 145.

33. Aufgabe. **Parallel zu einer Ebene ist an ein hyperbolisches Paraboloid eine Berührungsebene zu legen und deren Berührungspunkt zu ermitteln.**

Nehmen wir so wie vorher auch jetzt die Richtebene als horizontale Projectionsebene an. Die beiden Leitgeraden seien (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) (Taf. X, Fig. 55). Die gegebene Ebene E ist durch ihre Tracen $E_v E_h$ bestimmt.

Soll die zu suchende Ebene B zu der Ebene $E_v E_h$ parallel sein, so müssen auch die beiden Erzeugenden, welche sie enthält, eine zu $E_v E_h$ parallele Lage besitzen.

Die Erzeugende (g, g') des Systems g, welche in der gesuchten Berührebene liegen soll, ist aber auch zu der betreffenden Richtebene, diesfalls also zur Horizontalebene, parallel; die Gerade (g, g') wird demgemäß zu dem Schnitte dieser beiden Ebenen, d. i. zur Horizontaltrace E_h parallel sein.

Es ist somit zunächst die Aufgabe zu lösen, eine Gerade (g, g') zu finden, welche zu E_h parallel ist und die beiden Leitgeraden l_1 und l_2 schneidet.

Die verlangte Gerade wird erhalten, wenn man durch (l_1, l'_1) eine Ebene $e_v e_h$ parallel zu E_h legt, d. i. eine Ebene parallel zu (l_1, l'_1) führt, deren Horizontaltrace e_h parallel zu E_h ist, sodann den Schnittpunkt (b, b') dieser Ebene $e_v e_h$ mit der zweiten Leitgeraden (l_2, l'_2) ermittelt und durch (b, b') die Gerade (g, g') parallel zu e_h oder E_h zieht.

Legt man schließlich durch diese Erzeugende (g, g') eine Ebene $B_v B_h$ parallel zur Ebene $E_v E_h$, so stellt diese bereits die gesuchte Berührebene dar. Der Berührungspunkt (p, p') derselben mit der Fläche kann, in Übereinstimmung mit dem in der vorigen Aufgabe auseinandergesetzten Verfahren, festgestellt werden.

§. 146.

34. Aufgabe. **An ein hyperbolisches Paraboloid ist durch eine Gerade eine Berührungsebene zu legen und deren Berührungspunkt zu bestimmen.**

Das Paraboloid ist durch die Richtebene (horizontale Projectionsebene) und die beiden Leitgeraden (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) festgestellt. Die gegebene Gerade sei (S, S') (siehe Taf. XI, Fig. 52).

Die durch (S, S') gehenden Berührebenen müssen, sowie jede andere Berührungsebene, Erzeugende beider Systeme des hyperbolischen Paraboloides enthalten, welche sich im jeweiligen Berührungspunkte (der Ebene mit der Fläche) schneiden. Nachdem aber jede Ebene, welche eine Erzeugende des Paraboloides enthält, eine Berührebene desselben ist, so wird man, wie in Aufgabe 29), diejenigen Erzeugenden (g_m, g'_m) und (g_n, g'_n) des Paraboloides zu bestimmen haben, welche die gegebene Gerade (S, S') schneiden.

Die Ebenen, welche durch (S, S') und jede dieser beiden Erzeugenden geführt werden, sind sodann offenbar die gesuchten Tangentialebenen, und können deren Berührungspunkte wie in Aufgabe 32) festgestellt werden.

§. 147.

35. Aufgabe. **Durch einen Punkt außerhalb der Fläche eines hyperbolischen Paraboloides ist eine Berührebene zu legen und der Berührungspunkt derselben zu bestimmen.**

Die in der vorstehenden Form gestellte Aufgabe ist unbestimmt, da jede Ebene, welche durch den gegebenen Punkt und irgend eine beliebige Erzeugende des Paraboloides gelegt wird, das letztere in irgend einem Punkte der genannten Erzeugenden berührt, und folglich der gestellten Aufgabe entspricht. — Das Gleiche gilt von der nachstehenden Aufgabe.

§. 148.

36. Aufgabe. **Parallel zu einer gegebenen Geraden ist an ein hyperbolisches Paraboloid eine Berührebene zu legen und deren Berührungspunkt zu fixieren.**

Jede Ebene, welche parallel zu der gegebenen Geraden durch eine beliebige Erzeugende des Paraboloides gelegt wird, berührt das letztere in einem Punkte dieser Erzeugenden. Der besagte Berührungspunkt kann, wie in Aufgabe 32) gezeigt wurde, bestimmt werden.

Die beiden vorangeführten Aufgaben werden wir in der Folge eingehend behandeln, wobei wir gleichzeitig auch die Gesammtheit der möglichen Berührebenen und die ihnen entsprechenden Berührungspunkte in Betracht ziehen werden.

§. 149.

37. Aufgabe. Es ist der Schnitt eines hyperbolischen Paraboloides mit einer Ebene zu construieren und die Schnittfigur durch deren Achsen darzustellen.

a) Die schneidende Ebene hat eine allgemeine Lage gegen das hyperbolische Paraboloid.

Wie wir bereits wissen, ist der ebene Schnitt eines hyperbolischen Paraboloides, bei allgemeiner Lage der schneidenden Ebene, stets eine Hyperbel. Sind die Asymtoten dieser Hyperbel ermittelt, so unterliegt es selbstverständlich auch keiner weiteren Schwierigkeit, die Achsen derselben zu bestimmen. Von diesen Grundzügen wollen wir bei der Lösung der gestellten Aufgabe ausgehen.

Das Paraboloid sei (Taf. XI, Fig. 56) durch die Leitgeraden (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) gegeben; die zugehörige Richtebene sei die horizontale Projectionsebene. Die schneidende Ebene E sei durch ihre Tracen E_v und E_h bestimmt.

Zunächst dürfte es zweckmäßig sein, einige vorbereitende Constructionen durchzuführen, und wollen wir uns in erster Linie mit der Bestimmung der zweiten Richtebene $R_v R_h$, d. i. jener Ebene beschäftigen, welche zu den Leitgeraden l_1 und l_2 parallel läuft. Ferner construieren wir die zum Systeme (g) gehörende vertical projicierende Erzeugende (g_s, g'_s), sowie endlich die in der horizontalen Projectionsebene liegende Erzeugende g_h, d. i. die Verbindungsgerade der Horizontalspuren h'_1 und h'_2 von (l_1, l'_1) und $(l_2 l'_2)$, desselben Systems.

In jedem Systeme wird eine Erzeugende existieren, welche zu der schneidenden Ebene E parallel ist; dieselben werden daher als solche einen unendlich fernen Punkt der Hyperbel liefern.

Um die diesbezügliche Erzeugende (g, g') im Systeme (g) zu finden, berücksichtigen wir, dass dieselbe als zu der gegebenen Ebene $E_v E_h$ sowohl, als auch zur Richtebene (horizontalen Projectionsebene) parallel, nothwendig auch zu dem Schnitte dieser beiden Ebenen, d. i. zur Horizontaltrace E_h parallel sein muss. Die Erzeugende (g, g'), welche dieser Forderung entspricht, wird vermittelst der durch (l_1, l'_1) zu E_h parallel gelegten Hilfsebene $e_v e_h$ (wie in Aufgabe 33 angedeutet) construiert.

Um die dem Systeme (l) angehörige, zur Ebene $E_v E_h$ parallele Erzeugende (l, l') festzustellen, ist zu beachten, dass dieselbe, da sie zu den beiden Ebenen $E_v E_h$ und $R_v R_h$ gleichzeitig parallel sein soll, auch zu den Schnittgeraden (λ, λ') dieser Ebenen parallel sein muss.

Da ferner alle Erzeugenden des Systems (l) die projicierende Erzeugende (g_s, g'_s) schneiden, so erhält man die verticale Projection l der verlangten Erzeugenden als diejenige Gerade, welche durch g_s parallel zu λ geführt werden kann. Nachdem dieselbe aber auch die Erzeugende g_h in einem Punkte (δ, δ') schneiden muss, welcher durch seine Verticalprojection δ (Schnitt von l mit der Grundlinie) bereits bestimmt ist, so kann deren Horizontalprojection l' durch δ' parallel zu λ' direct gezeichnet werden.

Die unendlich fernen Punkte der beiden Erzeugenden (g, g') und (l, l') sind selbstverständlich gleichzeitig auch unendlich ferne Punkte der Schnitthyperbel.

Um die diesen Punkten entsprechenden Asymptoten zu finden, bestimmen wir die Berührungsebenen des Paraboloides in denselben, oder mit anderen Worten, ermitteln wir die asymptotischen Ebenen der Erzeugenden (g, g') und (l, l'). Die erste dieser Ebenen ist die durch (g, g') zur horizontalen Projectionsebene parallel geführte Ebene. Dieselbe ergibt mit $E_v E_h$ die Schnittgerade (Σ_1, Σ'_1), welche bereits die eine Asymtote der Schnitthyperbel repräsentiert.

Die Asymptotenebene der Erzeugenden (l, l') ist die Ebene $T_v T_h$, welche durch (l, l') parallel zur Richtebene $R_v R_h$ gelegt wird. Dieselbe schneidet die Ebene $E_v E_h$ in der Geraden (Σ_2, Σ'_2), welche die zweite Asymptote der Schnitthyperbel darstellt. Der Schnittpunkt (O, O') der beiden Asymptoten (Σ_1, Σ'_1) und (Σ_2, Σ_2) bestimmt den **Mittelpunkt der Hyperbel.**

Die Achsen der Hyperbel werden einfach dadurch bestimmt, dass man die Winkel, welche die Asymptoten mit einander bilden, halbiert. Zu diesem Zwecke legen wir die beiden Asymptoten Σ_1 und Σ_2 um die Horizontaltrace E_h in die horizontale Projectionsebene nach Σ^0_1 und Σ^0_2 um und halbieren die betreffenden Winkel durch die Geraden X_0 und Y_0; die letzteren repräsentieren bereits die **umgelegten Achsen.**

Die Projectionen (X, X') und (Y, Y') derselben werden auf bekannte Weise durch Zurückführen der umgelegten Gebilde gefunden. Dieselben stellen bekanntlich conjugierte Durchmesser jener beiden Hyperbeln dar, in welchen sich die Schnitthyperbel beziehungsweise auf die verticale und horizontale Projectionsebene projiciert.

Bezüglich der Bestimmung der Endpunkte der reellen Achse wurde folgender Weg eingeschlagen.

Wir suchen vorerst einen beliebigen Punkt der Schnitthyperbel. Als solcher ergibt sich am einfachsten sofort der Punkt (a, a'), in welchem die Horizontaltrace E_h die in der horizontalen Projectionsebene liegende Erzeugende (g_h, g'_h) trifft.

Der Punkt a' bestimmt mit den Asymptoten Σ'_1 und Σ'_2 die horizontale Projection der Schnitthyperbel vollständig, und man kann demgemäß ihren Schnitt mit der geraden X' folgendermaßen erhalten.

Wir denken uns die Hyperbel $(\Sigma'_1, \Sigma'_2, a')$ als Collinearfigur eines Kreises K_0, welchen wir an beliebiger Stelle den Asymptoten Σ'_1 und Σ'_2 einschreiben. Die Verbindungsgerade der Berührungspunkte α_0 und β_0 repräsentiert diesfalls die der unendlich fernen Geraden collinear entsprechende Gerade, d. i. eine Gegenachse. Das Collineationscentrum ist O', während $O'X'$ gleichzeitig einen Collineationsstrahl darstellt. Derselbe trifft den Kreis K_0 in A_0 und B_0. Es wird sich jetzt darum handeln, die diesen Punkten entsprechenden Punkte der Hyperbel zu finden. Zu diesem Zwecke suchen wir auf dem Kreise K_0 den dem Punkte a' collinearen Punkt a_0 vermittelst des Collineationsstrahles $O'a'a_0$. Der Geraden a_0A_0 entspricht sodann eine durch a' gehende Gerade $a'A'$, welche dadurch erhalten wird, dass man zu dem Collineationsstrahle $O'\gamma_0$, welcher den Fluchtpunkt γ_0 von a_0A_0 projiciert, durch a' eine Parallele zieht. Dieselbe trifft den Strahl $O'X'$ in dem gesuchten Punkte A'. Macht man endlich $B'O' = A'O'$ und projiciert die Punkte A' und B' in die Gerade OX, so stellt $(AB, A'B')$ die reelle Achse der Schnitthyperbel dar, womit die vorliegende Aufgabe vollständig gelöst erscheint.

§. 150.

b) Die schneidende Ebene ist parallel zur Achse des hyperbolischen Paraboloides.

Die beiden Leitlinien seien durch (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) (Taf. XI, Fig. 57) dargestellt. Die Richtebene des Paraboloides werde als mit einer der Projectionsebenen, etwa mit der horizontalen, zusammenfallend angenommen.

Wir wissen, dass die Achse des hyperbolischen Paraboloides zu der Schnittgeraden der beiden Richtebenen parallel ist.

Ermitteln wir daher die zweite Richtebene R_vR_h, welche zu den beiden Leitgeraden l_1 und l_2 parallel ist, so bestimmt der Schnitt derselben mit der ersten (horizontalen) Richtebene, d. i. die Horizontaltrace R_h, die Richtung der Achse des Paraboloides.

Soll die schneidende Ebene $E_v E_h$ zur Achse des Paraboloides parallel sein, so muss dieselbe auch eine zu R_h parallele Lage haben. Letzteres wird offenbar dann der Fall sein, wenn dieselbe eine zu R_h parallele Horizontaltrace E_h besitzt.

In der vorausgeschickten „Theorie der Regelflächen“ wurde nachgewiesen, dass eine zur Achse des Paraboloides parallele Ebene das letztere in einer Parabel schneidet, deren Achse zu jener des Paraboloides parallel ist.

Die Achse des parabolischen Schnittes haben wir im vorliegenden Falle aufzusuchen. Da die Achse einer Parabel leicht verzeichnet werden kann, wenn man zwei Tangenten derselben und deren Berührungspunkte kennt, wollen wir diesen Umstand als Grundlage für unsere auszuführenden Constructionen wählen.

Zwei Punkte der Parabel erhält man ohne weiteres in den Durchstoßpunkten (a_1, a'_1) und (b_2, b'_2) der Leitgeraden (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) mit der schneidenden Ebene $E_v E_h$.

Um die Tangenten der Parabel in diesen Punkten zu bestimmen, haben wir die Berührebenen des Paraboloides in den besagten Punkten zu construieren, und mit der Ebene $E_v E_h$ zum Schnitte zu bringen. Letzteres kann in möglichst einfacher Weise wie folgt geschehen.

Die Berührungsebene T_1 des Paraboloides im Punkte (a_1, a'_1) enthält die Leitgerade (l_1, l'_1) und die durch (a_1, a'_1) gehende Erzeugende (g_1, g') des zweiten Systems. Die Horizontaltrace T'_h dieser Berührebene geht mithin durch die Horizontalspur h'_1 der Leitgeraden (l_1, l'_1) und ist parallel zu der Horizontalprojection g'_1 der genannten horizontalen Erzeugenden (g_1, g'_1).

Die Ebenen $E_v E_h$ und $T'_v T'_h$ haben nun einerseits den Punkt (a_1, a'_1), andererseits aber auch den Punkt (η_1, η'_1) gemein, in welchem sich ihre Horizontaltracen E_h und T'_h schneiden. Die Verbindungsgerade (t_1, t'_1) der beiden Punkte (a_1, a'_1) und (η_1, η'_1) ist die Schnittlinie obgenannter Ebenen, und mithin die Tangente der Schnittcurve im Punkte (a_1, a'_1).

In analoger Weise construiert man die Tangente (t_2, t'_2) der Schnittcurve im Punkte (b_2, b'_2).

Die Parabel, welche als Schnitt des Paraboloides mit der Ebene $E_v E_h$ resultiert, ist somit durch die beiden Tangenten (t_1, t'_1) und (t_2, t'_2) und deren Berührungspunkte (a_1, a'_1) und (b_2, b'_2) vollständig bestimmt. Aus den beiden Tangenten t_1 und t_2 und ihren Berührungspunkten kann nunmehr die Achse der Parabel sowohl, als auch die Scheiteltangente anstandslos bestimmt werden.

Die Achse der Parabel ist parallel zur Horizontaltrace E_h der schneidenden Ebene. Nachdem nun die Scheiteltangente zur Achse normal steht, so wird auch die horizontale Projection derselben, infolge der horizontalen Lage der Achse, auf der horizontalen Projection der letzteren senkrecht stehen, d. h. mit anderen Worten: der Scheitel, die Haupttangente und die Achse der Horizontalprojection der Schnittparabel sind horizontale Projectionen des Scheitels, der Hauptangente und der Achse der Schnittparabel selbst.

Die horizontale Projection Σ' der Parabel ist durch die Tangenten t'_1 und t'_2 und durch deren Berührungspunkte a'_1 und b'_2 gegeben. Berücksichtigt man nun, dass einerseits die Achse der Parabel Σ' parallel zu E_h ist, und dass andererseits die Tangente einer Parabel die Achse in einem Punkte schneidet, welcher von dem Scheitel ebenso weit absteht, wie die orthogonale Projection des Berührungspunktes auf diese Achse von dem nämlichen Punkte, so ergibt sich folgende Construction.

Man ziehe von a'_1 eine Senkrechte zur Achse, d. i. eine Senkrechte zu E_h, welche von dieser in α_1 getroffen werden mag. Theilt man nun die Strecke zwischen α_1 und dem Punkte η'_1, in welchem t'_1 die Gerade E_h trifft, durch den Punkt o_1 in zwei gleiche Theile, so haben die drei Geraden $a'_1\alpha_1$, a'_1o_1 und $a'_1\eta'_1$ die Eigenschaft, dass sie auf jeder zu E_h parallelen Geraden, also auch auf der Achse der Parabel, zwei gleiche Strecken bestimmen. Aus der vorerwähnten Eigenschaft folgt, dass der Scheitel der Parabel auf der Geraden a'_1o_1 liegen müsse.

Eine gleiche Construction ergibt sich in Bezug auf die Tangente t'_2 und deren Berührungspunkt b'_2, gemäß welcher der Scheitel der Parabel auch auf der Geraden b'_2o_2 liegen muss. Der Scheitel A' ergibt sich daher im Schnitt der beiden Geraden a'_1o_1 und b'_2o_2.

Die Achse X' der Parabel Σ' geht durch A' parallel zu E_h und die Scheiteltangente T' durch A' senkrecht zu E_h.

Hiernach sind die horizontalen Projectionen der erforderlichen Bestimmungsstücke der Schnittparabel festgestellt. Die zugehörigen verticalen Projectionen A, X und T derselben ergeben sich unmittelbar, wenn man beachtet, dass diese Stücke sämmtlich in der Ebene E_vE_h liegen.

§. 151.

38. Aufgabe. Es ist die Ebene der Berührungscurve eines hyperbolischen Paraboloides mit einem demselben umschriebenen Cylinder von gegebener Richtung zu construieren.

Das hyperbolische Paraboloid sei durch die beiden Leitgeraden (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) (Taf. XII, Fig. 58) und die horizontale Projectionsebene als Richtebene gegeben. Die Richtung der Erzeugenden des dem Paraboloide umschriebenen Cylinders sei durch die Gerade (S, S') bestimmt.

Die Ebene der Berührungscurve dieses Cylinders wird offenbar bestimmt sein, wenn man drei derselben angehörige Punkte kennt.

Ein Punkt der Berührungscurve ergibt sich als Berührungspunkt des Paraboloides mit einer durch eine beliebige, dem ersten oder zweiten Systeme dieser Fläche angehörige Erzeugende zur gegebenen Richtung (S, S') parallel gelegten Ebene.

Im vorliegenden Falle wird es am einfachsten sein, als die genannten Erzeugenden sofort die beiden Leitgeraden (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) zu benützen. Wir legen daher parallel zu (S, S') durch (l_1, l'_1) die Berührebene $e'_v e'_h$, und ebenso durch (l_2, l'_2) die Berührebene $e^2_v e^2_h$.

Um die Berührungspunkte dieser Ebenen zu ermitteln, haben wir bekanntlich die in denselben liegenden Erzeugenden des zweiten Systems, d. i. jene Geraden, welche zur horizontalen Projectionsebene parallel sind, zu construieren. Letzteres vollführen wir in nachstehender Weise. Die beiden Ebenen $e^1_v e^1_h$ und $e^2_v e^2_h$ schneiden sich in einer Geraden (s, s'), welche die Leitgeraden (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) beziehungsweise in den Punkten (a_2, a'_2) resp. (b_1, b'_1) schneidet.

Der Punkt (a_2, a'_2) stellt offenbar den Durchstoßpunkt der Ebene (e^2_v, e^2_h) mit der Erzeugenden (l_1, l'_1) dar. Zieht man daher durch (a_2, a'_2) eine Gerade (g_2, g'_2) parallel zur Horizontaltrace e^2_h, so ist diese, nachdem sie beide Leitgeraden l_1 und l_2 schneidet, in der Ebene $e^2_v e^2_h$ liegt, und zur horizontalen Projectionsebene parallel ist, die in der Berührebene $e^2_v e^2_h$ liegende Erzeugende des Systems (g), während ihr Schnittpunkt (b_2, b'_2) mit der Leitgeraden (l_2, l'_2) den Berührungspunkt des Paraboloides mit der Ebene $e^2_v e^2_h$ gibt.

In gleicher Weise erhält man die in der Ebene $e'_v e'_h$ liegende Erzeugende (g_1, g'_1) des Systems g, als die durch den Punkt (b_1, b'_1) zur Horizontaltrace e'_h geführte Parallele. Dieselbe trifft die Leitgerade (l_1, l'_1) in dem Berührungspunkte (a_1, a'_1) der Ebene $e'_v e'_h$ mit dem Paraboloide.

Hiermit gelangten wir zur Kenntnis zweier Punkte (a_1, a'_1) und (b_2, b'_2) der Berührungscurve des Cylinders, also auch der Ebene dieser Berührungscurve. Letztbezeichnete Ebene selbst kann nun auf verschiedenem Wege construiert werden. Nach Satz 80) und 86) wissen wir beispielsweise, dass dieselbe parallel zur Achse des Paraboloides, d. h. parallel zu der Schnittgeraden der beiden

Richtebenen sein müsse. Besagte Ebene würde demnach erhalten, wenn man zunächst die vorerwähnte Schnittlinie bestimmte, und parallel zu derselben durch die Gerade $(a_1 b_2, a'_1 b'_2)$ eine Ebene legen würde.

Man kann jedoch die Ebene $D_v D_h$ der Berührungscurve auch auf folgende einfache Weise finden.

Mit Zugrundelegung des Satzes 93) ist bekannt, dass dieselbe die Mittelpunkte aller zur Richtung der Cylindererzeugenden parallelen Sehnen des Paraboloides enthält.

Die beiden Ebenen e^1 und e^2 sind zu (S, S') parallel; es wird daher das Gleiche auch von ihrer Schnittgeraden (s, s') gelten. Die Gerade (s, s') ist aber gleichzeitig eine Sehne des Paraboloides, welches die erstere in den Punkten (a_2, a'_2) und (b_1, b'_1) trifft. Halbiert man nun diese Sehne in (m, m'), so ist die Ebene $D_v D_h$ der Berührcurve durch die drei Punkte (a_1, a'_1), (b_2, b'_2) und (m, m') vollständig bestimmt.

§. 152.

39. Aufgabe. **Es ist die Ebene der Berührungscurve eines einem hyperbolischen Paraboloide umschriebenen Kegels zu construieren.**

Das Paraboloid ist durch zwei Leitgeraden (l_1, l') und (l_2, l'_2) (Taf. XII, Fig. 59) und die horizontale Projectionsebene als Richtebene gegeben. (S, S') seien die Projectionen des Kegelscheitels.

Die Berührungscurve des dem Paraboloide aus dem Scheitel (S, S') umschriebenen Kegels wird von den Berührungspunkten der durch (S, S') gehenden Berührebenen der Fläche gebildet.

Um diese zu bestimmen wird man, um möglichst einfach zum Ziele zu gelangen, sowie in dem früheren Falle zu Werke gehen. Man wird also zunächst die auf den Leitgeraden (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) liegenden Punkte der Berührungscurve ermitteln. Zu diesem Zwecke bestimmen wir die Ebenen $e^1_v e^1_h$ und $e^2_v e^2_h$, welche durch den Punkt (S, S') und beziehungsweise durch die Leitgeraden (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) gehen. Die Berührungspunkte derselben ermitteln wir auf nachstehende Weise. Die beiden Ebenen e_1 und e_2 schneiden sich in einer durch (S, S') gehenden Geraden (s, s'), welche die Leitgeraden (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) beziehungsweise in den Punkten (a_2, a_2') und (b_1, b'_1) trifft. Der Punkt (b_1, b'_1) repräsentiert daher den Durchstoßpunkt der Leitgeraden (l_2, l'_2) mit der Ebene $e'_v e'_h$. Zieht man durch (b_1, b'_1) die Gerade (g_1, g'_1) parallel zur Horizontaltrace e'_h, so stellt diese die in der Ebene $e'_v e'_h$ liegende Erzeugende des Paraboloides, und folglich deren Schnittpunkt (a_1, a'_1) mit der Leitgeraden (l_1, l'_1), den Berührungspunkt der Ebene $e'_v e'_h$ dar.

In voller Übereinstimmung ergibt sich auch die in der Ebene $e^2_v e^2_h$ liegende Erzeugende (g_2, g'_2) als die durch (a_2, a'_2) zur Horizontaltrace e^2_h geführte Parallele. Dieselbe trifft die Leitgerade (l_2, l'_2) in dem gegenseitigen Berührungspunkte (b_2, b'_2) der Ebene $e^2_v e^2_h$ mit dem Paraboloide.

Da die beiden Punkte (a_1, a'_1) und (b_1, b'_1) der Berührungscurve angehören, muss die Ebene $D_v D_h$ der letzteren selbstverständlich durch dieselben hindurchgehen.

Ein dritter Punkt der Ebene $D_v D_h$ ergibt sich auf Grund nachstehender Betrachtung.

Die Berührungscurve des Paraboloides mit dem aus S demselben umschriebenen Kegel ist auch der Ort der Berührungspunkte aller durch den Punkt (S, S') gehenden Tangenten.

Denken wir uns nun durch die Gerade (s, s'), welche den Punkt (S, S') enthält, und das Paraboloid in den Punkten (a_2, a'_2) und (b_1, b'_1) berührt, eine Ebene gelegt, so schneidet diese das Paraboloid in einem Kegelschnitte, welcher durch die Punkte (a_2, a'_2) und (b_1, b'_1) geht.

Denken wir uns weiters an diesen Kegelschnitt vom Punkte (S, S') aus, die beiden Tangenten gezogen, so sind dieselben offenbar auch Tangenten des Paraboloides. Die Berührungspunkte derselben gehören sodann selbstverständlich der Berührungscurve an.

Hieraus folgt unmittelbar, dass die Verbindungsgerade der Berührungspunkte in der Ebene der Berührungscurve liege.

Berücksichtigt man aber, dass diese Verbindungsgerade auch die Polare des Punktes (S, S') in Bezug auf den vorgenannten Kegelschnitt darstellt, so wird nothwendig diese die Sehne (s, s') in einem Punkte (m, m') treffen müssen, welcher zu den drei Punkten (S, S'), (a_2, a'_2) und (b_1, b'_1) harmonisch ist. Den obbezeichneten Punkt (m, m') können wir ohneweiters mittelst der bekannten Vierecksconstruction $(\sigma\ \alpha\ \beta\ o)$ bestimmen. Da derselbe auf den Verbindungsgeraden zweier Punkte der Berührungscurven liegt, so ist er offenbar auch ein Punkt der Ebene $D_v D_h$ dieser letzteren. Besagte Ebene ergibt sich demgemäß als diejenige, welche durch die drei Punkte (m, m'), (a_1, a'_1) und (b_2, b'_2) gelegt werden kann.

§. 153.

40. Aufgabe. **Durch eine gegebene Gerade ist eine Ebene zu führen, welche ein hyperbolisches Paraboloid in einer gleichseitigen Hyperbel schneidet.**

Die Leitgeraden des Paraboloides seien (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) (Taf. X, Fig. 60). Die Richtebene sei die horizontale Projectionsebene. Die

gegebene Gerade endlich sei durch ihre Projectionen (S, S') gegeben.

Soll eine Ebene das Paraboloid in einer gleichseitigen Hyperbel, d. i. in einer Hyperbel, deren Asymptoten auf einander senkrecht stehen, schneiden, so muss, weil bekanntlich die Asymptoten eines beliebigen ebenen Schnittes eines Paraboloides zu den beiden Geraden, in welchen die schneidende Ebene die beiden Richtebenen trifft, parallel sind, im vorliegenden Falle die schneidende Ebene, die Richtebenen in zwei Geraden schneiden, welche einen rechten Winkel einschließen. Die Aufgabe reduciert sich mithin auf die folgende:

„Durch die Gerade (S, S') ist eine Ebene zu legen, welche die beiden Richtebenen in zwei auf einander senkrecht stehenden Geraden schneidet."

Wir haben demgemäß vor allem die zweite Richtebene zu construieren. Zu diesem Zwecke ziehen wir durch einen beliebigen Punkt (x, x') der Geraden (S, S'), die beiden Geraden (λ_1, λ'_1) und (λ_2, λ'_2) beziehungsweise parallel zu den gegebenen Leitgeraden (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2). Die durch diese Geraden λ_1 und λ_2 gelegte Ebene R_v R_h, bestimmt bereits die obverlangte Richtebene.

Repräsentiert nun (h, h') den Horizontaldurchstoßpunkt der Geraden (S, S') mit der horizontalen Projectionsebene, so wird es sich, weil letztere mit der ersten Richtebene zusammenfällt, bloß darum handeln, in der Trace R_h einen Punkt zu finden, welcher mit den Punkten (x, x') und (h, h') verbunden, zwei auf einander senkrecht stehende Gerade ergibt.

Setzen wir beispielsweise voraus, dass m' ein derartiger Punkt wäre, so müssen die Geraden (m' h', m h) und (x m, x' m') im Raume einen rechten Winkel einschließen. Nachdem aber die Gerade (m h, m' h') in der horizontalen Projectionsebene liegt, wird die Horizontalprojection jeder auf ihr senkrecht stehenden Geraden, also auch die Horizontalprojection x' m' auf m' h' senkrecht stehen müssen, d. h. der Winkel x' m' h' muss gleich 90^0 sein.

Legt man daher über x' h' als Durchmesser einen Kreis K, so schneidet dieser die Trace R_h in zwei Punkten m' und n' von der vorgenannten Beschaffenheit. Der Winkel (x m h, x' m' h') ist mithin ein rechter und die Ebene E^1_v E^1_h desselben (die Horizontaltrace E'_h derselben ist bereits durch m' h' gegeben) demnach die gesuchte. Der Punkt (n, n') ergibt eine zweite Lage der der Aufgabe entsprechenden Ebene E^2_v E^2_h.

§. 154.

41. Aufgabe. **Ein hyperbolisches Paraboloid ist durch zwei Erzeugende eines und desselben Systems und durch zwei Berührungsebenen gegeben; dasselbe ist durch die Ermittelung von Erzeugenden des zweiten Systems zu bestimmen.**

Seien (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) (Taf. XI, Fig. 61) die gegebenen Erzeugenden, $e'_v\, e'_h)$ und $e^2_v\, e^2_h$ die beiden gegebenen Berührebenen.

Das Paraboloid ist durch diese Bestimmungsstücke vollständig festgestellt, denn, da jede Berührebene desselben sowohl eine Erzeugende des Systems (l) als auch eine Erzeugende des Systems (g) enthält, und überdies jede Erzeugende des Systems (g) alle Erzeugenden des Systems (l) schneidet und umgekehrt, so ist einleuchtend, dass man bloß die Schnittpunkte (a_1, a'_1) und (b_1, b'_1) der Geraden (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) mit der Ebene $e'_v\, e'_h$ zu bestimmen braucht, um in der Verbindungsgeraden (g_1, g'_1) derselben eine Erzeugende des Paraboloides zu erhalten.

In gleicher Weise erhält man eine zweite Erzeugende (g_2, g'_2), als Verbindungsgerade der Durchschnittspunkte (a_2, a'_2) und (b_2, b'_2) der Geraden (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) mit der Ebene $e^2_v\, e^2_h$. Betrachtet man nun (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) als Leitgeraden und bestimmt die zu den beiden Erzeugenden (g_1, g'_1) und (g_2, g'_2) parallele Richtebene $R_v R_h$, so kann man beliebig viele Erzeugende (g) des Paraboloides ermitteln.

§. 155.

42. Aufgabe. **Ein hyperbolisches Paraboloid ist durch zwei Erzeugenden eines Systems und zwei seiner Punkte gegeben; es sind beide Richtebenen zu bestimmen.**

Sind l_1 und l_2 die beiden Erzeugenden des einen Systems, so ist eine Ebene R_1, welche zu denselben parallel geführt wird, bereits die eine der verlangten Richtebenen.

Die Richtebene des anderen Systems findet man durch folgende Constructionen.

Sind a_1 und a_2 die beiden gegebenen Punkte, so können die Erzeugenden g_1 und g_2 des Systems (g), welche durch diese Punkte gehen, keine anderen Geraden als jene sein, welche sowohl l_1 als auch l_2 schneiden. Ermittelt man daher die dieser Anforderung entsprechenden Geraden g_1 und g_2, so wird eine zu denselben parallel gelegte Ebene R_2 die verlangte zweite Richtebene darstellen.

§. 156.

43. Aufgabe. Von einem hyperbolischen Paraboloide sind zwei Erzeugenden l_1 und l_2 des einen Systemes, eine Erzeugende g des zweiten Systemes, ferner ein Punkt p auf g und die ihm entsprechende Berührebene T_p des Paraboloides gegeben; es ist die zu g parallele Richtebene zu ermitteln.

In der Berührebene T_p muss nothwendigerweise außer der Erzeugenden g auch eine Erzeugende λ, welche durch den Berührungspunkt p geht und dem Systeme (l) angehört, liegen. Diese Erzeugende erhält man offenbar als Schnittgerade der Ebene T_p mit der durch p parallel zur Richtebene des Systems (l) geführten Ebene, d. i. einer Ebene, welche zu l_1 und l_2 parallel läuft.

Hiermit kennt man drei dem nämlichen Systeme angehörende Erzeugenden l_1, l_2 und λ. Bestimmt man daher, wie bekannt, eine Gerade g_1, welche die drei Geraden l_1, l_2 und λ in je einem Punkte trifft, so repräsentiert diese eine Erzeugende des Systems (g). Es wird somit jene Ebene, welche zu dieser und zu der gegebenen Erzeugenden parallel geführt wird, die gesuchte Ebene darstellen.

§. 157.

44. Aufgabe. In der horizontalen Projectionsebene ist eine Parabel als Spur eines einem hyperbolischen Paraboloide umschriebenen Cylinders gegeben; von dem Paraboloide selbst sind zwei Erzeugenden, welche demselben System angehören, bestimmt; es sind die beiden Richtebenen, als auch die Richtung der Erzeugenden des umschriebenen Cylinders festzustellen.

Die gegebene Parabel sei P (Taf. XIII, Fig. 62). Die beiden gegebenen Erzeugenden seien (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2).

Denken wir uns durch die beiden Erzeugenden (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) zu der (bisher noch unbekannten) Richtung der Cylindererzeugenden parallele Ebenen gelegt, so werden dieselben sowohl das Paraboloid als auch den umschriebenen Cylinder berühren. Die Horizontaltracen besagter Ebenen werden mithin einerseits durch die Horizontalspuren h'_1 und h'_2 der Geraden (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) gehen, andererseits aber die Parabel P berühren müssen.

Führen wir demnach durch h'_1 und h'_2 die beiden möglichen Tangenten T^1_h und T^2_h an die Parabel, so repräsentieren diese bereits die Horizontaltracen der beziehungsweise durch (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) gehenden Berührebenen T^1_v, T^1_h und T^2_v, T^2_h des Cylinders. Die verticalen Tracen T^1_v und T^2_v werden in der herkömmlichen bekannten Weise bestimmt.

Die beiden Ebenen $T'_v\, T'_h$ und $T^2_v\, T^2_h$ schneiden sich, da jede von ihnen eine Erzeugende des Cylinders enthält, in einer Geraden (S, S'), welche zu diesen Cylindererzeugenden parallel läuft. Hiermit ist der eine Theil der gestellten Aufgabe bereits gelöst.

Sei ferner a'_s der Berührungspunkt der Trace T'_h mit der Parabel P, und b^2_s jener der Tangente T^2_h. Führt man durch a'_s die Parallele (σ_1, σ'_1) zu (S, S'), so stellt diese Gerade offenbar jene Erzeugende des Cylinders dar, längs welcher derselbe von der Ebene $T^1_v\, T^1_h$ berührt wird.

Nachdem aber jede Berührebene des umschriebenen Cylinders gleichzeitig eine Berührebene des Paraboloides ist, und der Berührungspunkt derselben mit dem Paraboloide auch auf der Berührungserzeugenden des Cylinders liegt; nachdem ferner der Berührungspunkt einer Ebene mit dem Paraboloide immer auf den in dieser Ebene sich vorfindenden Erzeugenden des Paraboloides liegen muss, so folgt unmittelbar, dass der Schnitt der Berührungserzeugenden (σ_1, σ'_1) des Cylinders mit der Erzeugenden (l_1, l'_1) des Paraboloides, der Berührungspunkt (a_1, a'_1) des letzteren mit der Ebene $T'_v\, T'_h$ sein werde.

Auf der gleichen Schlussfolgerung beruhend, ergibt sich aus den nämlichen Gründen, dass die zu (S, S') durch b^2_s parallel gezogene Gerade (σ_2, σ'_2), die Erzeugende (l_2, l'_2) in demselben Punkte (b_1, b'_2) trifft, in welchem das Paraboloid von der Ebene $T^2_v\, T^2_h$ berührt wird.

Berücksichtigt man jetzt, dass durch den Berührungspunkt (a_1, a'_1) des Paraboloides mit der Ebene $T^1_v\, T^1_h$ außer der Geraden (l_1, l'_1) auch noch eine Erzeugende (g_1, g'_1) des anderen Systems gehen müsse, welche in der Ebene $T^1_v\, T^1_h$ liegt, und dass diese Erzeugende (g_1, g'_1), die gegebene Erzeugende (l_2, l'_2) in einem Punkte treffen müsse, welcher kein anderer als der Durchschnittspunkt (b_1, b'_1) der Geraden (l_2, l'_2) mit der Ebene $T^1_v\, T^1_h$ sein kann, so ergibt sich besagte Erzeugende als die Verbindungsgerade der beiden Punkte (a_1, a'_1) und (b_1, b'_1). Hiebei ist zu bemerken, dass sich der Durchstoßpunkt (b_1, b'_1) der Geraden (l_2, l'_2) mit der Ebene $T^1_v\, T^1_h$ direct als jener Punkt herausstellt, in welchem die Gerade (S, S') von (l_2, l'_2) getroffen wird.

Eine zweite Erzeugende (g_2, g'_2) des Paraboloides findet man auf Grund der nämlichen Betrachtungen, als Verbindungsgerade des Punktes (b_2, b'_2) mit jenem Punkte (a_2, a'_2), in welchem die Gerade (l_1, l'_1) die Ebene $T^2_v\, T^2_h$ schneidet.

Hiernach kennen wir zwei Erzeugende (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) des einen Systems, und ebenso zwei Erzeugenden (g_1, g'_1) und (g_2, g'_2) des anderen Systems.

Die zu (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) an beliebiger Stelle parallel gelegte Ebene $R^1_v R^1_h$ ist sodann die Richtebene des einen, und die parallel zu (g_1, g'_1) und (g_2, g'_2) geführte Ebene $R^2_v R^2_h$ jene des zweiten Systems der Erzeugenden des hyperbolischen Paraboloides.

Da von jedem der beiden Punkte h'_1 und h'_2 zwei verschiedene Tangenten an die gegebene Parabel P gelegt werden können, und jede Tangente des ersteren Paares mit jeder Tangente des zweiten Paares combiniert werden kann, so folgt, dass es vier verschiedene Paraboloide gibt, welche der gestellten Aufgabe entsprechen.

§. 158.

45. Aufgabe. **Ein hyperbolisches Paraboloid ist durch eine der Richtebenen und durch zwei Tangentialebenen sammt deren Berührungspunkten gegeben; die zweite Richtebene ist zu suchen.**

Die gegebene Richtebene werde als horizontale Projectionsebene angenommen. Die beiden gegebenen Ebenen seien durch $e^1_v e^1_h$ und $e^2_v e^2_h$ (Taf. XI, Fig. 63) und die in denselben liegenden Berührungspunkte durch (a, a') und (b, b') dargestellt.

Die Ebene $e'_v e'_h$ enthält zwei durch den Punkt (a, a') gehende Erzeugenden des Paraboloides, wovon die eine (g_1, g'_1), parallel zur horizontalen Projectionsebene als Richtebene, also insbesondere parallel zur Trace e^1_h sein muss. Ebenso findet man die in der Ebene $e^2_v e^2_h$ liegende, durch den Berührungspunkt (b, b') gehende Erzeugende (g_2, g'_2), als die Parallele zur Horizontaltrace e^2_h.

In der Ebene $e'_v e'_h$ liegt aber auch die durch den Punkt (a, a') gehende Erzeugende (l_1, l'_1) des zweiten Systems. Nachdem dieselbe jene dem anderen Systeme angehörende Erzeugende (g_2, g'_2) in einem Punkte treffen muss, welcher mit dem Durchschnittspunkte (β, β') der Geraden (g_2, g'_2) mit der Ebene $e'_v e'_h$ zusammenfällt, so ergibt sich diese Erzeugende (l_1, l'_1) unmittelbar als Verbindungsgerade der Punkte (a, a') und (β, β'). Der Durchstoßpunkt (β, β') von $e'_v e'_h$ mit der Geraden (g_2, g'_2) ist offenbar derjenige Punkt, in welchem die letztere von der Schnittgeraden (s, s') der beiden Ebenen $e'_v e'_h$ und $e^2_v e^2_h$ getroffen wird.

Auf gleiche Weise findet man eine zweite Erzeugende (l_2, l'_2), als die Verbindungsgerade des Punktes (b, b') mit jenem Punkte (α, α'), in welchem die Ebene $e^2_v e^2_h$ die Erzeugenden (g_1, g'_1) schneidet. Der Punkt (α, α') ist gleichzeitig jener, in welchem die Gerade (g_1, g'_1) die Schnittgerade (s, s') der Ebenen $e^1_v e^1_h$ und $e^2_v e^2$ trifft.

Führt man nun durch einen beliebigen Punkt (x, x') eine Ebene parallel zu den Erzeugenden (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2), so wird durch diese die gesuchte zweite Richtebene $R_v R_h$ dargestellt.

§. 159.

46. Aufgabe. **Ein hyperbolisches Paraboloid ist durch die beiden Richtebenen, durch zwei Tangentialebenen und endlich durch den Berührungspunkt der einen von den letztgenannten Ebenen gegeben; es soll der Berührungspunkt der zweiten gefunden werden.**

Wir denken uns die eine Richtebene wieder als horizontale Projectionsebene, die verticale Projectionsebene hingegen wählen wir senkrecht zu der zweiten Richtebene R_1, so, dass die letztere als eine vertical projicierende Ebene $R_v R_h$ (Taf. XII, Fig. 64) erscheint. Die beiden Tangentialebenen seien durch $e^1_v e^1_h$ und $e^2_v e^2_h$ bestimmt, und endlich sei (a, a') der Berührungspunkt von $e'_v e'_h$.

Behufs Bestimmung des Berührungspunktes der zweiten Ebene $e^2_v e^2_h$ wird es sich selbstverständlich zunächst darum handeln, die in dieser Ebene liegenden Erzeugenden des Paraboloides aufzufinden. Letzteres kann in nachstehender Weise bewirkt werden.

Die durch den Berührungspunkt (a, a') gehenden Erzeugenden des Paraboloides sind offenbar zwei in der Berührungsebene $e'_v e'_h$ liegende Geraden, welche beziehungsweise zur horizontalen Projectionsebene und zur zweiten Richtebene $R_v R_h$ parallel sein müssen.

Die eine derselben (g_1, g'_1) wird man daher als Schnitt der Ebene $e'_v e'_h$ mit der durch (a, a') parallel zur horizontalen Projectionsebene gelegten Ebene ε'_v erhalten; die zweite (l_1, l'_1) dagegen als die Schnittgerade der Ebene $e'_v e'_h$ mit der durch (a, a') parallel zur zweiten Richtebene $R_v R_h$ gelegten Ebene $\varrho'_v \varrho'_h$ finden.

Bestimmen wir weiters den Schnitt (s, s') der Ebene $e'_v e'_h$ mit der zweiten Berührebene $e^2_v e^2_h$, so wird die besagte Schnittgerade (s, s') die beiden Erzeugenden (g_1, g'_1) und (l_1, l'_1) in jenen Punkten (α, α') und (β, β') treffen, in welchen dieselben die Berührebene $e^2_v e^2_h$ schneiden.

Die Ebene $e^2_v e^2_h$ muss zwei Erzeugenden verschiedener Systeme, welche durch den zu suchenden Berührungspunkt gehen, enthalten. Nennen wir diese beiden Erzeugenden (g_2, g'_2) und (l_2, l'_2).

Die Erzeugende (g_2, g'_2) wird alle Erzeugenden des Systems (l), also auch die Gerade (l_1, l'_1) schneiden. Letzteres kann aber nur, weil (g_2, g'_2) in der Ebene $e^2_v e^2_h$ liegt, in jenem Punkte (β, β') erfolgen, in welchem die letztgenannte Ebene von der Erzeugenden (l_1, l'_1) getroffen wird. Die gesuchte Erzeugende (g_2, g'_2) muss daher durch den

Punkt (β, β') gehen. Andererseits muss dieselbe aber auch zur horizontalen Projectionsebene, als Richtebene, parallel sein, und wird sich daher als Schnittgerade der Ebene $e^2_v e^2_h$ mit der durch (β, β') gelegten Horizontalebene ε^2_v ergeben.

Analog findet man die zweite in $e^2_v e^2_h$ liegende Erzeugende (l_2, l'_2). Dieselbe muss sämmtliche Erzeugenden (g), also auch die Gerade (g_1, g'_1) schneiden, was wiederum nur in jenem Punkte (α, α') stattfinden kann, in welchem die Erzeugende (g_1, g'_1) die Ebene $e^2_v e^2_h$ trifft. Die gesuchte Erzeugende (l_2, l'_2) muss daher durch diesen Punkt (α, α') gehen. Dieselbe muss aber auch andererseits zu der Richtebene $R_v R_h$ parallel sein, und wird sich demgemäß als die Schnittgerade der Ebene $e^2_v e^2_h$ mit jener Ebene $\varrho^2_v \varrho^2_h$ ergeben, welche durch den Punkt (α, α') parallel zu der Richtebene $R_v R_h$ gelegt werden kann.

Die beiden Erzeugenden (g_2, g'_2) und (l_2, l'_2) schneiden sich in einem Punkte (P, P'), welcher den Berührungspunkt der Ebene $e^2_v e^2_h$ mit dem hyperbolischen Paraboloide darstellt. Hiermit erscheint die gestellte Aufgabe gelöst. Nebenbei sei erwähnt, dass durch die vollführten Constructionen das Paraboloid auf die gewöhnlich gegebenen Bestimmungsstücke „zwei Leitgeraden“ l_1, l_2 (resp. g_1 und g_2) und „eine Richtebene“ (horizontale Ebene, resp. Ebene $R_v R_h$) zurückgeführt wurde.

Auf ähnlichem Wege wird man auch zur Lösung und Durchführung der umgekehrten Aufgabe, wie folgt, gelangen.

§. 160.

47. Aufgabe. **Ein hyperbolisches Paraboloid ist durch die beiden Richtebenen, durch eine Tangentialebene und deren Berührungspunkt, sowie endlich durch einen Punkt der Fläche selbst gegeben; es ist die Berührungsebene im letztgenannten Punkte zu bestimmen.**

Wie im vorhergehenden Falle, nehmen wir auch hier die eine Richtebene als die horizontale Projectionsebene an und wählen die verticale Projectionsebene senkrecht zu der zweiten Richtebene, wodurch sich diese letztere als eine verticalprojicierende Ebene $R_v R_h$ darstellt.

Die gegebene Berührebene sei $e_v e_h$ (Taf. XII, Fig. 65), (a, a') deren Berührungspunkt und (p, p') der gegebene Punkt der Fläche.

Um durch den letztgenannten Punkt die Berührungsebene des Paraboloides legen zu können, wird es, wie sofort einleuchtet, am zweckmäßigsten sein, die durch denselben gehenden Erzeugenden der

beiden Systeme zu construieren. Letzteres führen wir folgendermaßen durch.

Man bestimmt zunächst die beiden Erzeugenden, welche in der Berührungsebene $e_v e_h$ liegen, in derselben Weise, wie dies bei Besprechung des vorhergehenden Problems geschah. Dieselben ergeben sich nämlich beziehungsweise als die Schnittgeraden (g_1, g'_1) und (l_1, l'_1) der Ebene $e_v e_h$ mit jenen beiden Ebenen ε'_v und $\varrho'_v \varrho'_h$, welche durch den Berührungspunkt (a, a') parallel zu den Richtebenen (horizontale Projectionsebene und Ebene $R_v R_h$) gelegt werden.

Die Erzeugende (g_2, g'_2), welche durch den Punkt (p, p') geht, muss einerseits parallel zur horizontalen Richtebene sein, andererseits aber die oben gefundene Erzeugende (l_1, l'_1) des zweiten Systems schneiden. Dieselbe wird sich daher als Verbindungsgerade des Punktes (p, p') mit jenem Punkte (α, α') ergeben, in welchem die Erzeugende (l_1, l'_1) von der durch (p, p') gelegten horizontalen Ebene ε^2_v getroffen wird.

Die zweite durch (p, p') gehende Erzeugende (l_2, l'_2) wird einerseits zur Richtebene $R_v R_h$ parallel sein und andererseits die dem zweiten System angehörige Erzeugende (g_1, g'_1) schneiden müssen. Besagte Erzeugende wird mithin als die Verbindungsgerade des Punktes (p, p') mit dem Punkte (β, β'), in welchem die Erzeugende (g_1, g'_1) von der durch (p, p') parallel zur Richtebene $R_v R_h$ gelegten Ebene $\varrho^2_v \varrho^2_h$ getroffen wird, erhalten werden.

Legt man nun durch die beiden Erzeugenden (g_2, g'_2) und (l_2, l'_2) eine Ebene, so repräsentiert diese bereits die geforderte Berührungsebene $T_v T_h$ im Punkte (p, p') des Paraboloides.

Weitere Erzeugende des Systems (g) auf dem Paraboloide können leicht gefunden werden, wenn man (l_1, l'_1) und (l_2, l'_2) als Leitgeraden und die horizontale Projectionsebene als Richtebene voraussetzt; ebenso bequem werden sich Erzeugende des Systems (l) ergeben, wenn man (g_1, g'_1) und (g_2, g'_2) als Leitgeraden und die Ebene $R_v R_h$ als Richtebene annimmt.

§. 161.

48. Aufgabe. **Ein hyperbolisches Paraboloid ist durch eine Richtebene, durch eine Erzeugende, welche zu dieser Richtebene nicht parallel ist, und durch drei Punkte gegeben; es ist die zweite Richtebene auszumitteln.**

Die gegebene Richtebene sei R_1, die gegebene Erzeugende sei l_1 und die drei gegebenen Punkte seien a_1, a_2 und a_3.

Die Erzeugenden des Systems (g), welche durch die Punkte a_1, a_2 und a_3 gehen, sind drei Geraden g_1, g_2 und g_3, welche sämmtlich die Gerade l_1 des anderen Systems schneiden und zur Richtebene R_1 parallel sein müssen. Bezeichnete Geraden der Fläche werden demgemäß erhalten, wenn man durch a_1, a_2 und a_3 die Ebenen ϱ'_1, ϱ^2_1 und ϱ^3_1 parallel zu R_1 legt, und die Durchstoßpunkte α_1, α_2 und α_3 derselben mit der Geraden l_1, beziehungsweise mit den Punkten a_1, a_2 und a_3 verbindet.

Hiernach kennt man drei Erzeugende g_1, g_2 und g_3 des Systems (g), und es unterliegt demnach keinerlei Schwierigkeit, vermittelst derselben eine Erzeugende l_2 zu finden, d. i. eine von jenen Geraden anzugeben, welche mit g_1, g_2 und g_3 je einen Punkt gemein haben. — Legt man sodann zu l_1 und l_2 eine parallele Ebene, so repräsentiert diese bereits die gesuchte zweite Richtebene.

§. 162.

49. Aufgabe. **Von einem hyperbolischen Paraboloide sind vier Punkte und die beiden Richtebenen gegeben; es sind zwei Erzeugende desselben, welche dem nämlichen System angehören, zu bestimmen.**

Vorstehendes Problem lässt sich vermittelst geeigneter Construction auf ein früher besprochenes und zwar auf dasjenige zurückführen, bei welchem das Paraboloid durch zwei Richtebenen, zwei Punkte und die Tangentialebene in einem dieser Punkte gegeben war.

Wir denken uns behufs der leichteren constructiven Durchführung die Transformation der gegebenen Bestimmungsstücke bereits in der Weise vollzogen, dass die eine Richtebene wieder als horizontale Projectionsebene erscheint und die verticale Projectionsebene so gewählt, dass dieselbe zur zweiten Richtebene senkrecht wird; die letztere folglich als eine verticalprojicierende Ebene $R_v R_h$ sich darstellt. Die vier gegebenen Punkte des Paraboloides seien (a, a'), (b, b'), (c, c') und (d, d') (Taf. XIII, Fig. 66).

Zunächst legen wir durch drei dieser Punkte, allenfalls durch (a, a'), (b, b') und (c, c') eine Ebene $\varepsilon'_v \varepsilon'_h$. Letztere schneidet das Paraboloid in einer Hyperbel, welche durch diese drei Punkte geht. Die Asymptoten derselben werden selbstverständlich eine zu den Schnittgeraden der Ebene $\varepsilon'_v \varepsilon'_h$ mit den beiden Richtebenen parallele Lage haben.

Nachdem aber die beiden Richtebenen verticalprojicierend sind, demgemäß die verticalen Projectionen aller Geraden, die in der einen

liegen, in die Grundlinie, und jene aller Geraden, die in der zweiten liegen, in die Verticaltrace R_v fallen, so folgt, dass auch die verticale Projection der Schnitthyperbel wieder eine Hyperbel sein wird, welche durch die drei Punkte a, b und c geht, und deren Asymptoten beziehungsweise zu der Grundlinie und zur Trace R_v parallel sein werden.

Durch diese Elemente ist die Hyperbel vollkommen bestimmt, und kann man die Tangente in einem ihrer Punkte, beispielsweise in a, mittelst der bekannten aus dem Pascal'schen Satze folgenden Construction ermitteln.

Die unendlich fernen Punkte e und f von R_v und GG bilden mit a, b und c ein der Hyperbel eingeschriebenes Fünfeck, welches im Vereine mit der fraglichen Tangente t_1 als Sechseck aufgefasst werden kann.

Die Gegenseitenpaare af und bc, ab und ce, t_1 und cf schneiden sich auf derselben Geraden $\alpha\beta\gamma$, woraus unmittelbar die Construction der Tangente t_1 folgt.

Die Gerade t_1 ist somit die verticale Projection der Tangente der Schnitthyperbel in dem Punkte (a, a'). Die Horizontalprojection t'_1 derselben ist, da sie in der Ebene $\varepsilon'_v \varepsilon'_h$ liegt, aus der Verticalprojection t_1 leicht abzuleiten.

Als Tangente der Schnitthyperbel ist die Gerade (t_1, t'_1) gleichzeitig eine Tangente des Paraboloides im Punkte (a, a').

Auf gleiche Weise kann auch eine zweite Tangente (t_2, t'_2) des Paraboloides im Punkte (a, a') ermittelt werden. Man wird nämlich durch (a, a') und zwei andere Punkte, etwa durch (b, b') und (d, d'), eine Ebene $\varepsilon^2_v \varepsilon^2_h$ legen, und indem man die vorigen Constructionen wiederholt, die Tangente (t_2, t'_2) der mit dieser Ebene ε^2 resultierenden Schnitthyperbel im Punkte (a, a') construieren.

Eine Ebene $e_v e_h$, welche man durch die beiden Tangenten (t_1, t'_1) und (t_2, t'_2) legt, berührt das Paraboloid im Punkte (a, a').

Diese Ebene mit dem Berührungspunkte (a, a') und einer von den drei übrigen Punkten können nun, wie in Aufgabe 47) dazu benützt werden, um ein Paar von Erzeugenden jedes einzelnen Systems der Fläche ausfindig zu machen, womit die Aufgabe auf Bekanntes reduciert und demnach vollständig gelöst erscheint.

XI. Capitel.

Die Strictionslinien der Regelflächen zweiten Grades.

§. 163.

A. Die Strictionslinie des dreiachsigen Hyperboloides.

Das Hyperboloid sei durch seine Kehlellipse (K, K') (Taf. XIII, Fig. 67) in einer zur horizontalen Projectionsebene parallelen Ebene ε_v und durch seine Horizontalspur (K_1, K'_1) gegeben; weiters denken wir uns dasselbe durch eine zweite horizontale Ebene ε^2_v, welche von der Ebene ε_v den nämlichen Abstand wie die horizontale Projectionsebene besitzt, nach der Ellipse (K_2, K'_2) begrenzt.

Die horizontale Projection K'_2 dieser Ellipse fällt mit der Horizontalspur K'_1 des Hyperboloides zusammen; ferner ist dieselbe mit der horizontalen Projection K' der Kehlellipse concentrisch und ähnlich. Schließlich wollen wir noch voraussetzen, dass die verticale Projectionsebene zu einer der beiden Hauptebenen, welche auf der Ebene der Kehlellipse senkrecht stehen, (beispielsweise zu jener, welche die große Achse $(AB, A'B')$ von (K, K') enthält) parallel sei.

Wir wissen bereits, dass durch jede Erzeugende einer windschiefen Fläche eine bestimmte Ebene — die „asymptotische Ebene dieser Erzeugenden" — gehe, welche die Fläche in dem unendlich fernen Punkte der betreffenden Erzeugenden berührt.

Eine ebensolche besondere Berührungsebene durch jede der Erzeugenden ist die „Centralebene", d. i. jene Ebene, welche durch diese Erzeugende, senkrecht zu der betreffenden asymptotischen Ebene gelegt werden kann.

Der Berührungspunkt dieser Ebene heißt der „Centralpunkt" der Erzeugenden und der geometrische Ort der Centralpunkte aller Erzeugenden ist die „Strictionslinie" der betreffenden Regelfläche.

Dieser Auseinandersetzung gemäß haben wir im vorliegenden Falle, behufs Construction der Strictionslinie, nichts anderes zu thun, als die Centralpunkte einer beliebig gewählten Anzahl von Erzeugenden des Hyperboloides zu ermitteln. In Folgendem möge die Construction eines solchen Centralpunktes entwickelt werden.

Sei demnach (g, g') eine beliebige Erzeugende des Hyperboloides. Um den Centralpunkt derselben zu finden, haben wir, wie oben im allgemeinen gesagt wurde, die asymptotische Berührebene von (g, g')

zu suchen, durch (g, g') sodann auf dieselbe eine normale Ebene zu führen und den Berührungspunkt der letzteren zu construieren.

Nach früherem ist bekannt, dass die asymptotische Ebene der Erzeugenden (g, g') eines Hyperboloides, außer (g, g'), auch die zu dieser Erzeugenden (g, g') parallele Erzeugende (l, l') des zweiten Systems enthalte. Ist die letztere ausgemittelt, so wird es sich darum handeln, die Centralebene der Erzeugenden (g, g') zu finden, d. i. jene durch (g, g') gehende Ebene E zu bestimmen, welche auf der durch (g, g') und (l, l') bestimmten (asymptotischen) Ebene senkrecht steht. Besagte Ebene kann, wie folgt, festgestellt werden.

Wir legen an beliebiger Stelle der Erzeugenden (l, l') beispielsweise durch deren Horizontaldurchstoßpunkt h', eine Hilfsebene S senkrecht zur Geraden (g, g'). Die Horizontaltrace S_h derselben geht sodann durch h'_1 und ist senkrecht auf (g, g'). Diese Ebene schneidet die Gerade (g, g') in einem Punkte r (durch Umlegung von (g, g') um g' nach g_0 ist derselbe leicht bestimmbar), welcher nach der Umlegung der Ebene S um ihre Horizontaltracen S_h nach r_o gelangt. Verbindet man hierauf r_o mit h'_1, so stellt diese Gerade $r_o h'_1$ die Schnittlinie der Hilfsebene S_h mit der asymptotischen Ebene (g, l) nach ihrer Umlegung um S_h dar.

Nachdem aber die Centralebene E zu der asymptotischen Ebene (g, l) normal steht, so schneidet sie die Ebene S in einer durch r_o gehenden, zu $r_o h'_1$ senkrechten Geraden $r_o v$, welche die Trace S_h in dem Punkte v trifft. Die Horizontaltrace E_h der gesuchten Centralebene geht nun offenbar einerseits durch den so erhaltenen Punkt v, andererseits aber auch durch die Horizontalspur h' der gegebenen Erzeugenden (g, g'), so dass dieselbe durch die Verbindungsgerade $v h'$ dargestellt erscheint.

Um den Berührungspunkt dieser Ebene E zu finden, wird bloß zu beachten sein, dass dieselbe außer der Erzeugenden (g, g') noch eine Erzeugende des anderen Systems enthalten müsse. Die horizontale Projection l'_1 dieser Erzeugenden geht einerseits durch den Punkt δ', in welchem die Trace E_h die Horizontalspur des Hyperboloides, d. i. die Ellipse K'_1 zum zweitenmale trifft, andererseits aber hat dieselbe als Tangente an die horizontale Projection K' der Kehlellipse mit dieser den Berührungspunkt gemein. Hiemit ist die horizontale Projection der Erzeugenden l_1 vollständig bestimmt.

Die Geraden l'_1 und g' schneiden sich in einem Punkte p', welcher die horizontale Projection des Berührungspunktes (p, p') der Ebene E, d. i. des gesuchten Centralpunktes darstellt.

In gleicher Weise kann man die Centralpunkte beliebig vieler anderer Erzeugenden finden, und erhält sodann, als Ort derselben, die Strictionslinie des Hyperboloides.

Da das Hyperboloid drei Symmetrieebenen besitzt, so muss selbstverständlich auch die Strictionslinie gegen diese Ebenen symmetrisch sein.

Hieraus folgt unmittelbar, dass die Strictionslinie die Kehlellipse in deren Scheiteln A, B, C und D treffen muss. Letzteres sagt aber nichts anderes aus, als dass dieselbe mit der Ebene der Kehlellipse diese vier Punkte gemein hat und daher eine Raumcurve vierter Ordnung ist.

§. 164.

B. Die Strictionslinie des windschiefen Rotationshyperboloides.

Man kann von vornherein behaupten, dass die Strictionslinie eines Rotationshyperboloides durch einen oder mehrere Kreise dargestellt sein werde.

Denn, denkt man sich den Centralpunkt einer beliebigen Erzeugenden eines Rotationshyperboloides ermittelt, so wird, falls man diese Erzeugende um die Achse rotieren lässt, der genannte Centralpunkt einen Kreis beschreiben, ohne dass er in irgend einer Lage aufhören würde, der Centralpunkt der betreffenden Lage der Erzeugenden zu sein.

Da im allgemeinen Falle die Strictionslinie als eine Curve vierter Ordnung sich herausstellte, so muss dieselbe dermalen aus zwei Kreisen bestehen.

Hierbei sind folgende zwei Fälle denkbar:

a) Die beiden Kreise liegen symmetrisch gegen die Ebene des Kehlkreises, oder

b) beide Kreise fallen mit dem Kehlkreise zusammen.

Die nachstehende Betrachtung wird zeigen, dass der letztere Fall eintritt.

Sei K' (Taf. XIII, Fig. 68) die horizontale Projection des parallel zur horizontalen Projectionsebene vorausgesetzten Kehlkreises, und K'_1 die Horizontalspur des Rotationshyperboloides, dargestellt durch einen mit K' concentrischen Kreis.

Zieht man an den Kreis K' irgend eine beliebige Tangente g', so repräsentiert diese die horizontale Projection einer Erzeugenden des Hyperboloides. Einer von jenen Punkten, in welchem diese Gerade den Kreis K'_1 trifft, ist der Horizontaldurchstoßpunkt h' der genannten Erzeugenden.

Um die asymptotische Ebene A dieser Erzeugenden zu finden, wird bloß zu berücksichtigen sein, dass die genannte Ebene außer der Erzeugenden g auch die zu derselben parallele Erzeugende l des anderen Systems enthalten müsse. Die horizontale Projection l' dieser Erzeugenden ist die zu g' parallele Tangente des Kreises K'. Der Horizontaldurchstoßpunkt derselben wird durch h'_1 repräsentiert. Die Gerade $h'\,h'_1$ stellt demnach die horizontale Trace A_h der asymptotischen Ebene dar. Es bedarf wohl keines besonderen Beweises, dass die Gerade $h'\,h'_1$ auf g' und l' senkrecht steht.

Wir gelangen hiernach unmittelbar zu dem Schlusse, dass die Centralebene der Erzeugenden g, d. h. die durch g senkrecht zur Ebene A geführte Ebene, keine andere als die durch g gehende horizontal projicierende Ebene E, deren Horizontaltrace E_h mit der Projection g' zusammenfällt, sein könne. Der Berührungspunkt p dieser Ebene ist aber bekanntlich jener Punkt, in welchem die Erzeugende g den Kehlkreis (K, K') trifft.

Hieraus ist ersichtlich, dass der Centralpunkt einer beliebigen Erzeugenden g eines Rotationshyperboloides jener Punkt sei, in welchem der Kehlkreis von dieser Erzeugenden getroffen wird. Der Kehlkreis ist demnach der geometrische Ort der Centralpunkte aller Erzeugenden g, woraus weiter folgt, dass der Kehlkreis die Strictionslinie des Rotationshyperboloides darstellt.

Es ist an und für sich einleuchtend, dass dieser Kreis doppelt zu zählen sei, da derselbe die Strictionslinie für die Erzeugenden des Systems (g) sowohl, als auch jene für die Erzeugenden des Systems (l) repräsentiert.

§. 165.

C. Die Strictionslinie des hyperbolischen Paraboloides.

Die asymptotische Ebene einer jeden Erzeugenden des hyperbolischen Paraboloides ist, wie wir bereits dargethan, diejenige Ebene, welche durch die betreffenden Erzeugenden parallel zu der betreffenden Richtebene gelegt wird. Die asymptotischen Ebenen aller Erzeugenden des einen Systems sind somit zu der Richtebene desselben Systems parallel.

Aus diesen im Vorhergegangenen festgestellten Thatsachen folgt aber unmittelbar, dass die Centralebenen aller Erzeugenden eines Systems — weil senkrecht zu deren asymptotischen Ebenen — auch senkrecht zu der betreffenden Richtebene, oder, was dasselbe ist, parallel zu einer und derselben Geraden, d. i. parallel zu der Normalen der bezüglichen Richtebene, sein müssen.

Die Centralebenen aller Erzeugenden eines Systems umhüllen daher einen Cylinder, dessen Erzeugenden normal zu der Richtebene dieses Systems stehen, und welcher das Paraboloid längs der Strictionslinie berührt.

Aus den Ergebnissen vorausgeschickter Untersuchungen wissen wir aber, dass die Berührungscurve eines hyperbolischen Paraboloides mit einem demselben umschriebenen Cylinder stets eine Parabel ist.

Das Gleiche, was bezüglich des einen Systems von Erzeugenden gilt, lässt sich selbstverständlich, die Strictionslinie betreffend, auch für das zweite System von Erzeugenden nachweisen, so dass der Satz aufgestellt werden kann:

115. „*Die Strictionslinie eines hyperbolischen Paraboloides besteht aus zwei Parabeln, welche sich als die Berührungscurven der der Fläche umschriebenen, zu den beiden Richtebenen senkrechten Cylinder ergeben.*"

Setzen wir jedoch insbesondere voraus, dass das Paraboloid ein gleichseitiges sei, d. h. dass dessen beide Richtebenen aufeinander senkrecht stehen, so wird unschwer der Nachweis geliefert werden können, dass sich die Strictionslinie des hyperbolischen Paraboloides auf zwei Gerade reduciert.

Auf die vorausgeschickte Theorie der Flächen (Satz 99 etc.) verweisend, ist bekannt, dass in jedem gleichseitigen Paraboloide zwei Erzeugenden g_s und l_s verschiedener Systeme existieren, welche durch den Scheitel des Paraboloides gehen und nachstehende Eigenschaft besitzen.

Die Erzeugende g_s ist senkrecht zu der Richtebene des Systems (l), und werden von derselben alle Erzeugenden l rechtwinklig geschnitten. Umgekehrt ist jede Erzeugende des Systems (g) normal zu der Erzeugenden l_s, weil diese letztere zur Richtebene des Systems (g) senkrecht steht.

Jede durch g_s gelegte Ebene wird daher zu der Richtebene des Systems (l) senkrecht stehen, und der ihr entsprechende, auf g_s liegende Berührungspunkt wird somit der Centralpunkt irgend einer Erzeugenden des Systems (l) sein. Dieses Ergebnis sagt aber nichts anderes aus, als dass die Gerade g_s den geometrischen Ort der Centralpunkte aller Erzeugenden des Systems (l), d. h. die diesem Systeme entsprechende Strictionslinie darstelle.

Eine übereinstimmende Betrachtung führt zu dem Resultate, dass ebenso auch die Gerade l_s die Strictionslinie für die Erzeugenden des Systems (g) repräsentiere. Es folgt mithin der Satz:

116. *„Die Strictionslinie eines gleichseitig-hyperbolischen Paraboloides besteht aus zwei Geraden, und zwar aus den beiden durch den Scheitel des Paraboloides gehenden (auf einander und auf den beiden Richtebenen senkrechtstehenden) Erzeugenden beider Systeme."*

Weitere Eigenschaften der windschiefen Flächen zweiten Grades und hierauf bezughabende Constructionen können auf Grund der im Vorhergegangenen allgemein für Flächen zweiten Grades entwickelten Polartheorie abgeleitet resp. festgestellt werden. In der Folge werden wir übrigens auch Gelegenheit finden, zu entwickeln und nachzuweisen, wie bei verschiedenen Constructionen, irgend welche windschiefe Flächen betreffend, Hyperboloide und Paraboloide als „Hilfsflächen" eine ebenso interessante als wichtige und bequeme Verwerthung und Verwendung finden können.[1])

Zweiter Abschnitt.

Die Nichtregelflächen zweiten Grades.

Einleitung.

§. 166.

Im Früheren[1]) entwickelten wir eine Reihe von Eigenschaften der Flächen zweiten Grades, welche einzig und allein aus der Definition, nach welcher eine solche Fläche mit einer Geraden zwei Punkte gemein hat, und aus bekannten Eigenschaften der Kegelschnitte gefolgert wurden. Es ist von selbst klar und auch ohne jedwede Bemerkung einleuchtend, dass auf demselben Wege noch eine Unzahl von Eigenschaften der Flächen zweiten Grades abgeleitet werden könnte.

Wir ziehen es jedoch diesfalls vor, zunächst die Existenz solcher Flächen nachzuweisen und dann das geeignetste Mittel für die graphische Behandlung, sowie für die weitere Entwickelung von Eigenschaften der vorgenannten Flächen aufzusuchen.

Im ersten Abschnitte schon wurden gewisse Flächen zweiten Grades behandelt, welche unendlich viele Geraden enthalten. Es waren dies die Kegelflächen zweiten Grades, sowie die windschiefen Flächen zweiten Grades, und wurden in letzterer Beziehung das einfache Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid hervorgehoben.

Ein großer Theil der entwickelten Eigenschaften für Flächen zweiten Grades im allgemeinen wurde selbständig für die vorerwähnten geradlinigen Flächen auf einem von der Polarentheorie unabhängigen Wege abgeleitet und festgestellt.

Es erübrigt nun, bevor wir uns in weitere hieher gehörende Betrachtungen einlassen, noch einige Worte über das Verhalten der windschiefen Flächen zweiten Grades gegen die unendlich ferne Ebene zu sprechen.

[1]) Peschka; Darstellende und projective Geometrie. II. Band.

Wir fanden, dass das windschiefe Hyperboloid einen Asymptotenkegel besitzt. Im Sinne der Polarentheorie ist diese Eigenschaft von folgendem Standpunkte aus aufzufassen.

Da das Hyperboloid von geraden Linien erzeugt werden kann und jeder Geraden ein reeller, unendlich ferner Punkt zukömmt, so muss das Hyperboloid von der unendlich fernen Ebene in einer reellen Curve und zwar, weil die besagte Fläche vom zweiten Grade ist, in einem Kegelschnitte getroffen werden.

Der der Fläche längs dieses Kegelschnittes umschriebene Kegel hat zum Scheitel den Pol der unendlich fernen Ebene, d. i. den Mittelpunkt der Fläche. Dieser Kegel selbst ist sodann aber kein anderer als der Asymptotenkegel der Fläche.

Was das hyperbolische Paraboloid anbelangt, so wurde gefunden, dass dasselbe keinen eigentlichen Mittelpunkt besitze.

Letzteres erklärt sich vom Standpunkte der Polarentheorie in folgender Weise.

Es wurde nachgewiesen, dass dem hyperbolischen Paraboloide zwei Richtebenen entsprechen, d. h. dass es in unendlicher Entfernung zwei bestimmte Geraden gebe, welche von allen Erzeugenden der Fläche geschnitten werden, und welche demgemäß der Fläche selbst angehören. Besagte Geraden schneiden sich in einem im Unendlichen liegenden Punkte, welcher, wie wir gesehen haben, den unendlich fernen Punkt der Achse des Paraboloides darstellt.

Es ist hiernach unschwer zu erkennen, dass die unendlich ferne Ebene, nachdem sie zwei sich schneidende Geraden der Fläche enthält, diese letztere in dem genannten Schnittpunkte berühren müsse. Dieser Berührungspunkt ist sodann gleichzeitig der Pol der unendlich fernen Ebene, d. h. der Mittelpunkt der Fläche.

Hieraus ergibt sich, dass das hyperbolische Paraboloid einen (uneigentlichen) Mittelpunkt in unendlicher Entfernung besitze. Demselben kommen viele Eigenschaften eines eigentlichen, im Endlichen liegenden Mittelpunktes zu. So gehen beispielsweise sämmtliche Durchmesser, d. i. die geometrischen Orte der Mittelpunkte paralleler Schnitte der Fläche, durch denselben hindurch u. s. w.

Wenden wir uns nach diesen allgemeinen Bemerkungen den Nichtregelflächen zweiten Grades zu.

Es wurde diesbezüglich nachgewiesen, dass jede Fläche zweiten Grades ein System von drei Hauptachsen besitze. Nebenbei sei schon hier erwähnt, dass es besondere Formen von Nichtregelflächen gibt, welche unendlich viele Hauptachsensysteme zulassen.

Über die Größe dieser Achsen wurde in dem Vorhergehenden keinerlei Bedingung aufgestellt. Wir können daher voraussetzen, dass:

a) alle Achsen ungleiche Längen besitzen. Diese Annahme wird sich offenbar nur auf den allgemeinsten Fall einer Fläche zweiten Grades beziehen.

b) Zwei von den Hauptachsen haben eine gleiche Länge, welche jedoch von der der dritten Achse verschieden ist. In letzterem Falle wird der in der Ebene der beiden gleichen Achsen liegende Hauptkegelschnitt der Fläche nothwendig ein Kreis sein. Infolge des Satzes 443*b*, Band II), werden dann aber auch alle Ebenen, welche zu dieser Hauptebene parallel, also zu der dritten Achse normal sind, die Fläche gleichfalls in Kreisen schneiden, deren Mittelpunkte sämmtlich auf der letztgenannten Achse liegen.

All' diese Kreise werden ferner auch die beiden anderen Hauptkegelschnitte, welche offenbar unter einander congruent sind, schneiden. Es ist diesfalls leicht einzusehen, dass eine solche Fläche, wie wir sie unter *b*) zusammenfassten, dann entstehen muss, wenn irgend ein Kegelschnitt um eine seiner Achsen gedreht wird. Jede derartige Fläche heißt eine „Rotations-, Revolutions- oder Umdrehungsfläche zweiten Grades".

Endlich kann man voraussetzen, dass

c) alle drei Hauptachsen einander gleich seien.

Unter Zutreffen dieser Annahme sind offenbar alle drei Hauptkegelschnitte gleich große Kreise.

Es tritt hier der besondere Fall ein, dass eine Rotationsfläche durch Umdrehung eines Kreises um einen seiner Durchmesser entsteht. Diese Fläche, mit welcher wir uns schon in der Elementargeometrie hinreichend bekannt machten, ist die „Kugelfläche".

Von dieser Fläche wollen wir ausgehen und alle anderen Flächen zweiten Grades aus derselben ableiten.

XII. Capitel.

Die Kugelfläche.

§. 167.

Als Grundlage für unsere ferneren Untersuchungen soll uns die Kugelfläche dienen, daher es gerechtfertigt erscheinen dürfte, wenn wir von der elementar-geometrischen Definition der Kugel ausgehend, die wichtigsten Eigenschaften dieser Fläche auch an dieser Stelle, so weit dieselben unsere Zwecke unterstützen und fördern helfen, nochmals anführen oder beziehungsweise ableiten.

117. *„Eine Kugelfläche ist der Ort aller Punkte im Raume, welche von einem und demselben festen Punkte den nämlichen Abstand besitzen."*

Der feste Punkt wird der „Mittelpunkt" oder das „Centrum" der Kugel und der constante Abstand der Kugelpunkte von demselben der „Halbmesser" oder „Radius" der Kugel genannt.

Jede Ebene, welche durch den Mittelpunkt der Kugel geht, schneidet die letztere in einer Curve, deren sämmtliche Punkte von dem Mittelpunkte den gleichen Abstand haben. Es kann daher unmittelbar der Satz aufgestellt werden:

118. *„Jede durch das Centrum einer Kugel gelegte Ebene schneidet dieselbe in einem Kreise, dessen Radius jenem der Kugel gleich ist."*

§. 168.

Denken wir uns eine Kugelfläche durch eine beliebige Gerade g geschnitten.

Um die Schnittpunkte zu ermitteln, führen wir durch die schneidende Gerade g und durch den Kugelmittelpunkt eine Ebene. Letztere schneidet die Kugel in einem Kreise. Die diesem Kreise und der Geraden g gemeinschaftlichen Punkte werden bereits die verlangten Schnittpunkte bestimmen.

Nachdem aber ein Kreis eine Curve zweiten Grades ist, d. h. mit jeder in seiner Ebene liegenden Geraden nur zwei Punkte (reell oder imaginär) gemein hat, so wird auch die Kugelfläche von jeder beliebigen Geraden nur in zwei (reellen oder imaginären) Punkten geschnitten werden. Die Kugelfläche ist somit eine Fläche zweiten Grades. Wir erhalten also den Fundamentalsatz:

119. *„Eine Kugelfläche wird von jeder Geraden im Raume nur in zwei (reellen oder imaginären) Punkten geschnitten; die Kugel ist somit eine Fläche zweiten Grades."*

Nachdem somit sichergestellt wurde, dass die Kugelfläche vom zweiten Grade ist, sind wir berechtigt, alle vorher für die Flächen zweiten Grades allgemein bewiesenen Eigenschaften auf die Kugel anzuwenden. Es erübrigt demnach bloß noch das „Besondere", was vermöge der Definition der Kugelfläche, als derselben eigenthümlich, hinzutritt, ergänzend anzureihen.

§. 169.

Denken wir uns eine Kugel durch eine beliebige Ebene e geschnitten. Die Schnittcurve heiße k. Legen wir durch den Mittelpunkt der Kugel eine zu der Ebene e parallele Ebene E, so wird (Satz 118) die Ebene E die Kugel in einem Kreise K schneiden. Aus Satz 443 *b*, Band II, folgt aber, dass die parallelen Schnitte K und k ähnlich sein müssen, dass also k gleichfalls ein Kreis sein müsse. Mit Rücksicht auf die ganz beliebige Lage der Ebene e folgt der Satz:

120. „Eine Kugelfläche wird von jeder beliebigen Ebene in einem Kreise geschnitten."

§. 170.

Denken wir uns weiters den Mittelpunkt o des Kreises k mit dem Mittelpunkte M der Kugel geradlinig verbunden, so erhalten wir den den beiden Ebenen E und e conjugierten Durchmesser.

Sind a_1, a_2, a_3, ... a_n beliebige Punkte des Kreises k, so ist $o a_1 = o a_2 = o a_3 = \ldots = o a_n = r$ gleich dem Radius r des Kreises k. Ferner ist aber auch $M a_1 = M a_2 = M a_3 = \ldots = M a_n = R$ gleich dem Radius R der Kugel. Es sind mithin die sämmtlichen Dreiecke $o M a_1$, $o M a_2$... $o M a_n$ unter einander congruent und infolge dessen alle ihre Winkel bei o gleich.

Dieser einfachen Betrachtung ist zu entnehmen, dass der durch o gehende Kugeldurchmesser $M o$ mit allen in der Ebene e des Kreises k durch dessen Fußpunkt o gezogenen Geraden $o a_1$, $o a_2$... $o a_n$ gleiche Winkel bildet, was offenbar nur dann möglich ist, wenn derselbe auf dieser Ebene senkrecht steht. Wir erhalten demgemäß den Satz:

121. „Der einer Durchmesserebene einer Kugel conjugierte Durchmesser steht auf der besagten Ebene senkrecht."

Oder:

122. „Die Mittelpunkte aller unter einander parallelen Kreisschnitte einer Kugel liegen auf jenem Durchmesser der Kugel, welcher zu den schneidenden Ebenen normal ist."

Da der Mittelpunkt o eines auf der Kugelfläche liegenden Kreises k, dem vorstehenden Satze 122) gemäß, der Fußpunkt des vom Kugelmittelpunkte M auf die Kreisebene gefällten Perpendikels ist und dieses letztere, der Länge nach, den Abstand der Kreisebene von dem Kugelmittelpunkte darstellt, so ergibt sich unmittelbar der Satz:

123. „Der Radius eines Kreises auf einer Kugel ist die Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Hypotenuse der Kugelradius ist und dessen zweite Kathete dem Abstande der schneidenden Ebene vom Kugelmittelpunkte gleich kömmt.“

§. 171.

Nachdem einerseits die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes stets größer als eine Kathete desselben ist, andererseits aber jeder Kreis der Kugel, dessen Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht, zum Radius jenen der Kugel selbst hat, so folgt, dass alle Kreise, deren Ebenen nicht durch das Centrum der Kugel gehen, kleiner sein müssen, als die Kreise, deren Mittelpunkte mit dem Kugelmittelpunkte coïncidieren. Es werden daher die in den Diametralebenen einer Kugel liegenden Kreise die „größten Kugelkreise“ oder — falls nicht etwa Missverständnisse dadurch herbeigeführt werden — kurz „Kugelkreise“ genannt.

Gleichzeitig sei auch bemerkt, dass man (obwohl ungerechtfertigt) die Endpunkte des zu einer Diametralebene senkrechten, ihr also conjugierten Durchmessers, häufig die „Pole“ des in dieser Ebene liegenden Kugelkreises zu nennen pflegt.

Zufolge der (im II. Bande) entwickelten allgemeinen Eigenschaften der Flächen zweiten Grades wissen wir, dass die Berührungsebene einer Fläche zweiten Grades in einem ihrer Punkte dem durch den Berührungspunkt gehenden Durchmesser conjugiert ist. Nachdem aber sämmtliche Ebenen, welche einem Kugeldurchmesser conjugiert sind, auf dem letzteren senkrecht stehen, so folgt der Satz:

124. „Die Berührungsebene einer Kugel steht stets senkrecht zu jenem Kugeldurchmesser, welcher durch den Berührungspunkt derselben geht.“

Oder:

125. „Jede Ebene, deren Abstand vom Kugelmittelpunkte dem Kugelradius gleich ist, berührt die Kugel.“

Dieser Satz kann auch in der nachstehenden Form ausgesprochen werden:

126. *„Alle Ebenen, welche von einem festen Punkte den nämlichen Abstand besitzen, umhüllen eine Kugelfläche, deren Radius diesem constanten Abstande gleich ist.“*

§. 172.

Da der einer beliebigen Durchmesserebene einer Kugel conjugierte Durchmesser auf dieser Ebene senkrecht steht, da ferner der Kegelschnitt in der Diametralebene ein Kreis ist und nachdem weiters für einen Kreis sämmtliche Paare conjugierter Durchmesser rechte Winkel bilden, so ist einleuchtend, dass jeder Kugeldurchmesser eine Achse der Kugel darstelle, die Kugel mithin unendlich viele Systeme von drei Hauptachsen besitzt. Dies gibt den Satz:

127. *„Drei beliebige, wechselseitig auf einander senkrecht stehende Durchmesser einer Kugel können stets als Hauptachsen derselben betrachtet werden; eine Kugel besitzt somit unendlich viele Systeme von Hauptachsen.“*

Ein aus der allgemeinen Theorie der Flächen zweiten Grades bekannter Satz auf die Kugelfläche übertragen, lautet folgendermaßen:

128. *„Die Halbierungspunkte paralleler Sehnen einer Kugel liegen auf derjenigen (Diametral-) Ebene, welche durch den Mittelpunkt der Kugel, senkrecht zu der Sehnenschar geführt wird.“*

Die Kugel wird mithin von jeder ihrer Durchmesserebenen in zwei orthogonal-symmetrische Theile getheilt.

§. 173.

Betrachten wir weiters den von einem Punkte außerhalb der Kugel derselben umschriebenen Kegel.

Die Berührungscurve dieses Kegels ist jener Kreis, in welchem die Polarebene des Kegelscheitels die Kugel schneidet. Nachdem aber die Polarebene dem durch den Scheitel gehenden Kugeldurchmesser conjugiert ist, so folgt, dass diese auf dem letzteren senkrecht steht, oder mit anderen Worten: die Berührungscurve einer Kugel mit dem ihr aus einem Punkte des Raumes umschriebenen Kegel ist ein Kreis, dessen Ebene auf der Verbindungsgeraden des Kegelscheitels mit dem Mittelpunkte der Kugel senkrecht steht und dessen Mittelpunkt auf dieser Geraden liegt.

Hieraus folgt, dass der einer Kugel umschriebene Kegel stets ein gerader Kreis- oder Rotationskegel ist, dessen Achse die Verbindungsgerade des Kegelscheitels mit dem Mittelpunkte der Kugel ist.

Dies ergibt sich übrigens ohne weiters auch direct, wenn man eine Kugel durch die Umdrehung eines Kreises um einen seiner Durchmesser, und den umschriebenen Kegel gleichzeitig durch Umdrehung eines beliebigen von einem Punkte dieses Durchmessers ausgehenden Tangentenpaares jenes Kreises entstanden denkt. Mithin der Satz:

129. „*Der einer Kugelfläche von einem beliebigen Punkte außerhalb umschriebene Kegel ist stets ein gerader Kreiskegel, dessen Achse die Verbindungsgerade des Kegelscheitels mit dem Mittelpunkte der Kugel ist. Besagter Kegel berührt selbstverständlich die Kugel in einem Kreise, dessen Ebene zu dieser Achse senkrecht steht.*“

§. 174.

Berücksichtigen wir die Eigenschaft des geraden Kreiskegels, dass jeder Punkt irgend eines seiner Kreisschnitte vom Scheitel desselben die nämliche Entfernung besitzt, so folgt, weil die Berührungscurve eines der Kugel umschriebenen Kegels ein solcher Kreisschnitt ist, sofort der Satz:

130. „*Die Längen der Tangenten, die von einem Punkte an eine Kugel gezogen werden können, sind, von diesem Punkte bis zu den betreffenden Berührungspunkten gerechnet, unter einander gleich.*“

§. 175.

Die Berührungscurve einer Fläche zweiten Grades mit einem derselben umschriebenen Cylinder ist der Durchschnitt der Fläche mit derjenigen Durchmesserebene, welche dem zu den Cylindererzeugenden parallelen Durchmesser conjugiert ist.

Die Berührungscurve eines Cylinders, welcher einer Kugel umschrieben ist, wird demgemäß (nach Satz 121) ein größter Kreis sein, dessen Ebene zu den Cylindererzeugenden senkrecht steht.

Hieraus folgt aber unmittelbar, dass dieser Cylinder selbst ein gerader Kreis- oder Rotationscylinder sei, dessen Achse durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Daher besteht der Satz:

131. „*Jeder einer Kugel umschriebene Cylinder ist ein gerader Kreiscylinder, welcher die Kugel in dem zu seinen Erzeugenden senkrecht stehenden größten Kugelkreise berührt und dessen Achse durch den Kugelmittelpunkt geht.*“

§. 176.

Durch eine Gerade außerhalb einer Kugel sind die möglichen Tangentialebenen an die letztere zu führen. Die Kugel sei S; die gegebene Gerade g.

Wenn der Kugel jener Rotationscylinder umschrieben wird, dessen Erzeugenden zu der gegebenen Geraden g parallel sind, so werden offenbar die durch g gehenden Berührebenen T_a und T_b des Cylinders gleichzeitig auch die gesuchten Ebenen für die Kugel sein.

Die Berührungspunkte derselben auf der Kugel seien A und B. Nachdem diese Punkte der Berührungscurve obigen Cylinders angehören, diese Curve aber den zu den Cylindererzeugenden, also auch zur Geraden g senkrechten größten Kugelkreis vorstellt, so ist einleuchtend, dass die Gerade g_1, welche die Berührungspunkte A und B verbindet, in jener Ebene (des genannten größten Kreises) liege, welche durch den Kugelmittelpunkt M senkrecht zu der Geraden g geführt wird.

Das Ergebnis dieser Betrachtung ist also, dass die beiden Geraden g und g_1, wovon die eine bekanntlich die Polare der anderen ist, zwei sich nicht schneidende, auf einander senkrecht stehende Geraden seien.

Setzen wir weiter voraus, die Ebene e der Berührungscurve treffe die Gerade g in dem Punkte p.

Dies angenommen, ist Mp die Senkrechte vom Kugelmittelpunkte auf die Gerade g. Besagte Gerade Mp liegt aber in der Ebene e, schneidet mithin auch die Gerade g_1 in einem Punkte p_1. Da ferner (nach Satz 130) die beiden Kugeltangenten pA und pB gleiche Längen haben, weiters $MA = MB$ gleich dem Kugelradius ist, sind die beiden Dreiecke MpA und MpB congruent; es muss daher die Gerade $g_1 = AB$ ebenfalls auf Mp senkrecht stehen, wobei g_1 gleichzeitig von der letzteren in dem Punkte p_1 halbiert wird. Demnach folgt der Satz:

132. „Sind zwei Geraden in Bezug auf eine Kugel conjugiert, d. h. ist die eine die Polare der anderen, so schließen sie miteinander einen rechten Winkel ein; die Gerade ihres kürzesten Abstandes geht durch den Mittelpunkt der Kugel und halbiert jene Sehne, welche die Kugel auf der einen von ihnen bestimmt.“

§. 177.

Auf Grund des Vorausgeschickten ist bekannt, dass von den vier Eckpunkten eines Polartetraeders einer Fläche zweiten Grades, stets einer derselben innerhalb der Fläche liegt, während die drei übrigen außerhalb der Fläche sich vorfinden.

Sehen wir nun nach, welche besondere Eigenschaften ein Polartetraeder einer Kugel besitzt.

Nehmen wir zu diesem Zwecke einen im Innern der Kugel S liegenden Punkt P_1 als die eine Ecke des Tetraeders an. Die drei

übrigen Ecken P_2, P_3 und P_4 des Polartetraeders liegen sodann außerhalb der Kugel, und zwar auf der Polarebene p_1 des Punktes P_1.

Jedem Polartetraeder einer Kugel kömmt eine leicht festzustellende besondere Eigenschaft zu.

Da nämlich jedes Polartetraeder einer Fläche zweiten Grades einerseits so beschaffen ist, dass je eine Ecke immer den Pol der durch die drei übrigen gebildeten, gegenüberliegenden Seitenfläche darstellt, und andererseits die Polarebene eines Punktes in Bezug auf eine Kugel stets auf der Verbindungsgeraden dieses Punktes mit dem Mittelpunkte der Kugel senkrecht steht, so folgt, dass die vier Höhen des Tetraeders $P_1 P_2 P_3 P_4$, d. i. die Senkrechten h_1, h_2, h_3 und h_4, welche von den Punkten P_1, P_2, P_3 und P_4, beziehungsweise auf die gegenüberliegenden Seitenflächen $P_2 P_3 P_4$, $P_3 P_4 P_1$, $P_4 P_1 P_2$ und $P_1 P_2 P_3$ geführt werden, sämmtlich durch den Mittelpunkt M der Kugel S gehen.

Hieraus ist zu ersehen, dass ein beliebiges Polartetraeder einer Kugel kein allgemeines sei, sondern von der Beschaffenheit ist, dass dessen vier Höhen sich in einem und demselben Punkte schneiden.

Da ferner die gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders conjugierte Polaren in Bezug auf die Kugel sind, so gehen (nach dem vorstehenden Satze 132) die drei Linien des kürzesten Abstandes der drei Paare von Gegenkanten ebenfalls durch den Mittelpunkt M der Kugel, und werden diese Kanten sowohl, als auch die Sehnen, welche die Kugel auf denselben bestimmt, halbieren. Es besteht daher der Satz:

133. „Kein Polartetraeder einer Kugel ist ein allgemeines Tetraeder, sondern ein solches, dessen vier Höhen durch einen und denselben Punkt, d. i. durch den Kugelmittelpunkt gehen. Ferner gehen durch den Kugelmittelpunkt auch die Linien der kürzesten Abstände der drei Paare gegenüberliegender Tetraederkanten."

§. 178.

Nach Satz 441, Band II) schneidet jede Ebene e, welche durch eine Kante, beispielsweise durch $P_1 P_2$, des Polartetraeders gelegt wird, dieses Tetraeder in einem Dreiecke $P_1 P_2 p_3$, und die Fläche nach einem Kegelschnitt K, für welchen dieses Dreieck ein Polardreieck darstellt.

Im Falle die vorgenannte Fläche eine Kugel ist, wird der besagte Kegelschnitt speciell ein Kreis K, und das Dreieck $P_1 P_2 p_3$ daher ein Polardreieck dieses Kreises sein. Nachdem aber einerseits der Höhenschnittpunkt eines Poldreieckes in Bezug auf einen Kreis, der Mittelpunkt des letzteren ist, und da sich andererseits

dieser Mittelpunkt als der Fußpunkt der Senkrechten aus dem Kugelmittelpunkte auf die Ebene *e* desselben ergibt, so folgt der Satz:

134. „Legt man durch eine Kante eines beliebigen Polartetraeders einer Kugel eine Ebene, so schneidet diese das Tetraeder in einem Dreiecke und die Kugel in einem Kreise; das Dreieck ist ein Polardreieck dieses Kreises. Der Höhenschnittpunkt des Polardreieckes fällt einerseits mit dem Mittelpunkte des Kreises, andererseits mit dem Fußpunkte des vom Mittelpunkte der Kugel auf die Dreiecksebene gefällten Perpendikels zusammen.“

§. 179.

Beziehen wir die vorstehende Betrachtung auf ein Tetraeder, dessen vier Höhen sich in einem und demselben Punkte schneiden, so gelangen wir zu nachstehendem Satze:

135. Ist ein Tetraeder so beschaffen, dass sich seine vier Höhen in einem und demselben Punkte schneiden, und legt man durch eine Kante dieses Tetraeders eine beliebige Ebene, welche dasselbe in einem Dreiecke schneidet, so ist der Höhenschnittpunkt dieses Dreieckes der Fußpunkt jenes Perpendikels, welches vom Höhenschnittpunkte des Tetraeders auf die schneidende Ebene gefällt wird.“

§. 180.

Lässt man die schneidende Ebene insbesondere mit einer Seitenebene des Tetraeders zusammenfallen, so fällt das Schnittdreieck mit dem in dieser Ebene liegenden Seitendreieck des Tetraeders zusammen, während das vom Höhenschnittpunkte des Tetraeders auf diese Ebene gefällte Perpendikel durch die gegenüberliegende Tetraederecke geht. Der vorstehende Satz liefert dann, als Specialfall, den bekannten Satz:

136. „Schneiden sich die Höhen eines Tetraeders in einem und demselben Punkte, so treffen sie auch die gegenüberliegenden Seitendreiecke in deren Höhenschnittpunkten.“

§. 181.

Zu äußerst interessanten und merkwürdigen Resultaten führt die Betrachtung jener Polartetraeder einer Kugel, deren eine Seitenebene die unendlich ferne Ebene ist.

Diesbezüglich wissen wir bereits, dass der dieser Seitenebene gegenüberliegende Eckpunkt des Polartetraeders, der Mittelpunkt der Kugel und die drei durch denselben gehenden Tetraederkanten con-

jugierte, also (im Falle der Kugel) zu einander wechselseitig rechtwinklige Durchmesser der Kugel sein müssen.

Sei S eine beliebige Kugel, seien ferner D_1, D_2 und D_3 drei beliebige conjugierte, also wechselseitig auf einander senkrecht stehende Durchmesser dieser Kugel, und U_1, U_2, U_3 die unendlich fernen Punkte derselben.

Die Kugel S schneidet nun die unendlich ferne Ebene in einem imaginären Kreise, für welchen wir ein- für allemal das Symbol K_i'' einführen wollen. Das durch die drei Punkte U_1, U_2 U_3 gebildete Dreieck ist ein Polardreieck in Bezug auf diesen Kreis K_i''.

Die unendlich fernen Punkte U'_1, U'_2 und U'_3 irgend dreier anderer zu einander rechtwinkliger Durchmesser D'_1, D'_2 und D'_3 der Kugel S bilden ebenfalls ein Polardreieck des Kreises K_i''.

Das Gleiche gilt überhaupt von den unendlich fernen Punkten eines jeden Systems rechtwinkliger Durchmesser der Kugel S.

Fassen wir je drei solche Punkte als Gruppe in einem unendlichen Systeme auf, oder mit anderen Worten, fassen wir sämmtliche Poldreiecke des Kreises K_i'' zusammen als das „Polarsystem" dieses Kreises auf, so können wir, wenn wir ein Polardreieck als Element dieses Systems bezeichnen, sagen:

Die Tripel rechtwinkliger Durchmesser der Kugel S bestimmen auf der unendlich fernen Ebene Elemente des Polarsystems von K_i''.

§. 182.

Stellen wir uns nun zwei beliebige Kugeln S_1 und S_2 im Raume vor, deren Mittelpunkte M_1 und M_2 seien.

Denken wir uns in einer der beiden Kugeln, etwa in S_1 drei beliebige zu einander senkrecht stehende Durchmesser D^1_1, D^1_2, D^1_3 gezogen, und zu denselben durch den Mittelpunkt M_2 der zweiten Kugel S_2 die Parallelen D^2_1, D^2_2, D^2_3 geführt, so stellen diese letzteren, da sie ebenfalls auf einander senkrecht stehen, ein Tripel conjugierter Durchmesser der zweiten Kugel S_2 dar.

Diese beiden Tripel haben aber, infolge der Parallelität, die nämlichen unendlich fernen Punkte U_1, U_2, U_3, d. h. die beiden den Kugeln S_1 und S_2 entsprechenden Kreise $K_i''^1$ und $K_i''^2$ haben das Polardreieck $U_1\,U_2\,U_3$ gemein. Dasselbe gilt aber offenbar auch von jedem anderen Poldreiecke $U_1\,U_2\,U_3$, da zu jedem Tripel rechtwinkliger Durchmesser der einen Kugel S_1 ein paralleles Tripel rechtwinkliger Durchmesser für die zweite Kugel existiert.

Hieraus ist zu ersehen, dass die beiden Kreise K_i^u alle Poldreiecke gemein haben, oder dass sie dasselbe Polarsystem besitzen.

Aus der Theorie der Kegelschnitte ist aber bekannt, dass zu einem Polarsysteme nur ein einziger Kegelschnitt gehört. Haben also zwei Kegelschnitte, wie im vorliegenden Falle die beiden Kreise K_i^u, das nämliche Polarsystem, so müssen sie nothwendig zusammenfallen. Als natürliche Folgerung ergibt sich somit, dass die beiden Kugeln S_1 und S_2 denselben Kreis K_i^u besitzen.

Denken wir uns nun aber die Kugel S_1 fest und K_i^u als den ihr entsprechenden imaginären Kreis, so muss jede zweite Kugel S_2, also überhaupt alle Kugeln des Raumes, durch denselben Kreis K_i^u gehen.

Es gilt mithin der Satz:

137. „Sämmtliche Kugeln des Raumes gehen durch einen und denselben imaginären Kreis in der unendlich fernen Ebene. Letzteren pflegt man den imaginären Kugelkreis zu nennen.“

§. 183.

Der vorstehende Satz ist ein Fundamentalsatz der gesammten Geometrie, wie ihn nicht leicht eine andere Wissenschaft aufzuweisen vermag.

Besagter Satz umfasst alle Eigenschaften der Raumgebilde, welche sich auf rechte Winkel beziehen, oder hieraus abgeleitet werden können; derselbe trennt ferner sämmtliche Eigenschaften der Raumgebilde in zwei große Abtheilungen, u. zw.:

a) in Eigenschaften, bei welchen Größen, mögen es Winkel oder Strecken sein, als solche vorkommen, und

b) in Eigenschaften, welche sich bloß auf Lagen der Raumgebilde an und für sich und gegen einander beziehen.

Man kann diese Eigenthümlichkeit, die wir jedoch an dieser Stelle mit den bisherigen Hilfsmitteln noch nicht zu beweisen vermögen, in folgender Satzform aussprechen:

138. „Hat irgend ein geometrischer Satz oder hat irgend welche geometrische Eigenschaft eine directe oder eine indirecte Beziehung zum imaginären Kugelkreise, so ist dieser Satz, resp. diese Eigenschaft metrisch; findet dagegen eine derartige Beziehung nicht statt, so ist derselbe resp. dieselbe projectivisch.“

§. 184.

Denken wir uns irgend eine Gerade g im Raume und eine beliebige zu dieser Geraden senkrechte Ebene E.

Den Durchstoßpunkt M der Geraden g mit der Ebene E nehmen wir als Mittelpunkt einer Kugel von ganz willkürlichem Radius an, so ist g (nach Satz 121) der der Diametralebene conjugierte Durchmesser.

Bezeichnet man den unendlich fernen Punkt von g mit U und die unendlich ferne Gerade von E mit u, so ist offenbar U der Pol der Geraden u in Bezug auf den imaginären Kugelkreis.

Es ist ersichtlich, dass dies von jeder beliebigen Geraden im Raume und einer zu ihr senkrechten Ebene gilt. Somit gilt der Satz:

139. Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so ist der unendlich ferne Punkt der Geraden der Pol der unendlich fernen Geraden der Ebene in Bezug auf den imaginären Kugelkreis."

§. 185.

Stellen wir uns weiters zwei beliebige, sich schneidende oder nicht schneidende Geraden g_1 und g_2 vor, welche aufeinander senkrecht stehen, und seien U_1 und U_2 die unendlich fernen Punkte dieser beiden Geraden.

Durch die Gerade g_1 kann man, unter Voraussetzung dieser Rechtwinkligkeit, immer eine zur Geraden g_2 senkrechte Ebene E_2, und durch die Gerade g_2 immer eine zur Geraden g_1 senkrechte Ebene E_1 führen.

Die unendlich fernen Geraden u_2 und u_1 dieser Ebenen E_2 und E_1 enthalten beziehungsweise die Punkte U_1 und U_2. Nachdem aber U_1, dem vorhergehenden Satze gemäß, der Pol von u_1 und U_2 der Pol von u_2 in Bezug auf den imaginären Kugelkreis ist, so sind die beiden Punkte U_1 und U_2, da der eine auf der Polare des anderen, und umgekehrt, liegt, conjugierte Punkte in Bezug auf den Kugelkreis. Mithin besteht der Satz:

140. „Die unendlich fernen Punkte zweier beliebigen sich schneidenden oder kreuzenden, aber aufeinander senkrecht stehenden Geraden sind conjugierte Punkte in Bezug auf den imaginären Kugelkreis."

§. 186.

Seien ferner E_1 und E_2 zwei beliebige aufeinander senkrecht stehende Ebenen, u_1 und u_2 ihre unendlich fernen Geraden.

In jeder der Ebenen E_1 und E_2 lässt sich eine Gerade g_2, beziehungsweise g_1 ziehen, welche auf der anderen senkrecht steht. Die unendlich fernen Punkte U_2 und U_1 dieser Geraden liegen in den diesbezüglichen unendlich fernen Linien u_1 und u_2.

Da nun u_1 die Polare von U_1 in Bezug auf den imaginären Kugelkreis ist, so sind die Geraden u_1 und u_2, indem jede von

ihnen durch den Pol der anderen geht, conjugierte Geraden oder conjugierte Polaren in Bezug auf den unendlich fernen Kugelkreis. Mithin der Satz:

141. „*Die unendlich fernen Geraden zweier beliebigen auf einander senkrecht stehenden Ebenen sind stets conjugierte Polaren in Bezug auf den imaginären Kugelkreis.*“

§. 187.

Häufig pflegt man auch kurz zwei aufeinander senkrecht stehende Geraden oder zwei aufeinander senkrecht stehende Ebenen, in Bezug auf den unendlich fernen imaginären Kugelkreis, conjugiert zu nennen.

Hierunter ist aber offenbar nichts anderes zu verstehen, als das, was in den beiden vorhergegangenen Sätzen 140) und 141) ausgesprochen wurde.

Diese beiden Sätze gestatten zahlreiche Anwendungen in der Theorie der algebraischen Curven und Flächen. Wir wollen an dieser Stelle nur ein einziges Beispiel geben.

Sei C_u die unendlich ferne Curve irgend einer windschiefen Fläche. Diese Fläche sei vom r-ten Range, die Curve C_u also von der r-ten Classe.

Irgend eine Tangente t_a^u dieser Curve ist bekanntlich die Trace der asymptotischen Ebene der durch ihren Berührungspunkt a^u gehenden Erzeugenden g_a auf der unendlich fernen Ebene.

Die Trace der durch diese Erzeugende g_a gehenden Centralebene sei τ_a^u. Dieselbe muss ebenfalls durch den unendlich fernen Punkt a_u von g_a gehen; außerdem müssen, da die Centralebene auf der asymptotischen Ebene senkrecht steht, die beiden unendlich fernen Geraden t_a^u und τ_a^u, conjugierte Polaren in Bezug auf den imaginären Kugelkreis sein.

Es ist somit einleuchtend, dass die Gerade τ_a^u die Curve C_u im allgemeinen im Punkte a_u nicht berühren wird. Diese Berührung kann nur dann statthaben, wenn der Centralpunkt, d. h. der Berührungspunkt der Centralebene einer Erzeugenden g_a selbst in unendliche Entfernung fällt. Denn in diesem Falle geht die Curve C_u durch den Centralpunkt und muss daher von der betreffenden Centralebene, mithin auch von ihrer Trace τ_a^u berührt werden.

Die Bedingung, dass der Centralpunkt a_u einer Erzeugenden in unendliche Entfernung falle, besteht daher darin, dass in diesem Punkte die beiden Geraden t_a^u und τ_a^u die Curve C_u berühren, oder mit anderen Worten, dass t_a^u und τ_a^u zusammenfallen.

Nun sind aber t_a^u und τ_a^u stets conjugierte Polaren in Bezug auf den imaginären Kreis, daher die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass sie zusammenfallen, darin besteht, dass die eine von ihnen (mithin natürlich auch die zweite) diesen Kreis berührt.

Hieraus folgt aber, dass die im Unendlichen liegenden Centralpunkte der Erzeugenden einer windschiefen Regelfläche, die Berührungspunkte der unendlich fernen Curve C_u mit den dieser Curve und dem imaginären Kugelkreis gemeinschaftlichen Tangenten sind.

Nachdem die Curve C_u von der r-ten Classe vorausgesetzt wurde, und ein Kreis (gleichgiltig ob er reell oder imaginär ist) von der zweiten Classe ist, so folgt, dass die Anzahl der gemeinschaftlichen Tangenten oder was dasselbe ist, die Zahl jener Centralpunkte gleich $2r$ sei.

Der geometrische Ort der Centralpunkte ist aber die Strictionslinie der Regelfläche.

Das gefundene Resultat drückt sonach nichts anderes aus, als dass die Strictionslinie einer Regelfläche r-ten Ranges mit der unendlich fernen Ebene, also auch mit jeder anderen Ebene, $2r$ Punkte gemein habe, d. h. dass sie eine Curve $2r$-ter Ordnung sei.

Es gilt daher der Satz:

142. „*Die Strictionslinie einer Regelfläche r-ten Ranges ist im allgemeinen eine Raumcurve 2r-ter Ordnung.*"

§. 188.

Wenden wir uns wieder der Kugel und ihren Eigenschaften zu.

Wir haben gefunden, dass alle Kugeln im Raume durch den nämlichen imaginären Kreis K_i^u in der unendlich fernen Ebene gehen.

Sind also zwei beliebige Kugeln im Raume gegeben, so repräsentiert dieser Kreis K_i^u einen Bestandtheil zweiter Ordnung ihres Gesammtschnittes, welcher von der vierten Ordnung ist. Der Rest des Schnittes kann daher wieder nur eine Curve zweiter Ordnung sein. Nun sind aber alle Curven zweiter Ordnung, welche auf einer Kugel liegen, wie nachgewiesen wurde, Kreise.

Hieraus folgt also, dass der im Endlichen gelegene Schnitt zweier Kugeln, einerlei ob reell oder imaginär, nur ein Kreis sein kann.

Bezeichnen wir diesen Schnittkreis mit K, seinen Mittelpunkt mit o, während die beiden Mittelpunkte der Kugeln M_1 und M_2 heißen mögen.

Da der Kreis K beiden Kugeln angehört, so muss sowohl die Gerade $M_1 m$, als auch die Gerade $M_2 m$ (Satz 121 u. 122) auf seiner Ebene senkrecht stehen, das heißt: M_1, M_2, m liegen auf einer und

derselben zur Ebene des Kreises senkrechten Geraden. Dies gibt den Satz:

143. „*Der im Endlichen gelegene (reelle oder imaginäre) Schnitt zweier Kugeln, ist stets ein Kreis, dessen Ebene senkrecht steht auf der Verbindungsgeraden der beiden Kugelmittelpunkte, und dessen Mittelpunkt auf dieser Verbindungsgeraden liegt.*"

§. 189.

Diesen Betrachtungen ist zu entnehmen, dass der Schnitt zweier Kugeln unter keiner Bedingung eine eigentliche Raumcurve vierter Ordnung sein könne, sondern stets in zwei ebene Curven, d. h. in zwei Kreise zerfällt, wovon der eine der unendlich ferne imaginäre Kreis ist.

Die beiden Schnittkreise treffen sich in zwei imaginären Punkten, in welchen sich (nach Satz 449, Band II) die beiden Kugeln berühren. Diese Bedingung ist aber (nach Satz 458, Band II) gleichzeitig auch die Bedingung dafür, dass sich den beiden Flächen zwei Kegel zweiten Grades gemeinschaftlich umschreiben lassen.

Hieraus fließt unmittelbar die nur Kugelflächen zukommende Eigenschaft, dass sich zwei beliebigen Kugelflächen im Raume stets zwei Kegel umschreiben lassen.

Sind S_1 und S_2 die beiden Kugeln, M_1 und M_2 ihre Mittelpunkte, sind ferner P_1 und P_2 die beiden Kegelscheitel, so besteht zwischen den vier Punkten M_1, M_2, P_1 und P_2 eine höchst einfache Beziehung.

Da nämlich (nach Satz 129) jeder einer Kugel umschriebene Kegel ein gerader Kreiskegel ist, dessen Achse durch den Kugelmittelpunkt geht, so werden die Achsen der den beiden Kugeln S_1 und S_2 umschriebenen Kegel sowohl durch M_1, als auch durch M_2 gehen, also mit der Verbindungsgeraden $M_1 M_2$ zusammenfallen müssen. Mit anderen Worten, die beiden Kegelscheitel P_1 und P_2 müssen auf der Verbindungsgeraden der Kugelmittelpunkte M_1 und M_2 liegen.

Denken wir uns weiters durch $M_1 M_2$ eine beliebige Ebene e gelegt, so werden die beiden Kugeln S_1 und S_2 von derselben in zwei größten Kreisen K_1 und K_2, und die beiden Kegel in je zwei Erzeugenden geschnitten, von welchen sich das eine Paar in dem Punkte P_1 schneidet und die äußeren Tangenten der beiden Kreise K_1 und K_2 darstellt, während das andere Paar die inneren Tangenten repräsentiert und sich in P_2 schneiden wird.

Aus der Planimetrie ist aber bekannt, dass die beiden Punkte P_1 und P_2 — die sogenannten Ähnlichkeitspunkte der beiden Kreise K_1 und K_2 — die Strecke $M_1 M_2$ in dem Verhältnisse der

beiden Kreisradien äußerlich und innerlich theilen, und mithin zu M_1, M_2 harmonisch liegen.

Wir erhalten somit für die beiden Kugeln den Satz:

144. „Zwei beliebigen Kugeln im Raume lassen sich stets zwei Kegel zweiten Grades gemeinschaftlich umschreiben; die beiden Kegelscheitel liegen auf der Verbindungsgeraden der Kugelmittelpunkte, theilen den Abstand derselben äußerlich und innerlich im Verhältnisse der beiden Kugelradien und liegen daher mit den Kugelmittelpunkten harmonisch.“

§. 190.

Die beiden Punkte P_1 und P_2, d. i. die Scheitel der den beiden Kugeln gemeinschaftlich umschriebenen Kegel werden auch die „Ähnlichkeitspunkte“ der beiden Kugeln genannt. Derjenige Punkt, welcher zwischen den beiden Kugelmittelpunkten liegt, heißt der „innere Ähnlichkeitspunkt“ und jener, welcher außerhalb der Strecke der Kugelmittelpunkte liegt, der „äußere Ähnlichkeitspunkt“ der beiden Kugeln. Auf die Eigenschaften dieser beiden Punkte werden wir noch gelegentlich zurückkommen.

§. 191.

Gegenwärtig wollen wir noch einige die Kugel betreffenden Sätze entwickeln, welche eine häufige graphische Verwendung finden.

Denken wir uns eine beliebige Kugel S mit dem Mittelpunkte M; ferner einen geraden Kreiskegel (Rotationskegel) Σ, dessen Achse Z durch den Mittelpunkt der Kugel geht. P sei der Scheitel des Kegels.

Vor allem wird es sich darum handeln, anzugeben, was für eine Curve der Schnitt dieser beiden Flächen sein werde.

Sei g eine beliebige Erzeugende des Kegels Σ; dieselbe treffe die Kugel S in den beiden Punkten a_1 und a_2. Führt man durch a_1 eine Ebene e_1 senkrecht zu der Achse Z des Kegels, so wird diese in einem Punkte m_1 getroffen und der Kegel Σ in einem Kreise K_1 geschnitten, welcher durch den Punkt a_1 geht und den Punkt m_1 zum Mittelpunkte hat.

Da weiters die Ebene e_1 senkreckt zu der Geraden Z steht, und letztere, der Voraussetzung gemäß, durch den Mittelpunkt M der Kugel S geht, so ist (nach Satz 122) der Punkt m_1 auch der Mittelpunkt jenes Kreises, in welchem die Kugel S von der Ebene e_1 geschnitten wird. Aber auch diesfalls ist der Punkt a ein der Kugel S und der Ebene e_1 gemeinschaftlicher Punkt; der genannte Schnittkreis kann daher kein anderer als der früher gefundene Kreis K_1

sein. Hieraus ist zu ersehen, dass die Kugel S mit dem Kegel Σ den Kreis K_1 gemein hat. Die gleiche Überlegung zeigt, dass auch der Kreis K_2, in welchem die durch a_2 senkrecht zu Z geführte Ebene die Kugel schneidet, gleichzeitig auch dem Kegel angehöre.

Die bezeichneten Kreise repräsentieren den vollständigen Schnitt der beiden Flächen. Denn, da die beiden Flächen vom zweiten Grade sind, ist ihr Schnitt eine Curve vierter Ordnung, welche durch die zwei vorgenannten Kreise vollständig dargestellt erscheint. Berücksichtigen wir endlich noch, dass die beiden Kreisebenen e_1 und e_2 zur Achse Z senkrecht stehen, also untereinander parallel sind, so gelangen wir zu folgendem Satze:

145. Geht die Achse eines geraden Kreiskegels oder Kreiscylinders durch den Mittelpunkt einer Kugel, so schneiden sich beide Flächen in zwei Kreisen, die in zwei zur genannten Achse senkrechten, also untereinander parallelen Ebenen liegen."

Dass der vorstehende Satz auch für einen geraden Kreiscylinder gilt, folgt unmittelbar aus der vorhergehenden Betrachtung, in welcher bezüglich der Lage des Kegelscheitels keine bestimmte Voraussetzung gemacht wurde. Mit Rücksickt auf den Cylinder sind selbstverständlich beide Kreise gleich groß, da sie parallele Schnitte desselben sind.

§. 192.

Ziehen wir in einer Kugel S, deren Mittelpunkt M sei, einen beliebigen Durchmesser D, dessen Endpunkte A und B sein mögen, und verbinden wir die letztgenannten Punkte mit einem ganz beliebigen dritten Punkte C auf der Kugel, so wird der Winkel bei C stets ein rechter Winkel sein.

Denn legen wir durch die drei Punkte A, B und C eine Ebene e, so schneidet diese die Kugel in einem größten Kreise K, welcher durch die Punkte A, B, C geht, und gleichzeitig die Gerade AB zum Durchmesser hat. Der Winkel ACB, den die Endpunkte dieses Durchmessers mit einem beliebigen Punkte C des Kreises K verbinden, ist aber bekanntlich ein rechter Winkel. Folglich besteht der Satz:

146. „Verbindet man einen beliebigen Punkt einer Kugel mit den Endpunkten irgend eines Kugeldurchmessers, so stehen diese Verbindungsgeraden stets senkrecht auf einander."

§. 193.

Sind umgekehrt zwei Punkte A und B im Raume gegeben, und soll der Ort jener Punkte im Raume gefunden werden, welche mit

A und B verbunden einen rechten Winkel ergeben, so ist leicht einzusehen, dass, mit Zugrundelegung des vorstehenden Satzes, dieser Ort eine Kugel sein müsse, welche die Strecke der beiden gegebenen Punkte zum Durchmesser hat. Mithin folgt der Satz:

147. „Der geometrische Ort aller Punkte im Raume, welche mit zwei gegebenen festen Punkten verbunden, rechte Winkel ergeben, oder mit anderen Worten: der Ort der Scheitel aller rechten Winkel im Raume, deren Schenkel durch zwei feste Punkte gehen, ist jene Kugel, welche die Strecke der beiden gegebenen Punkte zum Durchmesser hat.“

§. 194.

Denken wir uns eine Kugel S, und im Innern dieser Kugel einen Punkt a. Durch den Punkt a führen wir eine beliebige Gerade, welche die Kugel S in den beiden Punkten b und c schneiden möge.

Die Beziehung, welche zwischen den Abschnitten ab und ac stattfindet, ist festzustellen.

Ziehen wir zu diesem Zwecke noch eine zweite beliebige Gerade $b'c'$ durch a, welche die Kugel in den Punkten b' und c' schneiden möge. Legt man durch die beiden Geraden abc und $ab'c'$ eine Ebene e, so schneidet diese die Kugel S in einem Kreise K, welcher durch die vier Punkte b, c, b' und c' geht. Wie aus der Planimetrie bekannt, gilt diesfalls nachstehende Beziehung:

$$ab.ac = ab'.ac'.$$

Nimmt man die Gerade abc als fest an, und lässt man die Gerade $ab'c'$ alle möglichen Lagen im Raume durchlaufen, so wird diese in jeder solchen Lage die Kugel in zwei Punkten b' und c' derart treffen, dass stets das Product $ab'.ac'$ dem ursprünglichen Producte $ab.ac$ gleich sein wird, woraus folgt, dass das Product $ab.ac$ überhaupt für alle Lagen des durch a gehenden Strahles constant, und nur von der Lage des Punktes a abhängig ist.

Denken wir uns nun insbesondere den Punkt a mit dem Kugelmittelpunkte M verbunden, und durch a auf die Gerade Ma eine senkrechte Ebene ε gelegt, so schneidet diese die Kugel in einem Kreise K_1, welcher den Punkt a zum Mittelpunkte hat. Ist r der Radius des Kreises, und zieht man durch a in der Ebene ε eine beliebige Gerade, so trifft dieselbe den Kreis K_1, also auch die Kugel S in zwei Punkten β und γ, wobei $a\beta = a\gamma = r$ ist. Es besteht daher die Beziehung

$$ab.ac = r^2.$$

Dieses Ergebnis liefert sofort den nachstehenden Satz:

148. „Zieht man durch einen Punkt im Innern einer Kugel eine beliebige Sehne, so wird diese durch den Punkt in zwei Theile zerlegt, deren Product constant und zwar gleich dem Quadrate des Radius jenes Kreises auf der Kugel ist, welcher den gegebenen Punkt zum Mittelpunkte hat. Der letztgenannte Kreis ist derjenige, dessen Ebene durch den obbesagten Punkt geht und auf der Verbindungsgeraden desselben mit dem Kugelmittelpunkte senkrecht steht.“

§. 195.

Nehmen wir einen Punkt a außerhalb einer Kugel S an, und ziehen wir durch denselben zwei beliebige Gerade, wovon die eine die Kugel in den Punkten b und c, die andere aber in den beiden Punkten b' und c' trifft.

Legt man so wie im vorhergehenden Falle durch diese beiden Geraden eine Ebene e, so schneidet diese die Kugel S in einem Kreise K, welcher durch die vier Punkte b, c, b', c' geht, und es besteht die aus der Elementar-Geometrie bekannte Beziehung

$$ab \,.\, ac = ab' . ac'.$$

Betrachten wir wieder den Strahl abc als fest, und ertheilen wir dem Strahle $ab'c'$ alle möglichen Lagen, so wird derselbe in jeder Lage die Kugel in zwei Punkten b' und c' treffen, für welche die obige Beziehung besteht. Das Product $ab \,.\, ac$ wird somit für alle durch a gehenden Geraden constant und nur von der Lage des Punktes a gegen die Kugel abhängig sein.

Denken wir uns ferner vom Punkte a aus an den Kreis K die Tangente t gelegt, deren Berührungspunkt s sei, so ist, wie aus der Planimetrie bekannt,

$$ab \,.\, ac = ab' \,.\, ac' = \overline{as}^2$$

Andererseits ist aber as auch eine Tangente der Kugel und s deren Berührungspunkt. Da alle von dem Punkte a an die Kugel gezogenen Tangenten dieselbe Länge as besitzen, so folgt der Satz:

149. Zieht man durch einen beliebigen, außerhalb einer Kugel liegenden Punkt eine Secante, welche die Kugel in zwei Punkten trifft, so ist das Product der Abstände dieser beiden Punkte von dem festen Punkte constant, d. h. unabhängig von der Lage der Secanten, und zwar gleich dem Quadrate der Länge der von dem festen Punkte aus an die Kugel gezogenen Tangenten.“

Dieses constante Product wird, gleichviel ob der feste Punkt außerhalb oder innerhalb der Kugel liegt, die „Potenz des Punktes in Bezug auf die gegebene Kugel“ genannt.

Für einen Punkt auf der Kugel ist offenbar die Potenz gleich Null und für den Mittelpunkt der Kugel gleich dem Quadrate des Kugelradius.

§. 196.

Seien nun zwei Kugeln S_1 und S_2 gegeben. Es ist zu untersuchen, ob es im Raume Punkte gebe, deren Potenzen in Bezug auf beide Kugeln einander gleich sind.

Setzen wir voraus, wir hätten einen derartigen Punkt P gefunden und liege derselbe zunächst außerhalb der beiden Kugeln.

Denken wir uns von dem Punkte P aus, als Scheitel, beiden Kugeln S_1 und S_2 die Kegel Σ_1 und Σ_2 umschrieben, und seien beziehungsweise K_1 und K_2 die Berührungskreise dieser Kegel.

Ist der Punkt P wirklich ein „Potenzpunkt" beider Kugeln, d. h. besitzt derselbe die gleiche Potenz in Bezug auf beide Kugeln, so müssen die Erzeugenden beider Kegel Σ_1 und Σ_2, vom Scheitel bis zu den Berührungskreisen K_1, resp. K_2 gerechnet, gleiche Länge besitzen.

Wird dieser Bedingung Rechnung getragen, so kann man die beiden Kreise K_1 und K_2 als zwei solche Kreise auffassen, welche auf einer und derselben Kugel S_p liegen, deren Mittelpunkt der Potenzpunkt P und deren Radius die Potenz dieses Punktes in Bezug auf die beiden Kugeln, also die Länge der Kegelerzeugenden (P, K_1) und (P, K_2) ist.

Diese beiden Kreise K_1 und K_2 müssen sich daher in zwei Punkten a und b schneiden (welche imaginär werden, sobald sich die gegebenen zwei Kugeln nicht reell schneiden). Die beiden Punkte a und b gehören sodann aber auch den beiden Kugeln S_1 und S_2, also dem Schnittkreise K derselben an.

Außerdem sind aber die Geraden Pa und Pb, als Erzeugende der beiden Kegel Σ_1 und Σ_2, sowohl Tangenten der Kugel S_1, als auch Tangenten der Kugel S_2, müssen daher nothwendig auch Tangenten des Schnittkreises K beider Kugeln sein.

Dieselben sind mithin zwei Geraden der Ebene e dieses Schnittkreises K; es muss also auch der Punkt P, als Schnitt dieser beiden Geraden, in der Ebene e liegen.

Aus dieser einfachen Betrachtung ist zu ersehen, dass, wenn ein Punkt im Raume ein „Potenzpunkt" für zwei Kugeln sein soll, d. h. wenn die Potenzen desselben in Bezug auf diese Kugeln einander gleich sein sollen, der besagte Punkt nothwendig in der Ebene des den beiden Kugeln gemeinschaftlichen Kreises liegen muss.

§. 197.

Es ist leicht nachzuweisen, dass umgekehrt jeder einzelne Punkt in der Ebene des Schnittkreises K beider Kugeln S_1 und S_2 ein Potenzpunkt beider Kugeln ist.

Denn ist P ein beliebiger Punkt in dieser Ebene und liegt derselbe außerhalb der beiden Kugeln, so lassen sich von demselben aus zwei Tangenten t_1 und t_2 an den Schnittkreis K legen. Diese Tangenten sind aber gleichzeitig auch Tangenten der beiden Kugeln S_1 und S_2 und die Länge derselben vom Punkte P bis zu deren Berührungspunkten ist die Quadratwurzel der Potenz für beide Kugeln.

Liegt der Punkt P der Ebene e innerhalb der Kugeln S_1 und S_2, so liegt er auch innerhalb des Kreises K, den beide Kugeln gemein haben.

Zieht man sodann durch denselben in der Kreisebene eine beliebige Gerade, welche den Kreis K, also auch die beiden Kugeln S_1 und S_2 in den Punkten a und b schneidet, so ist $(Pa \,.\, Pb)$ die Potenz des Punktes, sowohl in Bezug auf die Kugel S_1, als auch in Bezug auf die Kugel S_2. Es folgt daher der Satz:

150. „Der Ort aller Potenzpunkte zweier Kugeln, d. i. jener Punkte, welche in Bezug auf beide Kugeln gleiche Potenzen besitzen, ist die Ebene jenes Kreises, in welchem sich die beiden Kugeln schneiden.“

Diese Ebene wird daher auch die „Potenzebene“ der beiden Kugeln genannt. Jede in dieser Ebene liegende Gerade heißt eine „Potenzgerade“ und jeder in ihr liegende Punkt ein „Potenzpunkt“ der beiden Kugeln.

§. 198.

Da die Tangenten, die man von einem Potenzpunkte P aus an die beiden Kugeln ziehen kann, von diesem Punkte bis zu den betreffenden Berührpunkten gleiche Länge haben, so folgt, dass die beiden Berührungskreise der von einem Potenzpunkte aus den beiden Kugeln umschriebenen Kegel auf einer und derselben Kugel S_0 liegen. Diese Kugel S_0 hat zum Mittelpunkte den genannten Potenzpunkt P. Besagte Kugel besitzt eine eigenthümliche, unschwer festzustellende Eigenschaft.

Sei nämlich a_1 ein Punkt des Berührungskreises K_1 jenes Kegels Σ_1, welcher der Kugel S_1 aus dem Punkte P umschrieben ist. Vorbezeichneter Punkt ist sonach auch ein Punkt der Kugel S_0.

Nennen wir T_1 die Tangentialebene der Kugel S_1 in dem Punkte a_1 und T_0 die Tangentialebene der Kugel S_0 in dem nämlichen Punkte a_1.

Diese Tangentialebenen stehen senkrecht auf den zugehörigen Kugelradien $M_1 a_1$ und Pa_1. Nachdem aber Pa_1 als Tangente der Kugel S_1 im Punkte a_1 auf $M_1 a_1$ senkrecht steht, so müssen die beiden Tangentialebenen T_1 und T'_0 ebenfalls auf einander senkrecht stehen. Letzteres gilt selbstverständlich für alle Punkte a_1 des Kreises K_1 und ebenso für alle Punkte des Kreises K_2.

Nun ist an und für sich klar, dass wenn die Tangentialebenen zweier Flächen in einem Punkte des gegenseitigen Schnittes der Flächen auf einander senkrecht stehen, diese beiden Flächen sich in diesem Punkte rechtwinklig oder „orthogonal" durchschneiden. Findet dasselbe in allen Punkten des Schnittes statt, so sagt man beide Flächen sind zu einander „orthogonal" oder die eine Fläche sei eine „Orthogonalfläche der anderen".

Verwendet man diese Ausdrucksweise, so kann das Resultat der vorhergehenden Betrachtung durch folgenden Satz ausgesprochen werden:

151. „Die Berührungskreise zweier beliebigen Kugelflächen mit den beiden ihnen aus irgend einem Potenzpunkte umschriebenen Kegeln liegen auf einer Kugel, welche diesen Potenzpunkt zum Mittelpunkte hat und zu den beiden Kugeln orthogonal ist. Der Radius dieser Kugel ist die Wurzel der entsprechenden Potenz."

§. 199.

Stellen wir uns zwei Kugeln S_1 und S_2 vor, welche zwar keinen reellen Schnitt liefern, denen aber gemeinschaftliche Tangenten entsprechen, also kurz zwei Kugeln, welche außer einander liegen.

Sei t eine beliebige gemeinschaftliche Tangente beider Kugeln, a_1 und a_2 seien deren Berührungspunkte. Halbieren wir die Strecke $a_1 a_2$ im Punkte P, so wird dieser offenbar ein Potenzpunkt der beiden Kugeln sein, da die Längen Pa_1 und Pa_2 der von demselben an die beiden Kugeln gezogenen Tangenten einander gleich sein müssen.

Hieraus folgt unmittelbar, dass der Punkt P in der Potenzebene beider Kugeln liege, und demgemäß besteht der Satz:

152. „Die Halbierungspunkte jener Strecken aller gemeinschaftlichen Tangenten zweier beliebigen Kugeln, welche von den entsprechenden Berührungspunkten begrenzt werden, liegen in der Potenzebene dieser beiden Kugeln."

Bevor wir in unseren Betrachtungen weiter vorgehen, sei noch ein Satz hervorgehoben, der übrigens nicht erst eines besonderen Beweises bedarf. Derselbe lautet:

153 a). „Die Potenz eines Punktes in Bezug auf eine Kugel ist jederzeit gleich der Potenz desselben Punktes in Bezug auf jeden Kugelschnitt, welcher durch eine Ebene, die diesen Punkt enthält, erzeugt wird.“

Oder:

153 b). „Die Potenz eines Punktes in Bezug auf eine Kugel ist gleich der Potenz in Bezug auf alle Kreise, in welchen die Kugel von Ebenen geschnitten wird, die durch diesen Punkt gehen.

§. 200.

Wenn zwei Kugeln sich in einem Punkt a berühren, so ist die zugehörige Potenzebene die gemeinschaftliche Berührungsebene in diesem Punkte a.

Denn, die Tangenten, welche man von einem beliebigen Punkte P dieser Ebene aus an beide Kugeln ziehen kann, haben sämmtlich die nämliche Länge Pa.

Schneiden sich die beiden Kugeln nicht, sind aber gemeinschaftliche Tangenten an dieselben möglich, das heißt, liegt die eine Kugel nicht innerhalb der anderen, so ist die Potenzebene dennoch immer reell.

Denn nach Satz 152) liegen in der letzteren die Potenzpunkte, welche durch die Halbierungspunkte gemeinschaftlicher Tangenten beider Kugeln repräsentirt werden. Da weiters die Potenzebene gleichzeitig die Ebene jenes Kreises ist, in welchem sich die beiden Kugeln schneiden, so folgt, dass, wenn sich zwei Kugeln auch nicht in einem reellen Kreise schneiden, die Ebene dieses Kreises doch stets reell sei.

Dies gilt, wie man sich leicht die Ueberzeugung verschaffen kann, auch dann, wenn die eine Kugel von der anderen vollkommen umschlossen ist, d. i. wenn keine gemeinschaftlichen Tangenten und keine gemeinschaftlichen Punkte der beiden Kugeln reell sind.

Denken wir uns weiters drei beliebige Kugeln S_1, S_2 und S_3. Die Potenzebene von S_1 und S_2 sei p_{12}, jene von S_2 und S_3 sei p_{23} und die von S_3 und S_1 sei p_{31}.

Die beiden Potenzebenen p_{12} und p_{23} werden sich in einer Geraden π schneiden. Jeder Punkt P in dieser Geraden π hat sowohl dieselbe Potenz in Bezug auf die beiden Kugeln S_1 und S_2, als auch in Bezug auf die beiden Kugeln S_2 und S_3.

Hieraus folgt aber unmittelbar, dass der besagte Punkt auch die nämliche Potenz in Bezug auf die beiden Kugeln S_3 und S_1 besitzen müsse, dass also jeder Punkt P von π, auch ein Potenzpunkt der beiden Kugeln S_3 und S_1 sei.

Bezeichnete Gerade π muss daher nothwendig in der Potenzebene p_{31} liegen, oder mit anderen Worten: die drei Potenzebenen dreier Kugeln schneiden sich in einer und derselben Geraden.

Hiernach besteht der Satz:

154. „Die drei Potenzebenen, welche drei Kugeln paarweise bestimmen, schneiden sich in einer und derselben Geraden."

Diese Gerade wird die „Potenzgerade" der drei Kugeln, und jeder Punkt derselben ein „Potenzpunkt" der drei Kugeln genannt.

Aus dem Satze 151) ergibt sich nunmehr auch unmittelbar der folgende:

155. „Die Berührungskreise der drei Kegel, welche drei beliebigen Kugeln aus einem Punkte ihrer Potenzgeraden umschrieben werden, liegen auf einer und derselben Kugel, welche jenen Punkt zum Mittelpunkte hat, und die drei gegebenen Kugeln orthogonal schneidet. Das Quadrat ihres Radius ist der Potenz jenes Punktes gleich."

§. 201.

Die in Satz 154) ausgesprochene Grundeigenschaft der Potenzgeraden, oder der Potenzachse dreier Kugeln erlaubt es, die Potenzebene zweier beliebigen, sich nicht reell schneidenden Kugeln zu construieren, also die Existenz dieser „reellen" Potenzebenen nachzuweisen.

Seien nämlich S_1 und S_2 zwei beliebige Kugeln, welche entweder in einander oder außerhalb einander liegen mögen.

Denken wir uns nun, was offenbar immer möglich ist, eine dritte Kugel S_3 construiert, welche die beiden Kugeln S_1 und S_2 in reellen Kreisen K_1 und K_2 schneidet. Die Ebenen e_1 und e_2 dieser Kreise schneiden sich in der Potenzachse Π der drei Kugeln S_1, S_2 und S_3, also in einer Geraden, welche auch in der gesuchten Potenzebene der beiden Kugeln S_1 und S_2 liegt.

Denkt man sich weiters der Kugel S_3 alle möglichen Lagen ertheilt, so wird die Gerade Π die gesuchte Potenzebene erzeugen.

Behufs Construction der Potenzebene genügt jedoch die eine Gerade Π vollkommen, da besagte Ebene durch Π geht, und auf der „Centralen" der beiden Kugeln S_1 und S_2, d. h. auf der Verbindungsgeraden der beiden Kugelmittelpunkte senkrecht steht. Letzteres setzt

natürlich voraus, dass die Potenzachse Π selbst zu der „Centralen" (welche sie jedoch nicht nothwendig zu schneiden braucht) normal sei. Dass dies thatsächlich der Fall sei, werden wir an späterer Stelle nachweisen.

§. 202.

Die Potenzachse dreier Kugeln enthält die Punkte, in welchen sich die drei Kugeln schneiden.

Dies folgt einerseits daraus, dass die Potenz eines jeden Punktes auf der Kugel gleich Null sei, und somit die gemeinschaftlichen Punkte der drei Kugeln in Bezug auf jede derselben den Wert Null besitzen, also untereinander gleiche Potenzen haben, und andererseits daraus, dass die Potenzachse die Schnittgerade der Ebenen zweier Kreise auf einer Kugel ist, welche nebstbei zwei anderen Kugeln angehören.

In dem Falle, als die Mittelpunkte der drei Kugeln auf einer und derselben Geraden g liegen, sind die drei Potenzebenen, da sie auf dieser Geraden senkrecht stehen, untereinander parallel; die Potenzachse liegt demgemäß in unendlicher Entfernung.

§. 203.

Es seien vier beliebige Kugeln S_1, S_2, S_3 und S_4 im Raume gegeben.

Denken wir uns vorerst die Potenzachse Π_{123} der drei Kugeln S_1, S_2 und S_3 wie im vorhergegangenen Falle ermittelt und außerdem noch die Potenzebene p_{34} der Kugeln S_3 und S_4 bestimmt. Diese Potenzebene möge die Potenzachse Π_{123} in dem Punkte P treffen.

Der Punkt P hat nun einerseits, da er auf der Potenzachse Π_{123} liegt, in Bezug auf die drei Kugeln S_1, S_2, S_3 die gleiche Potenz und andererseits, da er in der Potenzebene p_{34} liegt, auch eine gleiche Potenz in Bezug auf die Kugeln S_3 und S_4, mithin die gleiche Potenz in Bezug auf alle vier Kugeln.

Hieraus folgt, dass der Punkt P in den sechs Potenzebenen p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24} und p_{34} der Kugelpaare S_1, S_2; S_1, S_3; S_1, S_4; S_2, S_3; S_2, S_4; S_3, S_4 und ebenso in den vier Potenzachsen Π_{123}, Π_{124}, Π_{134}, Π_{234}, welche je drei dieser Kugeln — S_1, S_2, S_3; S_1, S_2, S_4; S_1, S_3, S_4; $S_2 S_3 S_4$ bestimmen, liegen müsse.

Wir erhalten daher den Satz:

156. „Sämmtliche sechs Potenzebenen, welche beliebige vier Kugeln paarweise bestimmen, und sämmtliche vier Potenzachsen, welche sie zu je dreien bestimmen, schneiden sich in einem und demselben

Punkte, welcher die gleiche Potenz in Bezug auf die vier Kugeln besitzt.“

Dieser Punkt wird der „Potenzpunkt“ der vier Kugeln genannt. Durch Combination der Sätze 156) und 155) ergibt sich unmittelbar der Satz:

157. „Die Berührungskreise von vier beliebigen Kugeln mit den denselben aus ihrem Potenzpunkte umschriebenen vier Kegeln liegen auf einer und derselben Kugel, welche diesen Potenzpunkt zum Mittelpunkte hat, und die vier gegebenen Kugeln orthogonal in jenen vier Kreisen durchschneidet. Das Quadrat des Radius dieser Kugel ist gleich der gemeinschaftlichen Potenz der vier gegebenen Kugeln.“

§. 204.

Liegen die Mittelpunkte der vier Kugeln in einer und derselben Ebene, so stehen die sechs Potenzebenen, welche den Kugeln, paarweise genommen, entsprechen, sämmtlich auf dieser Ebene senkrecht; schneiden sich daher in einem unendlich fernen Punkte und zwar in dem unendlich fernen Punkte der zu dieser Ebene senkrechten Geraden. Der Potenzpunkt der vier Kugeln liegt also diesfalls in unendlicher Entfernung. Die im früheren Satze genannte Orthogonalkugel übergeht sodann selbstverständlich in die Ebene der vier Kugelmittelpunkte.

§. 205.

Die Potenzachse dreier Kugeln ist, als Schnittgerade der drei Potenzebenen, welche auf den drei Centralen dieser Kugeln senkrecht stehen, selbst senkrecht zu jener Ebene, welche durch die drei Kugelmittelpunkte bestimmt ist.

Die eben aufgestellte Behauptung ist übrigens nur eine natürliche Folge der Symmetrie, welche die Kugeln in Bezug auf die besagte Ebene aufweisen. Diese Überlegung führt direct zu dem Satze:

158. „Fällt man von dem Potenzpunkte vierer Kugeln Senkrechte auf die Seiten jenes Tetraeders, welches von den Mittelpunkten der vier Kugeln bestimmt wird, so sind diese Normalen die vier möglichen Potenzachsen von je dreien der vier Kugeln.“

§. 206.

Um zu drei beliebigen, sich nicht reell schneidenden Kugeln die Potenzachse zu bestimmen, wird man eine vierte, sogenannte „Hilfskugel“ in Anwendung bringen, welcher man stets

eine derartige Lage und Größe ertheilen kann, dass sie die gegebenen drei Kugeln in reellen Kreisen schneidet.

Die drei Kreisebenen treffen sich sodann (nach Satz 156) in einem Punkte, welcher kein anderer als der Potenzpunkt der vier Kugeln selbst ist.

Fällt man mithin von diesem Punkte eine Normale auf die Ebene, welche durch die Mittelpunkte der drei gegebenen Kugeln bestimmt wird, so wird durch diese, der früheren Betrachtung gemäß, die gesuchte Potenzachse dargestellt.

§. 207.

Denkt man sich den Radius einer Kugel ohne Ende abnehmend, bis er endlich verschwindend klein oder gleich Null wird, so erhält man eine unendlich kleine Kugel, oder eine Kugel, welche sich auf einen Punkt reduciert. Eine solche Kugel pflegt man eine „Punktkugel" zu nennen.

Diese Punktkugel kann, in der Theorie der Potenzen in Bezug auf Kugeln, ohneweiters mit berücksichtigt werden.

Unter der Potenz eines Punktes in Bezug auf eine Punktkugel wird man in diesem Falle nichts anderes zu verstehen haben, als den Abstand dieses Punktes von dem die Punktkugel vertretenden Punkte.

Die vorher bezüglich der Kugel im allgemeinen entwickelten Sätze erleiden diesfalls geringfügige Abänderungen, die wir hier unmittelbar in Satzform zum Ausdrucke bringen wollen.

159. „Die Potenzebene zweier Punktkugeln ist jene Ebene, welche auf der Verbindungsgeraden der beiden, diese Kugeln vertretenden Punkte senkrecht steht und deren Abstand halbiert."

160. „Die Potenzachse dreier Punktkugeln ist diejenige Gerade, welche im Mittelpunkte des Umkreises des von den drei Punktkugeln gebildeten Dreieckes auf die Ebene des letzteren senkrecht gezogen wird."

161. „Der Potenzpunkt von vier Punktkugeln ist das Centrum der Kugel, welche jenem Tetraeder umschrieben ist, dessen Ecken die die Punktkugeln vertretenden Punkte sind."

162. „Die Kugel, welche aus einem Punkte der Potenzebene einer Punktkugel und einer gewöhnlichen Kugel durch die Punktkugel gelegt wird, schneidet die gewöhnliche Kugel orthogonal."

163. „Die Kugel, welche aus dem Potenzpunkte einer Punktkugel und dreier gewöhnlichen Kugeln, als Centrum, durch die Punktkugel gelegt wird, schneidet die drei Kugeln orthogonal."

Derartige Sätze können nunmehr in langer Reihenfolge aus den vorausgeschickten allgemein aufgestellten und entwickelten Sätzen, je nachdem man gewöhnliche Kugeln und Punktkugeln in beliebiger Weise combiniert, abgeleitet werden[2]).

XIII. Capitel.

Das Kugelgebüsch.

§. 208.

Die Gesammtheit aller jener Kugeln im Raume, welchen in einem gegebenen festen Punkte P die nämliche Potenz k^2 zukömmt, nennt man ein „Kugelgebüsch".

Der feste Punkt P heißt das Centrum oder auch der Pol des Gebüsches und der Wert k^2 die Potenz des Kugelgebüsches.

Dem Gebüsche gehören, außer den Kugeln selbst, auch noch deren gemeinsame Elemente, also die Kreise, in welchen sich je zwei Kugeln schneiden, und die Punktepaare an, welche je drei Kugeln gemeinschaftlich sind. Denn nach Satz 156) gehen die Ebenen dieser Kreise, sowie die Verbindungsgeraden dieser Punktepaare durch das Centrum P und haben selbstverständlich für dieses Centrum ebenfalls die Potenz k^2.

Einige Eigenschaften des Kugelgebüsches sind nach diesen Auseinandersetzungen unmittelbar einleuchtend; so ist unter anderem sofort evident, dass jede Kugel, welche durch den Schnittkreis zweier Kugeln des Gebüsches führt, sowie auch jede Kugel, welche durch das gemeinschaftliche Punktepaar dreier Kugeln des Gebüsches geht, gleichfalls dem Gebüsche angehören muss.

§. 209.

Ist das Centrum des Gebüsches und die Potenz desselben gegeben, so ist offenbar das Kugelgebüsch vollkommen bestimmt.

Denn jede Kugel, jeder Kreis und jedes Punktepaar, in Bezug auf welches das gegebene Centrum die gegebene Potenz besitzt, gehört dem Gebüsche an, während jedes andere Element, welches dieser Bedingung nicht genügt, dem Gebüsche ferne steht.

Aus dieser fundamentalen Bestimmungsart des Gebüsches ergeben sich sehr leicht weitere Bestimmungsweisen.

Ist beispielsweise das Centrum C des Gebüsches gegeben und ein Element desselben, also entweder eine Kugel, oder ein Kreis in einer durch C gehenden Ebene, oder ein Punktepaar auf einer durch C gehenden Geraden festgestellt, so ist dadurch offenbar auch die Potenz des Gebüsches bestimmt.

Besagte Potenz ist nämlich keine andere, als die Potenz des Centrums C in Bezug auf das gegebene Punktepaar, beziehungsweise auf den gegebenen Kreis oder die gegebene Kugel. Bezeichnen wir nun ein- für allemal eine beliebige Kugel, einen beliebigen Kreis oder ein beliebiges Punktepaar, welches dem Gebüsche angehört, als ein „Element“ dieses Gebüsches, so folgt der Satz:

164. „Ein Kugelgebüsch ist vollkommen bestimmt, wenn dessen Centrum und ein beliebiges Element des Gebüsches gegeben ist.“

§. 210.

Denken wir uns ferner vier beliebige Kugeln als Elemente eines Gebüsches gegeben. Diese Kugeln besitzen (nach Satz 156) einen Potenzpunkt, welcher gleichzeitig das Centrum des Gebüsches darstellt.

Durch dieses Centrum und eine der vier gegebenen Kugeln ist, wie wir eben gesehen haben, das Kugelgebüsch vollkommen festgestellt; es folgt mithin der Satz:

165. „Vier beliebige Kugeln im Raume bestimmen als Elemente jederzeit ein Kugelgebüsch; das Centrum des Gebüsches ist der Potenzpunkt der vier Kugeln und die Potenz des Gebüsches ist jene des genannten Punktes in Bezug auf die vier gegebenen Kugeln.“

§. 211.

Es seien zwei Kreise K_1 und K_2 in verschiedenen Ebenen e_1 und e_2, jedoch nicht derselben Kugel angehörend, gegeben; es ist zu untersuchen, ob diese Kreise als Elemente eines Gebüsches betrachtet werden können.

Das Centrum des Gebüsches muss unbedingt in den Schnittgeraden s der beiden Kreisebenen e_1 und e_2 liegen. Dasselbe muss aber auch gleiche Potenzen in Bezug auf die beiden Kreise, also auch gleiche Potenzen in Bezug auf zwei Kugeln haben, von welchen je eine beliebig durch einen der Kreise K_1 und K_2 gelegt wird. Das Centrum muss somit auch in der Potenzebene der beiden Kugeln, mithin im gegenseitigen Schnitte dieser Ebene mit der Geraden s liegen.

Hiernach ist zu ersehen, dass ein Kugelgebüsch durch die Angabe zweier Kreise, als Elemente, vollkommen bestimmt ist. Dem zufolge besteht der Satz:

166. „Zwei beliebige, nicht derselben Kugel angehörige Kreise bestimmen als Elemente jederzeit ein Kugelgebüsch, dessen Centrum der Schnittpunkt der den Kreisebenen gemeinschaftlichen Geraden mit der Potenzebene eines beliebigen, durch die beiden Kreise gelegten Kugelpaares ist."

§. 212.

Seien K_1 und K_2 zwei beliebige Kreise im Raume, P das Centrum des durch sie bestimmten Kugelgebüsches.

Denken wir uns durch P eine beliebige Ebene e geführt, welche die obbezeichneten Kreise in den Punkten a_1, b_1, resp. a_2, b_2 schneiden möge. Die Punkte a_1, b_1 und P sowohl, als auch die Punkte a_2, b_2 und P liegen sodann in einer Geraden; nebstbei ist a_1, b_1, sowie auch a_2, b_2 je ein Punktepaar des Gebüsches.

Infolge dessen lässt sich durch die vier Punkte a_1, b_1, a_2 und b_2 stets ein Kreis legen. Es gilt demnach der Satz:

167. „Alle Ebenen, welche zwei beliebig im Raume gegebene Kreise in vier Punkten, die ein Kreisviereck bestimmen, treffen, gehen durch einen und denselben Punkt, d. i. durch das Centrum des durch die beiden Kreise bestimmten Gebüsches."

§. 213.

Wenn drei Punkte P, a, b in einer Geraden liegen, so bezeichnet man die Potenz $(Pa.Pb)$ des Punktes P in Bezug auf das Punktepaar (ab) als „negativ", wenn beide Punkte a und b zu verschiedenen Seiten des Punktes P sich vorfinden, und als „positiv", wenn besagte Punkte auf der nämlichen Seite von P liegen.

Es ist begreiflich, dass nur im letzteren Falle zwei Punkte, welche ein Punktepaar bilden, zusammenfallen können, und dass die Entfernung des vereinigten Punktepaares vom Punkte P der Quadratwurzel aus der Potenz gleich sein müsse.

Wendet man dies auf ein Kugelgebüsch und seine Potenz an, so findet man ohneweiters, dass das Centrum eines Gebüsches mit negativer Potenz innerhalb aller dem Gebüsche angehörenden Kugeln, Kreise und Punktepaare liegen müsse.

Hat aber das Kugelgebüsch eine positive Potenz, so liegt das Centrum desselben außerhalb aller Kugeln, Kreise und Punktepaare des Gebüsches.

Beschreibt man diesfalls aus dem Centrum P des Gebüsches, mit der Quadratwurzel der Potenz, als Radius, eine Kugel, so repräsentiert jeder Punkt dieser Kugel ein zusammenfallendes Punktepaar des Gebüsches.

Mit Zugrundelegung der Betrachtung, welche dem Satze 157) vorausgieng, erkennt man, dass diese Kugel sämmtliche Kugeln (und selbstverständlich auch sämmtliche Kreise) des Gebüsches orthogonal durchschneidet.

Eine derartige Kugel wird aus dem letztangegebenen Grunde die „Orthogonalkugel des Gebüsches“ genannt.

Die Existenz dieser Kugel liefert folgenden Satz, beziehungsweise nachstehende Bestimmungsart eines Kugelgebüsches:

168. Alle Kugeln, welche eine gegebene Kugel orthogonal durchschneiden, erzeugen ein Kugelgebüsch, dessen Centrum der Mittelpunkt der gegebenen Kugel und dessen (positive) Potenz dem Quadrate des Kugelradius gleich ist.“

Wird der Radius der Orthogonalkugel unendlich groß, d. h. übergeht diese Kugel in eine Ebene, so schneidet dieselbe, wie an und für sich klar, alle jene Kugeln orthogonal, deren Mittelpunkte in ihr liegen.

Jede Kugel, jeder Kreis und jedes Punktepaar des Gebüsches ist in diesem Falle symmetrisch gegen die Orthogonalebene gelegen, weshalb ein solches Gebüsch als ein „symmetrisches Kugelgebüsch“ bezeichnet wird.

§. 214.

In jedem Kugelgebüsche kann man die Punkte des Raumes einander ein-deutig entsprechen lassen, indem man als entsprechende oder conjugierte Punkte zwei solche annimmt, welche ein Punktepaar des Gebüsches darstellen.

Zu einem beliebigen Punkte p_1 im Raume ist sodann der conjugierte Punkt p_2 stets ein-deutig bestimmt, sobald das Centrum des Gebüsches, die Potenz desselben und der Sinn dieser Potenz gegeben ist.

Denn p_2 muss auf jener Geraden liegen, welche p_1 mit dem Centrum P verbindet; es muss demnach

$$Pp_1 \,.\, Pp_2 = k^2; \text{ also } Pp_2 = \frac{k^2}{Pp_1} \text{ sein.}$$

Je nachdem die Potenz positiv oder negativ ist, liegt p_2 in Bezug auf P auf derselben oder auf der entgegengesetzten Seite von dem Punkte p_1.

Der Definition des Kugelgebüsches gemäß wird jeder durch das Centrum gehende Strahl von jeder Kugel des Gebüsches in einem conjugierten Punktepaar geschnitten.

Hieraus folgt auch umgekehrt, dass alle Kugeln des Gebüsches, welche durch einen Punkt im Raume gehen, nothwendig auch durch den diesem Punkte conjugierten Punkt gehen müssen.

§. 215.

Sind p_1, p_2 und q_1, q_2 zwei beliebige Paare conjugierter Punkte eines Kugelgebüsches, so lässt sich durch die vier Punkte p_1, p_2, q_1, q_2, immer ein Kreis legen.

Da sich nämlich die Geraden $p_1 p_2$ und $q_1 q_2$ im Centrum P des Gebüsches treffen, so kann durch dieselben eine Ebene e gelegt werden. Führt man nun durch die drei Punkte p_1, p_2 und q_1 einen Kreis, so muss dieser, nachdem für den Kreis, gemäß der obigen Voraussetzung, die Relation

$$Pp_1 \,.\, Pp_2 = Pq_1 \,.\, Pq_2$$

besteht, nothwendig auch den Punkt q_2 enthalten.

Selbstverständlich ist sodann der durch p_1, p_2, q_1 und q_2 gelegte Kreis, gleichzeitig ein Element des Kugelgebüsches.

Setzen wir weiters voraus, dass $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$ drei Paare conjugierter Punkte des Gebüsches wären.

Die Geraden $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ und $c_1 c_2$ schneiden sich in dem Centrum P des Gebüsches; es ist daher:

$$a_1 P \,.\, a_2 P = b_1 P \,.\, b_2 P = c_1 P \,.\, c_2 P = k^2.$$

Legt man nun durch a_1, b_1, c_1 und a_2 eine Kugel, so wird diese nothwendig auch durch die Punkte b_2 und c_2 gehen, denn wäre letzteres nicht der Fall, so müssten diese Kugel die Strahlen Pb_1, Pc_1, außer in b_1 und c_1 noch in zwei Punkten etwa in b'_2 und c'_2 schneiden, welche jedoch mit b_1 und c_1, ebenso wie mit b_2 und c_2 conjugierte Punktepaare repräsentieren würden; es müssten also sowohl dem Punkte b_1, als auch dem Punkte c_1, zwei verschiedene Punkte b_2, b'_2, beziehungsweise c_2, c'_2 conjugiert sein, was offenbar nicht möglich ist.

Dieser Betrachtung entnehmen wir zugleich, wie viele Bestimmungsstücke für einen dem Gebüsche angehörenden Kreis oder für eine Kugel des Gebüsches, behufs deren ein-deutiger Bestimmung willkürlich gewählt werden können.

Wir finden diesbezüglich zunächst, dass man bloß einen einzigen Kreis des Gebüsches construieren könne, welcher durch zwei willkürlich gewählte Punkte a_1 und b_1 geht. Dieser Kreis ist nämlich

durch diese zwei Punkte und einen jener beiden Punkte, welche a_1 und b_1 conjugiert sind, vollkommen bestimmt.

Ebenso kann man durch drei beliebige Punkte a_1, b_1, c_1, im Raume nur eine Kugel legen, welche dem Gebüsche angehört. Denn, nachdem diese Kugel auch durch die conjugierten Punkte a_2, b_2, c_2 gehen muss, ist dieselbe, als umschriebene Kugel jenes Tetraeders, dessen Eckpunkte die drei gegebenen Punkte a_1, b_1, c_1 und einer der conjugierten Punkte a_2, b_2, c_2 sind, vollkommen bestimmt. Es folgt daher der Satz:

169. „Ein Kreis in einem Kugelbüschel ist durch zwei Punkte, durch welche es gehen soll, festgestellt, während eine Kugel des Gebüsches durch drei Punkte, welche sie enthalten soll, vollkommen bestimmt erscheint.“

§. 216.

Der zweite Theil des vorstehenden Satzes lässt, nach einer geringen Bedingungsveränderung, eine Erweiterung zu.

Es ist nämlich bekannt, dass jede Kugel, welche durch drei gegebene Punkte geht, auch den Kreis enthalten muss, welcher durch die drei Punkte führt.

Ist mithin ein Kreis gegeben, und legt man durch drei beliebig gewählte Punkte desselben jene Kugel, welche einem gegebenen Kugelgebüsche angehören soll, so muss diese Kugel auch den gegebenen Kreis enthalten.

Es gibt mithin in einem Kugelgebüsche nur eine einzige Kugel, welche einen beliebigen, dem Gebüsche nicht angehörenden Kreis enthält. Hiernach der Satz:

170. „Eine Kugel des Kugelgebüsches ist durch einen Kreis, welchen dieselbe enthalten soll, und welcher kein Element des Gebüsches repräsentiert, vollkommen bestimmt.“

§. 217.

In dem Vorhergegangenen wurde nachgewiesen, dass jedem Punkte des Raumes, vermittelst eines Kugelgebüsches ein zweiter Punkt ein-deutig zugeordnet werden kann, dass zwei solche Punkte stets auf einem durch das Centrum des Gebüsches gehenden Strahle liegen müssen, und dass das Product der Entfernungen zweier solcher conjugierter Punkte vom Centrum constant und zwar gleich der Potenz des Gebüsches ist.

Nehmen wir nun eine beliebige durch das Centrum P des Gebüsches gehende Gerade g an, und denken wir uns auf derselben zu jedem ihrer Punkte den conjugierten Punkt bestimmt.

Infolge des ein-deutigen Entsprechens ist die Reihe der conjugierten Punkte zu der Reihe der angenommenen projectivisch.

Betrachtet man aber die Paare entsprechender Punkte auf dem Träger g etwas näher, so sieht man, auf Grund einer bereits bekannten Eigenschaft, sofort, dass diese eine Involution bilden. Denn sind a_1 und a_2 zwei beliebige (conjugierte) Punkte auf g, so ist, der Voraussetzung gemäß, das Product $Pa_1 . Pa_2 = k^2$, also constant. — Sämmtliche Paare entsprechender Punkte a_1 und a_2 bilden daher auf der Geraden g eine Involution, deren Centralpunkt das Centrum des Gebüsches und dessen Modul, der Potenz des Gebüsches gleich ist.

Ist die Potenz positiv, so liegen conjugierte Punkte der Involution auf einerlei Seite des Centralpunktes P, ist diese hingegen negativ, so sind conjugierte Punkte auf verschiedenen Seiten des Centralpunktes P gelegen. Im ersteren Falle ist somit die Involution eine hyperbolische, im zweiten Falle hingegen eine elliptische.

Wir wissen ferner, dass eine hyperbolische Involution stets zwei reelle Doppelpunkte, d. i. zwei zusammenfallende reelle Punktepaare besitzt.

Berücksichtigen wir weiters, dass conjugierte Punkte der Involution auf g gleichzeitig Punktepaare des Gebüsches sind, und dass der geometrische Ort aller Punktepaare des Gebüsches, dessen beide Punkte zusammenfallen, die Orthogonalkugel ist, so finden wir, dass die Doppelpunkte der Involution auf g, die Schnittpunkte von g mit der Orthogonalkugel des Gebüsches sind. Da endlich die Involution auf g als Schnitt dieser Geraden mit dem gesammten Kugelgebüsch aufgefasst werden kann, so ergibt sich der Satz:

171. „Ein Kugelgebüsch bestimmt auf einer jeden durch sein Centrum gehenden Geraden eine Punktinvolution, deren Centralpunkt dieses Centrum, und deren Modul gleich der Potenz des Gebüsches ist. Conjugierte Punkte der Involution ergeben sich als die Schnittpunkte des Trägers mit Kugeln des Gebüsches. Die Involution ist elliptisch oder hyperbolisch, je nachdem die Potenz negativ oder positiv ist. Im letzteren Falle sind die Doppelpunkte der Involution die Schnittpunkte ihres Trägers mit der Orthogonalkugel des Gebüsches.“

Die Umkehrung des vorstehenden Satzes gibt folgende Bestimmungsart eines Kugelgebüsches.

172. „Eine Punktinvolution auf einer Geraden bestimmt immer ein Kugelgebüsch. Jede Kugel, welche durch ein conjugiertes Punktepaar der Involution geht, ist ein Element des Gebüsches. Der Central-

punkt der Involution ist das Centrum, der Modul derselben dagegen die Potenz des Gebüsches.

Ist die Involution eine elliptische, so ist die Potenz negativ, ist sie hyperbolisch, so ist die besagte Potenz positiv. Im letzteren Falle besitzt die Involution zwei reelle Doppelpunkte, deren jeder als eine Punktkugel des Gebüsches anzusehen ist. Die Kugel, welche über der Strecke der Doppelpunkte als Durchmesser beschrieben wird, stellt die Orthogonalkugel des durch die Involution bestimmten Kugelgebüsches dar. Jede Kugel, welche den Träger der Involution in einem der Doppelpunkte berührt, ist ebenfalls ein Element des Gebüsches."

§. 218.

Werden von einem Punkte P in der Ebene eines Kreises K beliebige Secanten $g_1, g_2, g_3 \ldots$ an den Kreis gezogen, welche den letzteren beziehungsweise in den Punktepaaren $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3 \ldots$ schneiden mögen, so wird das System dieser Punktepaare auf dem Kreise (ebenso auch auf irgend einem Kegelschnitte) infolge der vielen gemeinsamen Eigenschaften mit einer geraden Punktinvolution gleichfalls als eine „Punktinvolution" auf dem Kreise bezeichnet.

Der Punkt P heißt der Centralpunkt der Involution, und das constante Product

$$Pa_1 . Pb_1 = Pa_2 . Pb_2 = Pa_3 . Pb_3 = \ldots . = k^2$$

der Entfernung conjugierter Punkte a_1, b_1; a_2, b_2; $a_3, b_3 \ldots$ von dem Centrum P der „Modul" der Kreisinvolution.

Je nachdem der Punkt P innerhalb oder außerhalb des Kreises K liegt, wird die Kreisinvolution beziehungsweise als eine elliptische oder eine hyperbolische bezeichnet. Die hyperbolische Kreisinvolution besitzt zwei reelle Doppelpunkte, und diese sind keine anderen als die Berührungspunkte des Kreises K mit den von P aus an denselben gezogenen Tangenten.

§. 219.

Das Auftreten solcher Kreisinvolutionen bei Kugelgebüschen ist leicht nachzuweisen.

Sei nämlich P das Centrum des Kugelgebüsches und K ein beliebiger, dem Gebüsche angehörender Kreis, d. i. ein Kreis, dessen Ebene durch P führt.

Durch die Angabe von P und K ist das Kugelgebüsch vollkommen bestimmt, da dessen Potenz der Potenz des Punktes P in Bezug auf den gegebenen Kreis K gleich ist.

Zieht man durch P eine beliebige Gerade g, welche den Kreis K in den Punkten a und b trifft, so ist a, b ein Punktepaar des Gebüsches. Durch dasselbe gehen sodann unendlich viele Kugeln des Gebüsches.

Es ist aber auch umgekehrt mit derselben Leichtigkeit der Nachweis zu erbringen, dass eine beliebige Kugel des Gebüsches den Kreis K in einem Punktepaare, d. i. in zwei Punkten a und b treffen muss, deren Verbindungsgerade durch P geht.

Gesetzt nämlich, die Kugel treffe einmal den Kreis K in dem Punkte a. Zieht man sodann die Gerade Pa, so wird diese die Kugel noch in einem zweiten Punkte b'_1 und ebenso den Kreis K in einem zweiten Punkte b_1 schneiden.

Da a, b_1 sowohl, als auch a, b'_1 ein Punktepaar des Gebüsches darstellt, da ferner beide Paare den Punkt a gemein haben und da endlich je einem Punkte, der conjugierte Punkt ein-deutig entspricht, so folgt, dass nothwendig b_1 und b'_1 zusammenfallen müssen, oder mit anderen Worten, dass der Strahl Pa sowohl die Kugel, als auch den Kreis K in einem und demselben Punkte b_1 trifft.

Hiemit ist bewiesen, dass sämmtliche Kugeln des Gebüsches, den dem Gebüsche angehörenden Kreis K in Punktepaaren schneiden, deren Verbindungsgeraden durch das Centrum P des Gebüsches gehen.

Den vorhergehenden Auseinandersetzungen gemäß, bilden diese Punktepaare eine Kreisinvolution, deren Centralpunkt das Centrum P des Gebüsches ist und deren Modul der Potenz des Gebüsches gleich ist. Ist die Potenz eine negative, so liegt der Punkt P im Inneren des Kreises; die Kreisinvolution wird daher eine elliptische sein. Liegt jedoch der Punkt P außerhalb des Kreises K, was bei positiver Potenz des Gebüsches eintritt, so ist die Kreisinvolution eine hyperbolische. Letztere besitzt sodann zwei reelle Doppelpunkte. Diese Doppelpunkte sind die Berührungspunkte der von P aus an K gezogenen Tangenten.

Die Doppelpunkte lassen sich aber auch noch anders darstellen. Jeder Doppelpunkt, d. h. ein zusammenfallendes Punktepaar wird im Gebüsche, wie wir gesehen haben, durch eine Punktkugel repräsentiert. Nachdem aber sämmtliche Punktkugeln durch die Punkte der Orthogonalkugel vertreten sind, so ist einleuchtend, dass die fraglichen Doppelpunkte gleichzeitig jene sind, welche sich als die Schnittpunkte des gegebenen Kreises (Träger der Kreisinvolution) mit der Orthogonalkugel des Gebüsches herausstellen. Mithin der Satz:

173. „Die Kugeln eines Kugelgebüsches bestimmen auf einem beliebigen Kreise des Gebüsches eine Kreisinvolution, deren Central-

punkt das Centrum des Gebüsches und deren Modul die Potenz des Gebüsches ist. Ist die Potenz negativ, so ist die Kreisinvolution elliptisch; ist hingegen die Potenz des Gebüsches positiv, so ist die Kreisinvolution eine hyperbolische. In diesem Falle besitzt dieselbe zwei reelle Doppelpunkte, welche sich einerseits als die Berührungspunkte der vom Centrum aus an den Kreis gezogenen Tangenten, andererseits aber als die Schnittpunkte des Kreises mit der Orthogonalkugel des Gebüsches ergeben. Sämmtliche Kugeln, welche den Kreis in den Doppelpunkten berühren, sind Elemente des Gebüsches. Die Doppelpunkte selbst sind zwei Punktkugeln des Gebüsches."

Hieraus ergibt sich umgekehrt folgende Bestimmungsart eines Kugelbüschels durch eine Kreisinvolution.

174. „Eine Kreisinvolution bestimmt jederzeit ein Kugelgebüsch. Jede Kugel, welche durch ein Paar conjugierter Punkte der Involution geht, ist ein Element des Gebüsches. Das Centrum der Involution ist gleichzeitig das Centrum des Gebüsches und der Modul der Involution ist die Potenz des Gebüsches. Ist die Involution elliptisch, so ist die Potenz negativ, ist die Involution hyperbolisch, so ist die Potenz positiv. Im letzteren Falle repräsentieren die reellen Doppelpunkte der Involution zwei Punktkugeln des Gebüsches; die Orthogonalkugel des Gebüsches geht durch dieselben. Sämmtliche Kugeln, welche den Träger (Kreis) der Involution in den Doppelpunkten berühren, sind Elemente des Gebüsches."

§. 220.

In Rückblick auf den Satz 166), nach welchem zwei beliebige, nicht auf einer und derselben Kugel liegende und in verschiedenen Ebenen befindliche Kreise K_1 und K_2 ein Kugelgebüsch, dessen Elemente diese Kreise sind, bestimmen und unter gleichzeitiger Berücksichtigung, dass jede Kugel, welche durch einen der beiden Kreise geht, dem Gebüsche angehört, folgt mit Hinzuziehung der eben gefundenen Resultate — speciell aber mit Berücksichtigung des Satzes 173) der nachstehende interessante Satz:

175. „Sind zwei Kreise in verschiedenen Ebenen derart gegeben, dass sie keinen Punkt gemein haben und nicht auf derselben Kugelfläche liegen und führt man durch den einen dieser Kreise beliebig viele Kugeln, so schneiden diese den zweiten Kreis in Punktepaaren, deren Verbindungsgeraden durch einen und denselben festen Punkt gehen. Insbesondere gehen durch den nämlichen Punkt auch die Tangenten des Kreises in jenen Punkten, in welchen derselbe von gewissen durch den anderen Kreis gelegten Kugeln berührt wird.

Vertauscht man die Operationen bezüglich beider Kreise, so erhält man wieder den nämlichen festen Punkt. Dieser Punkt stellt das Centrum des durch die beiden Kreise bestimmten Kugelgebüsches dar und liegt in der Schnittgeraden beider Kreisebenen. Durch die vorher genannten Berührungspunkte auf den beiden Kreisen geht die Orthogonalkugel des Gebüsches."

XIV. Capitel.

Das Princip der reciproken Radien oder die inverse Transformation.

§. 221.

Sei P das Centrum und k^2 die Potenz eines Kugelgebüsches.

Zwei conjugierte Punkte a_1 und a_2 sind sodann einerseits auf dem nämlichen, durch P gehenden Strahle g gelegen und andererseits durch die Relation

$$Pa_1 \,.\, Pa_2 = k^2$$

verbunden. Bezeichnen wir die Strecke Pa_1 mit r_1 und die Strecke Pa_2 mit r_2, so ist kurz

$$r_1 \,.\, r_2 = k^2 \text{ oder } r_2 = k^2 \,.\, \frac{1}{r_1}$$

und umgekehrt

$$r_1 = k^2 \,.\, \frac{1}{r_2}.$$

Infolge dieser reciproken Werte pflegt man r_1 und r_2 reciproke Radien, P ihr Centrum und k^2 die Potenz derselben zu nennen.

Construiert man zu jedem Punkte a_1 eines beliebigen Gebildes im Raume, den zugehörigen — offenbar bei gegebenem (positiven oder negativen) Sinne der Potenz k^2 ein-deutigen — Punkt a_2, so bilden sämmtliche Punkte a_2 ein Gebilde, welches mit dem ersteren geometrisch verwandt ist, und als das dem ersteren Gebilde $a_1 \ldots$ „invers" entsprechende Gebilde bezeichnet wird.

Dies pflegt man auch dadurch zum Ausdrucke zu bringen, indem man sagt: „Das eine Gebilde sei durch reciproke Radien in das andere transformiert" oder auch: „das eine Gebilde ist aus dem anderen mittelst reciproker Radien abgeleitet."

Infolge der Symmetrie der Beziehung:

$$r_1 r_2 = k^2$$

kann ein jedes von zwei „inversen" Gebilden aus dem anderen auf ganz übereinstimmende Weise abgeleitet werden.

Zunächst ist hervorzuheben, dass sämmtliche Kugeln, Kreise und Punktepaare des zugehörigen Kugelgebüsches in sich selbst transformiert werden.

Ist nämlich S eine beliebige Kugel des Gebüsches und soll zu einem ihrer Punkte a_1, der inverse Punkt a_2 gefunden werden, so sind beide Punkte durch die Relation:

$$Pa_1 \,.\, Pa_2 = k^2$$

verbunden, d. h. dem Punkte a_1 der Kugel S entspricht wieder ein Punkt der Kugel S und zwar jener a_2, in welchem die letztere von dem Strahle Pa_1 zum zweitenmale getroffen wird. Umgekehrt entspricht dem Punkte a_2 wieder der Punkt a_1.

Hieraus ist zu ersehen, dass die Kugel invers in sich selbst transformiert wird, jedoch so, dass entsprechende Punkte im allgemeinen nicht coincidieren. Dies gilt insbesondere nur von jenen Punkten, welche auf der (etwa vorhandenen) Orthogonalkugel des Gebüsches liegen, da jeder Punkt dieser Kugel in sich selbst transformiert wird, d. h. mit seinem entsprechenden Punkte zusammenfällt.

Jede Gerade, welche durch das Inversionscentrum geht, entspricht (jedoch wieder nicht Punkt für Punkt) sich selbst, indem irgend einem Punkte auf einer durch das Centrum gehenden Geraden wieder nur ein Punkt dieser Geraden entspricht.

Ebenso einleuchtend ist, dass in gleichem Sinne auch eine beliebige durch das Centrum geführte Ebene invers in sich selbst transformiert wird. Denn jedem Punkte dieser Ebene entspricht ein Punkt, welcher auf dem Verbindungsstrahle desselben mit dem Centrum, also wieder in der Ebene liegt.

§. 222.

Setzen wir voraus, P sei das Inversionscentrum, k^2 die Inversionspotenz, und nehmen wir zwei Paare entsprechender Punkte a_1 und a_2; b_1 und b_2 beliebig an.

Der Definition gemäß geht sowohl $a_1 a_2$, als auch $b_1 b_2$ durch P_1 und außerdem besteht die Relation:

$$Pa_1 . Pa_2 = Pb_1 . Pb_2 = k^2.$$

Betrachten wir die beiden Dreiecke $Pa_1 b_1$ und $Pa_2 b_2$, so ergibt sich, weil nach obiger Gleichung

$$Pa_1 : Pb_1 = Pb_2 : Pa_2,$$

dass dieselben einander ähnlich seien. Dabei sind die Winkel bei P einander gleich; ferner ist

$$\sphericalangle Pa_1 b_1 = \sphericalangle Pb_2 a_2 \text{ und } \sphericalangle Pb_1 a_1 = \sphericalangle Pa_2 b_2.$$

Ist daher beispielsweise der Winkel des Dreieckes $Pa_1 b_1$ bei a_1 ein rechter Winkel, so gilt das Gleiche auch von dem Winkel des Dreieckes $Pa_2 b_2$ bei b_2.

Untersuchen wir nun, was für ein Gebilde einer beliebigen, nicht durch das Inversionscentrum P gehenden Ebene E_1 invers entspricht.

Fällen wir zu diesem Zwecke vom Inversionscentrum P auf diese Ebene E_1 die Senkrechte Pa_1 und bestimmen wir den ihrem Fußpunkte a_1 inversen Punkt a_2. Der so erhaltene Punkt a_2 ist bereits ein Punkt des inversen Gebildes, welches sich als geometrischer Ort aller Punkte ergeben wird, das aus den Punkten der Ebene E_1 durch reciproke Radien abgeleitet werden kann.

Sei beispielsweise b_1 ein beliebiger Punkt der Ebene E_1 und b_2 der ihm invers entsprechende Punkt, d. h. ein Punkt des gesuchten Gebildes.

Mit Zugrundelegung der Ergebnisse der vorausgeschickten Betrachtung ist der Winkel $Pb_2 a_2$ gleich dem Winkel $Pa_1 b_1$. Nachdem aber dieser letzte Winkel von der Normalen Pa_1 der Ebene E_1 und einer durch deren Fußpunkt a_1 in der Ebene E_1 gezogenen Geraden $a_1 b_1$ gebildet wird, also ein rechter Winkel ist, muss auch der Winkel $Pb_2 a_2$ ein rechter Winkel sein.

Da bezüglich des Punktes b_1 keine besondere Voraussetzung gemacht wurde, so gilt dasselbe für alle Punkte der Ebene E_1 oder mit anderen Worten, den sämmtlichen Punkten der Ebene E_1 entsprechen invers Punkte, welche mit den beiden festen Punkten P und a_2 verbunden, einen rechten Winkel ergeben.

Hieraus folgt aber, dass der geometrische Ort aller den Punkten der Ebene E_1 invers entsprechenden Punkte jene Kugel E_2 sei, welche über der Strecke Pa_2 als Durchmesser beschrieben wird.

Die Tangentialebene der Kugel E_2 in dem Punkte P ist senkrecht zu dem Durchmesser Pa_1, mithin parallel zur Ebene E_1. Es ergibt sich somit der Satz:

176. *„Jeder durch das Inversionscentrum nicht gehenden Ebene entspricht invers eine Kugel, welche durch das Inversionscentrum geht und in demselben von einer, zu der gegebenen Ebene*

parallelen Ebene berührt wird. Der zweite Durchmesserendpunkt dieser Kugel ist der dem Fußpunkte des vom Inversionscentrum zur Ebene geführten Normalen inverse Punkt."

Aus derselben Betrachtung folgt weiters unmittelbar auch der umgekehrte Satz:

177. „Einer beliebigen, durch das Inversionscentrum gehenden Kugel entspricht invers eine Ebene, welche zur Berührungsebene der Kugel im Inversionscentrum parallel ist. Das Product aus dem Kugeldurchmesser und dem Abstande des Inversionscentrums von jener Ebene ist gleich der Inversionspotenz."

§. 223.

Nehmen wir zwei beliebige Ebenen E_1 und e_1 an, so entsprechen denselben, nach dem vorstehenden Satze 176) zwei durch das Inversionscentrum gehende Kugelflächen E_2 und e_2, deren Berührungsebenen im Inversionscentrum, beziehungsweise zu E_1 und e_1 parallel sind.

Daraus folgt aber, dass sich die beiden Kugeln E_2 und e_2 im Inversionscentrum unter dem nämlichen Winkel wie die Ebenen E_1 und e_1 schneiden.

Es bedarf wohl nicht erst eines besonderen Beweises, um darzuthun, dass, wenn zwei Kugeln sich in einem Punkte unter einem Winkel α treffen, das gleiche Verhalten überhaupt in allen anderen Punkten derselben statthabe, dass sich dieselben also auch in allen übrigen Punkten unter dem nämlichen Winkel α schneiden werden.

Hiernach gelangen wir zu dem Satze:

178. „Die zwei Kugeln, welche invers irgend zwei beliebigen Ebenen entsprechen, schneiden sich unter demselben Winkel, wie diese Ebenen."

§. 224.

Seien F_1 und Φ_1 zwei beliebige Flächen; a_1 irgend ein Punkt ihres Schnittes, und T_1, τ_1 die Tangentialebenen der genannten Flächen im Punkte a_1.

Den beiden Flächen F_1 und Φ_1 werden invers wieder zwei Flächen F_2 und Φ_2 entsprechen. Dem gemeinschaftlichen Punkte a_1 von F_1 und Φ_1 entspricht ein gemeinschaftlicher Punkt a_2 der inversen Flächen F_2 und Φ_2. Den Berührebenen T_1 und τ_1 endlich entsprechen zwei Kugeln T_2 und τ_2, welche die Flächen F_2 und Φ_2 im Punkte a_2 berühren.

Da nun einerseits die Berührebenen der beiden Flächen F_2 und Φ_2 im Punkte a_2 die nämlichen sind, wie jene der beiden Kugeln T_2

und τ_2, da sich ferner (Satz 178) die beiden Kugeln T_2 und τ_2 unter demselben Winkel schneiden, wie die Ebenen T_1 und τ_1, so folgt, dass sich auch die beiden Flächen F_2 und Φ_2 im Punkte a_2 unter dem nämlichen Winkel begegnen werden, wie die Flächen F_1 und Φ_1 im Punkte a_1.

Nachdem dies ganz allgemein von allen Flächenarten und in jedem Punkte des Durchschnittes gilt, so ergibt sich der Satz:

179. Zwei Flächen schneiden sich in jedem Punkte unter dem nämlichen Winkel, unter welchem sich die ihnen inversen Flächen im entsprechenden Punkte begegnen."

§. 225.

Vorher wurde nachgewiesen, dass einer Ebene invers eine Kugel entspricht.

Nachdem aber einem Punkte, welcher zwei Ebenen gemeinschaftlich ist, wieder nur ein Punkt entsprechen kann, welcher den beiden Kugeln gemeinschaftlich ist, so folgt unmittelbar, dass dem Schnitte zweier Ebenen, d. i. einer geraden Linie, der Schnitt der beiden inversen Kugeln, also ein Kreis, entsprechen müsse.

Dieser Kreis geht, da die beiden Kugeln das Inversionscentrum enthalten, durch dasselbe und liegt auf jener Ebene, welche das Inversionscentrum mit der Geraden verbindet, indem, wie wir bereits wissen, jeder Punkt, welcher einem Punkte der Geraden invers entspricht, auf jenem Strahle, welche den letzteren mit dem Centrum verbindet, also in der genannten Ebene liegen muss.

Berücksichtigt man ferner, dass die Tangentialebenen der beiden Kugeln E_2 und e_2, welche zwei Ebenen E_1 und e_1 invers entsprechen, im Inversionspunkte, parallel zu diesen Ebenen sind, dass also auch die Schnittlinie der beiden Tangentialebenen, d. i. die Tangente des Schnittkreises beider Kugeln E_2 und e_2, im Inversionscentrum parallel zu der Schnittgeraden der Ebenen E_1 und e_1 sein müsse, so folgt der Satz:

180. „Einer beliebig im Raume gegebenen Geraden, die nicht durch das Inversionscentrum geht, entspricht invers ein Kreis, welcher in jener Ebene liegt, die die gegebene Gerade mit dem Inversionscentrum verbindet. Dieser Kreis geht durch das Inversionscentrum, und wird daselbst von einer Geraden berührt, welche zu der gegebenen Geraden parallel ist. Das Product aus dem Durchmesser des Kreises und dem Abstande der gegebenen Geraden vom Inversionscentrum ist gleich der Inversionspotenz."

§. 226.

Nehmen wir zwei beliebige, sich schneidende Geraden g_1 und g_1' im Raume an. Der Schnittpunkt beider heiße A_1 und die durch beide Geraden gelegte Ebene sei E_1.

Diese Gebilde denken wir uns in Bezug auf ein Centrum P invers transformiert. Hierbei entspricht der Ebene E_1 eine Kugel E_2, welche durch das Inversionscentrum P geht, und daselbst von einer zur Ebene E_1 parallelen Ebene ε berührt wird.

Den beiden Geraden g_1 und g'_1 entsprechen (nach dem vorhergehenden Satze 180) zwei Kreise g_2 und g'_2, welche gleichfalls durch das Inversionscentrum gehen, und daselbst von zwei Geraden γ und γ' berührt werden, welche zu den bezüglichen Geraden g_1 und g'_1 parallel sind.

Die besagten Geraden bestimmen daher eine Ebene, welche zu der Ebene E_1, der ihnen parallelen Geraden g_1 und g'_1, parallel läuft, also keine andere, als die vorgenannte Tangentialebene ε der Kugel E_2 im Inversionscentrum P sein kann.

Da ferner die Geraden g_1 und g'_1 in der Ebene E_1 liegen, so befinden sich die ihnen invers entsprechenden Kreise g_2 und g'_2 auf der Kugel E_2, und sind offenbar die Schnittkreise dieser Kugel mit den Ebenen (P, g_1) und (P, g'_1). Diese beiden Kreise g_2 und g'_2 endlich schneiden sich in einem zweiten, von P verschiedenen Punkte A_2, welcher nichts anderes als den dem Schnittpunkte A_1 der Geraden g_1 und g'_1 inversen Punkt darstellt.

Wir finden also, dass dem ebenen Winkel (g, g'_1), dessen Ebene E_1 ist, ein sphärischer Winkel entspricht, welcher auf jener Kugel E_2 liegt, die der genannten Ebene E_1 invers ist.

Versuchen wir nunmehr, die Größe dieses sphärischen Winkels zu bestimmen.

Unter der Größe eines sphärischen Winkels versteht man denjenigen Winkel, welchen die Tangenten an die beiden, den sphärischen Winkel bildenden Kreise in deren gemeinschaftlichem Punkte, d. i. im Scheitel des Winkels, mit einander einschließen.

Denken wir uns behufs obiger Forderung eine beliebige Kugel S, und auf derselben zwei beliebige Kreise K_1 und K_2, welche sich in den beiden Punkten a und α schneiden mögen. Seien ferner t_1 und t_2 die Tangenten der Kreise K_1 und K_2 im Punkte a; τ_1 und τ_2 die Tangenten derselben Kreise im Punkte α, so ist — nachdem die Kugel sowohl, als auch die beiden Kreise K_1 und K_2, sowie deren Tangenten in den Punkten a und α gegen jene Diametralebene der Kugel, welche zu der Sehne $a\alpha$ normal steht, symmetrisch sind — an und für

sich klar, dass der Winkel, welchen die beiden Tangenten t_1 und t_2 einschließen, jenem Winkel gleich sein müsse, welchen die beiden Tangenten τ_1 und τ_2 einschließen. Kurz gefasst lässt sich somit behaupten: die beiden Winkel, unter welchen sich zwei Kreise, die auf der nämlichen Kugel liegen, schneiden, sind einander gleich.

Kehren wir nach dieser Abschweifung zu unseren ursprünglichen Betrachtungen zurück.

Sind g_1 und g'_1 die beiden in A_1 sich schneidenden Geraden und E_1 deren Ebene, so wurde festgestellt, dass den beiden Geraden g_1 und g'_1 zwei Kreise g_2 und g'_2 entsprechen, welche auf der der Ebene E_1 inversen Kugel E_2 liegen. Diese beiden Kreise haben außer dem Inversionscentrum P noch den Punkt A_2 gemein, welcher invers dem Punkte A_1 entspricht. Weiters sind die Tangenten γ und γ' der beiden Kreise g_2 und g'_2 im Inversionscentrum P zu den beiden Geraden g_1 und g'_1 parallel.

Da aber mit Zugrundelegung der vorhergehenden Betrachtung der Winkel $(\gamma . \gamma')$, unter welchem sich die beiden Kreise bei P schneiden, jenem Winkel gleich ist, unter welchem sich dieselben bei A_2 begegnen, so folgt, dass dieser letztere Winkel auch demjenigen gleich sei, unter welchem sich die beiden Geraden g_1 und g'_1 schneiden. Es folgt mithin der Satz:

181. „Ein ebener Winkel verwandelt sich bei inverser Transformation in einen sphärischen Winkel von derselben Größe."

Hieraus ergibt sich unmittelbar der weitere Satz:

182. „Einem ebenen Dreiecke, beziehungsweise einem ebenen n-ecke, entspricht invers ein sphärisches Dreieck, resp. n-eck, dessen sämmtliche Winkel den entsprechenden Winkeln in dem ebenen Drei- oder n-ecke gleich sind."

§. 227.

Der oben angeführte Satz lässt nicht ohneweiters die Umkehrung zu. Denn, wie unschwer einzusehen, waltet für alle Seiten des sphärischen Polygons, d. i. für die Kreise auf der Kugel, welche dieses Polygon bilden, die nothwendige Bedingung ob, dass sie alle sammt und sonders durch einen und denselben Punkt, durch das Inversionscentrum, gehen.

Die Umkehrung des vorstehenden Satzes wird daher folgendermaßen lauten müssen.

183. „Ist auf einer Kugel, welche durch das Inversionscentrum geht, ein sphärisches Polygon derart gegeben, dass sämmtliche Seiten

desselben durch das Inversionscentrum gehen, so entspricht diesem Polygone invers ein ebenes Polygon, dessen sämmtliche Winkel den entsprechenden Winkeln am sphärischen Polygone gleich sind."

Bemerkt sei hier noch, dass in all den vorhergehenden Betrachtungen unter einem sphärischen Polygone, nicht wie üblich, ein solches verstanden wurde, dessen Seiten Bögen von größten Kugelkreisen sind, sondern sphärische Polygone gedacht wurden, deren Seiten durch einen und denselben Punkt auf der Kugelfläche, das ist durch das Inversionscentrum gehen, sonst aber eine ganz beliebige Lage auf der Kugel haben dürfen. Nur unter dieser Voraussetzung wurden die vorstehenden Sätze aufgestellt und nachgewiesen.

§. 228.

Der vorstehende Satz ist die Quelle einer ebenso wichtigen als interessanten ein-deutigen Abbildungsmethode besonderer Art.

Mittelst des Princips der reciproken Radien sind wir nämlich in den Stand gesetzt, eine Kugel ein-deutig auf eine Ebene „abzubilden", d. h. eine ein-deutige Verwandtschaft zwischen den Punkten der Kugel und der Ebene herzustellen.

Es genügt zu diesem Zwecke, irgend einen Punkt P der Kugel als Transformations- oder Inversionscentrum anzunehmen. Sämmtlichen Punkten der Kugel entsprechen sodann invers die Punkte einer Ebene.

Diese Verwantdschaft hat aber noch eine ganz besondere charakteristische Eigenschaft.

Denken wir uns nämlich auf der Kugel drei Punkte a_2, b_2, c_2 angenommen, welche unendlich nahe aneinander liegen und legen wir durch das Inversionscentrum P und durch die Punktepaare a_2, b_2; b_2, c_2; c_2, a_2 Kreise, so bilden diese ein sphärisches, unendlich kleines Dreieck (sphärisch in dem vorangedeuteten Sinne aufgefasst). Der unendlichen Kleinheit der Seiten $a_2 b_2$, $b_2 c_2$, $c_2 a_2$ wegen kann dieses Dreieck als ein geradliniges und daher auch als ebenes Dreieck aufgefasst werden.

Diesem Dreiecke entspricht invers in der vorgenannten Ebene ebenfalls ein Dreieck $a_1 b_1 c_1$, dessen Winkel (nach dem Satze 182), den entsprechenden Winkeln des Dreieckes $a_2 b_2 c_2$ gleich sind. Es folgt mithin der Satz:

184. „Jedem unendlich kleinen Dreiecke auf einer Kugel, welche durch das Inversionscentrum geht, entspricht in der dieser Kugel inversen Ebene ein Dreieck, dessen Winkel denjenigen des ersten Dreieckes gleich sind. Die beiden Dreiecke selbst sind ähnlich."

§. 229.

Die Kugelfläche kann man offenbar auf die verschiedenartigsten Weisen in unendlich viele derartige unendlich kleine Dreiecke getheilt denken. Aus deren Ähnlichkeit mit den ihnen auf der inversen Ebene entsprechenden Dreiecken folgt die besondere Eigenschaft dieser Transformation, dass die Kugelfläche in ihren kleinsten Theilen ähnlich, auf die ihr invers entsprechende Ebene abgebildet wird. Mithin der Satz:

185. „Eine Kugel wird mittelst der inversen Transformation, sobald man das Inversionscentrum auf der Kugel liegend annimmt, auf eine Ebene derart abgebildet, dass die kleinsten Theile, welche in beiden Gebilden einander entsprechen, ähnlich sind.“

§. 230.

Jede Abbildung zweier Flächen auf einander, bei welcher entsprechende kleinste Theile einander ähnlich sind, wird eine „conforme Abbildung“ genannt.

Betrachtet man das Inversionscentrum als Projectionscentrum und die der Kugel invers entsprechende Ebene als Projectionsebene, wobei als „zu projicierende Gebilde“ solche angenommen werden, welche auf der Kugelfläche selbst liegen, so erhält man die unter dem Namen „stereographische Projection“ bekannte Projectionsart.

Wir werden an späterer Stelle auf diese Projectionsart zurückkommen.

§. 231.

Denken wir uns ein beliebiges Gebilde Σ_1, sowie ein Inversionscentrum P_1 und bestimmen wir das dem Gebilde Σ_1 inverse Gebilde Σ_2, Σ_3... für verschiedene Inversionspotenzen k^2 jedoch für dasselbe Inversionscentrum P.

Es frägt sich um das Verhalten der inversen Gebilde Σ_2, Σ_3... unter einander.

Um dieses gegenseitige Verhalten festzustellen, nehmen wir zwei beliebige Punkte a_1 und b_1 des Gebildes Σ_1 an. Die den genannten Punkten invers entsprechenden Punkte seien a_2, b_2 für die Inversionspotenz $k_2{}^2$ und a_3, b_3 für die Inversionspotenz $k_3{}^2$.

Es finden diesbezüglich folgende Beziehungen statt. Zunächst liegen die Punkte P_1, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 sämmtlich in einer Ebene und überdies P, a_1, a_2, a_3 auf einem Strahle, während P, b_1, b_2, b_3

auf einem zweiten den ersten schneidenden Strahle zu suchen sind. Ferner bestehen die Beziehungen:

$$Pa_1 \,.\, Pa_2 = k_2^2; \quad Pb_1 \,.\, Pb_2 = k_2^2$$
$$Pa_1 \,.\, Pa_3 = k_3^2 \text{ und } Pb_1 \,.\, Pb_3 = k_3^2.$$

Hieraus folgt aber unmittelbar, dass:

$$Pa_2 : Pa_3 = Pb_2 : Pb_3 = k_2^2 : k_3^2.$$

Die beiden Dreiecke $Pa_1 b_2$ und $Pa_3 b_3$ sind mithin ähnlich. Nachdem aber zwei Paare entsprechender Seiten derselben, d. i. Pa_2 und Pa_3; Pb_2 und Pb_3 zusammenfallen, so ist das dritte Paar $a_2 b_2$ und $a_3 b_3$ parallel.

Das Gleiche gilt von allen Punkten der beiden Gebilde Σ_2 und Σ_3. Dieselben sind also derart geometrisch verwandt, dass die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte durch einen und denselben Punkt, „das Inversionscentrum“ gehen, dass ferner Geraden, welche entsprechende Punktepaare verbinden, unter einander parallel sind, und dass endlich die Entfernungen zweier einander entsprechender Punkte a_2 und a_3 vom Inversionscentrum in einem constanten Verhältnisse $k_2^2 : k_3^2$ stehen.

Die beiden Gebilde Σ_2 und Σ_3 sind somit ähnlich, das Inversionscentrum ist ihr Ähnlichkeitspunkt und das Verhältnis der beiden Inversionspotenzen der Ähnlichkeitsmodul. Mithin besteht der Satz:

186. „Transformiert man ein und dasselbe Gebilde für ein und dasselbe Inversionscentrum, aber für verschiedene Inversionspotenzen, so bilden die transformierten Gebilde untereinander eine Reihe ähnlicher und ähnlich liegender Figuren, deren gemeinschaftlicher Ähnlichkeitspunkt das Inversionscentrum ist.“

Zwei transformierte Gebilde Σ_2 und Σ_3 werden insbesondere symmetrisch sein, wenn die beiden zugehörigen Inversionspotenzen gleich groß, dem Sinne nach aber entgegengesetzt sind.

§. 232.

Untersuchen wir, in was für ein Gebilde eine beliebige, nicht durch das Inversionscentrum P gehende Kugel S_1 vermittelst inverser Transformation verwandelt wird.

Betrachten wir vorerst als Inversionspotenz die Potenz des Inversionscentrums in Bezug auf die gegebene Kugel S_1, so wissen wir, dass sich dieselbe in sich selbst verwandelt.

Auf Grund des Satzes 186) muss aber diesfalls das der gegebenen Kugel für irgend eine beliebige Inversionspotenz entsprechende

inverse Gebilde mit dieser Kugel, in Bezug auf das Inversionscentrum, als Ähnlichkeitspunkt ähnlich, also selbst wieder eine Kugel sein. Es gilt daher der Satz:

187. „Jede Kugel, welche nicht durch das Inversionscentrum geht, verwandelt sich wieder in eine Kugel, welche mit der ersteren, in Bezug auf das Inversionscentrum, als Ähnlichkeitspunkt ähnlich liegt.“

§. 233.

Aus dem vorstehenden Satze folgt unmittelbar, dass jeder Kreis im Raume, welcher nicht durch das Inversionscentrum geht, durch Transformation mittelst reciproker Radien allemal wieder in einen Kreis verwandelt wird.

Legt man nämlich durch den gegebenen Kreis K_1 zwei beliebige Kugeln S_1 und S'_1, so verwandeln sich diese, dem eben Vorausgeschickten zufolge, in zwei andere Kugeln S_2 und S'_2, während der den beiden letztgenannten Kugeln gemeinschaftliche Kreis K_2 dem gemeinschaftlichen Kreise K_1 der beiden ersteren entspricht. Der Kreis K_2 liegt aber außerdem (Satz 176) noch auf einer besonderen Kugel E_2, d. i. jener, welche durch das Inversionscentrum geht und der Ebene E_1 des Kreises K_1 entspricht. Es besteht folglich der Satz:

188. „Jedem nicht durch das Inversionscentrum gehenden Kreise entspricht invers wieder ein Kreis, welcher auf jener durch das Inversionscentrum gehenden Kugel liegt, die der Ebene des gegebenen Kreises invers ist.“

§. 234.

Der eben aufgestellte Satz sagt aus, dass die stereographische Projection eines Kreises stets wieder ein Kreis sei.

Eine einfache Betrachtung wird es ermöglichen, auch den Mittelpunkt der stereographischen Projection festzustellen.

Sei S (Taf. XIII, Fig. 69) eine beliebige Kugel, P das Inversionscentrum auf derselben (Centrum der stereographischen Projection) und K ein beliebiger Kugelkreis. Wir wählen hierbei die durch P (Taf. XIII, Fig. 69) gehende, zur Ebene des Kreises K senkrecht stehende Diametralebene der Kugel S, als verticale und die Ebene des Kreises K als horizontale Projectionsebene.

Der Kugel S wird, wie bereits bekannt, invers eine Ebene entsprechen, welche zu der Tangentialebene T der Kugel im Inversionscentrum P parallel ist. Alle Kreise K auf der Oberfläche der Kugel werden sich somit auf jenen Ebenen, die zur Ebene T parallel sind, folgerichtig als Kreise abbilden.

Nachdem aber der dem Kreise (K, K') invers entsprechende Kreis auf dem durch K und das Inversionscentrum P gelegten Kegel liegen muss, so ist einleuchtend, dass die Ebene T die zweite Kreisebene des Kegels (P, K) sei, d. h. dass dieser Kegel von allen zu T parallelen Ebenen in Kreisen geschnitten wird. Mithin gilt der Satz:

189. „Legt man durch einen beliebigen Kreisschnitt eines Kegels zweiten Grades und durch den Scheitel des Kegels eine Kugel, so ist die Tangentialebene dieser Kugel im Scheitel des Kegels die zweite Kreisebene desselben, d. h. der Kegel wird von allen zu dieser Ebene parallelen Ebenen gleichfalls in Kreisen geschnitten."

§. 235.

Sei ferner M (Taf. XIII, Fig. 69) der Scheitel des der Kugel S, längs des Kreises K, umschriebenen Kegels.

Die Ebene des Kreises K ist sodann, wie bereits bekannt, die Polarebene des Punktes M, in Bezug auf die Kugel S. Ferner ist der Pol der Tangentialebene T ihr Berührungspunkt P.

Die beiden genannten Ebenen schneiden sich in einer Geraden (D, D'), welche die Polare der Verbindungsgeraden ihrer Pole P und M repräsentiert. Es ist daher der Punkt M_1, in welchem MP die Ebene des Kreises K schneidet, der Pol der Geraden D, in Bezug auf den Kreis (K, K').

Hieraus folgt aber unmittelbar, dass die Gerade PM der der Ebene T conjugierte Durchmesser des Kegels (P, K) sei, dass derselbe also die Mittelpunkte aller zu T parallelen Kreisschnitte des Kegels enthalte.

Wird demnach die Kugel S aus dem Projectionscentrum P auf eine zu T parallele Ebene stereographisch abgebildet, so gilt für das Bild irgend eines beliebigen Kugelkreises K und dessen Mittelpunkt der Satz:

190. „Wird eine Kugel S aus einem ihrer Punkte P stereographisch auf eine Ebene abgebildet, so ist das Bild eines beliebigen Kugelkreises K stets wieder ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf jener Geraden liegt, welche den Scheitel des der Kugel S, längs des Kreises K, umschriebenen Kegels mit dem Projectionscentrum P verbindet."

§. 236.

Von diesem Satze werden wir an späterer Stelle einige graphische Anwendungen zu machen, Gelegenheit finden. Hier jedoch wollen wir

noch untersuchen, in was irgend ein beliebiges Kugelgebüsch durch inverse Transformation übergeht.

Da jeder Kugel invers wieder eine Kugel, jedem Kreise wieder ein Kreis und jedem Punktepaare des Gebüsches wieder ein Punktepaar in dem inversen Systeme entspricht, so ist zu vermuthen, dass ein Kugelgebüsch invers transformiert auch wieder ein Kugelgebüsch darstellen werde.

Dass diese Annahme thatsächlich begründet erscheine, kann folgendermaßen nachgewiesen werden.

Sei P das Inversionscentrum, Γ das gegebene Kugelgebüsch und M dessen Centrum. Allen Kugeln, Kreisen und Punktepaaren von Γ entsprechen wieder Kugeln, Kreise und Punktepaare, welche zusammengenommen das dem Gebüsche Γ inverse System Γ' bilden.

Sämmtliche Kugeln und Kreise des Gebüsches Γ, welche durch das Inversionscentrum P gehen, schneiden sich noch in einem zweiten festen Punkte R, welcher der dem Punkte P conjugierte Punkt des Gebüsches ist.

Sei nun K_1 ein beliebiger Kreis des Gebüsches Γ, welchem im Systeme Γ' der Kreis K'_1 entspreche, und legen wir durch K_1 jene Kugel, welche durch das Inversionscentrum P, also auch durch den Punkt R geht, so wird dieser Kugel bekanntlich invers die Ebene des Kreises K'_1 entsprechen. Besagte Ebene wird selbstverständlich durch den festen, dem Punkte R invers entsprechenden Punkt R' führen.

Dieser einfachen Betrachtung entnehmen wir also, dass alle Kreise K' des Systems Γ' in Ebenen liegen, die sämmtlich durch den Punkt R' gehen.

Sei weiters a, b ein Punktepaar des Kugelgebüsches Γ, welchem invers das Punktepaar a', b' des Systems Γ' entspreche.

Legen wir durch a, b zwei beliebige Kreise K_1 und K_2 des Gebüsches Γ. Diesen Kreisen entsprechen invers wieder zwei Kreise K'_1 und K'_2, welche durch das Punktepaar a', b' gehen.

Nachdem aber die beiden Punkte a', b' den beiden Kreisen K'_1 und K'_2 angehören, können sie offenbar nur in der Schnittgeraden ihrer Ebenen liegen. Die beiden Kreisebenen gehen aber, wie gezeigt wurde, durch den festen Punkt R'; es muss folglich auch dieser Punkt ihrer Schnittgeraden angehören, d. h. die Verbindungsgerade des Punktepaares a', b' führt gleichfalls durch den festen Punkt R'.

Nachdem ganz das Gleiche von jedem beliebigen Punktepaar des Systems Γ' gilt, so gelangen wir zum folgenden Resultate.

Die Elemente des Systems Γ' bestehen aus Punktepaaren, deren Verbindungsgeraden durch den festen Punkt R' gehen; ferner aus

Kreisen, welche durch solche Punktepaare führen, deren Ebenen mithin ebenfalls durch den festen Punkt R' gehen; endlich aus Kugeln, welche durch die Punktepaare und durch die Kreise des Systems gehen.

Diesen Eigenschaften ist zweifellos zu entnehmen, dass das System Γ' ebenfalls ein Kugelgebüsch sei, dessen Centrum der Punkt R ist.

Das Inversionscentrum P, das Centrum M des Gebüsches Γ und jenes R' des Gebüsches Γ' liegen, wie bereits eingangs gezeigt wurde, auf derselben Geraden; es ist sonach R' der inverse Punkt zu jenem Punkte R, welcher mit dem Inversionscentrum P zusammen ein Punktepaar des Gebüsches $M(\Gamma)$ repräsentiert. Wir gelangen demnach zu dem Satze:

191. „Einem Kugelgebüsche mit dem Centrum M entspricht invers, in Bezug auf ein beliebiges Inversionscentrum P, ebenfalls ein Kugelgebüsch; das Centrum R' des letzteren ist der inverse Punkt zu jenem Punkte R, welcher im Vereine mit dem Inversionscentrum C ein conjugiertes Punktepaar des ersten Gebüsches repräsentiert. Das Inversionscentrum und die Centra der beiden Gebüsche liegen mithin auf einer und derselben Geraden.“

§. 237.

Besitzt das Gebüsch Γ eine Orthogonalkugel, d. h. eine Kugel, welche sämmtliche Kugeln des Gebüsches rechtwinklig schneidet, so ist die inverse Kugel (nach Satz 179) gleichfalls eine solche, von welcher die Kugeln des entsprechenden Gebüsches orthogonal geschnitten werden, d. h. der Orthogonalkugel eines Gebüsches entspricht invers wieder die Orthogonalkugel des inversen Gebüsches. Der vorstehende Satz ist demnach durch folgenden Zusatz zu ergänzen:

192. „Die Orthogonalkugel eines Kugelgebüsches verwandelt sich durch inverse Transformation in die Orthogonalkugel des dem ersten Gebüsche invers entsprechenden Kugelgebüsches.“

§. 238.

Wählt man das Inversionscentrum insbesondere auf der Orthogonalkugel eines Kugelgebüsches, so verwandelt sich das Gebüsch invers in ein zweites Kugelgebüsch und die Orthogonalkugel in eine Ebene, welche sämmtliche Kugeln des letzten Gebüsches orthogonal schneidet. Hieraus folgt, dass das inverse Gebüsch, infolge

der getroffenen Annahme, ein derartiges sei, welches im Vorhergegangenen als „symmetrisches Gebüsch" bezeichnet wurde. Daher der Satz:

193. „Nimmt man das Inversionscentrum auf der Orthogonalkugel eines Kugelgebüsches an, so verwandelt sich das letztere invers in ein symmetrisches Kugelgebüsch, dessen Orthogonalebene die der Orthogonalkugel invers entsprechende Ebene ist."

XV. Capitel.

Das Kugelbündel und das Kugelbüschel.

§. 239.

Seien Γ_1 und Γ_2 zwei beliebige Kugelgebüsche. Es frägt sich, ob dieselben gemeinschaftliche Elemente, d. i. gemeinschaftliche Kugeln, Kreise oder Punktepaare besitzen.

Um dies beurtheilen zu können, nehmen wir einen beliebigen Punkt a an. Bezeichnet M_1 das Centrum und k_1^2 die Potenz des Gebüsches Γ_1, M_2 und k_2^2 hingegen das Centrum und die Potenz des Gebüsches Γ_2, so entspricht in dem ersten Gebüsche dem Punkte a der zugeordnete Punkt a_1 mittelst der Relation:

$$M_1 a \,.\, M_1 a_1 = k_1^2$$

und im zweiten Gebüsche der zugeordnete Punkt a_2, mittelst der Beziehung:

$$M_2 a \,.\, M_2 a_2 = k_2^2.$$

Es ist sonach a, a_1 ein Punktepaar des ersten Gebüsches und jeder durch dasselbe gehende Kreis wird ein Kreis des ersten Gebüsches sein. Ferner ist aber auch a, a_2 ein Punktepaar; es wird daher ebenso jeder durch dasselbe führende Kreis einen Kreis des zweiten Gebüsches darstellen.

Legt man durch die drei Punkte a, a_1 und a_2 einen Kreis, so gehört derselbe sowohl dem ersten als auch dem zweiten Gebüsche an. Dasselbe gilt offenbar auch von allen anderen durch diesen Kreis gehenden Kugeln. Man erhält sonach den Satz:

194. „Zwei beliebige Kugelgebüsche haben unendlich viele Kugeln und unendlich viele Kreise gemein. Durch jeden Punkt des Raumes geht ein solcher Kreis und durch jeden Punkt des Raumes führen

unendlich viele gemeinschaftliche Kugeln, die sämmtlich durch den zugehörenden Kreis gehen.“

§. 240.

Das System der zwei Kugelgebüschen gemeinschaftlichen Kugeln und Kreise bezeichnet man als ein „Kugelbündel“. Die Eigenschaften des Kugelbündels wollen wir nunmehr aus jenen des Kugelgebüsches abzuleiten versuchen.

Im Vorhergehenden wurde bereits gezeigt, dass durch einen beliebigen Punkt im Raume unendlich viele Kugeln des Kugelbündels gehen, d. s. Kugeln, welche beiden Kugelgebüschen Γ_1 und Γ_2 gemeinschaftlich sind. Sehen wir nun nach, wie viele Kugeln durch zwei beliebige Punkte im Raume a und b, den vorstehenden Bedingungen entsprechend, geführt werden können.

Berücksichtigen wir hierbei, dass, mit Zugrundelegung der vorausgeschickten Betrachtungen, die Kugel, welche durch den Punkt a geht, nothwendig auch durch die beiden Punkte a_1 und a_2 führen muss, so findet man sofort, dass durch die beiden Punkte a und b bloß eine Kugel des Kugelbündels, nämlich diejenige gehen kann, welche dem Tetraeder $a a_1 a_2 b$ zu umschreiben möglich ist. Es kann mithin der Satz aufgestellt werden:

195. „Durch zwei beliebige Punkte im Raume geht stets eine, aber auch nur eine Kugel, welche gleichzeitig zwei gegebenen Kugelgebüschen und mithin einem Kugelbündel angehört.“

Da jede dieser Kugeln sowohl die Orthogonalkugel des einen, als auch die Orthogonalkugel des zweiten Kugelgebüsches rechtwinklig durchschneiden muss, so folgt unmittelbar, als eine charakteristische Eigenschaft des Kugelbündels die nachstehende:

196. „Sämmtliche Kugeln und Kreise eines Kugelbündels werden von zwei gewissen festen Kugeln orthogonal geschnitten.“

Diese beiden letztangeführten Kugeln werden „Orthogonalkugeln“ des Kugelbündels genannt.

Durch Umkehrung des obigen Satzes ergibt sich direct der folgende:

197. „Sämmtliche Kugeln und Kreise, welche zwei beliebig gegebene Kugeln orthogonal schneiden, bilden ein Kugelbündel. Dieses Kugelbündel ist den beiden Kugelgebüschen, deren Orthogonalkugeln die gegebenen Kugeln sind, gemeinschaftlich.“

§. 241.

Unter der Annahme, dass M_1 und M_2 die Centra zweier Kugelgebüsche, k_1^2 und k_2^2 die betreffenden Potenzen seien, fanden wir,

dass der Kreis K, welcher durch einen beliebigen Punkt a im Raume geht und den beiden Gebüschen, also auch dem durch diese letzteren bestimmten Kugelbündel angehört, durch die Punkte a_1 und a_2 führe, welche in Verbindung mit a beziehungsweise ein Punktepaar des ersten und zweiten Gebüsches bilden. Nachdem aber die Punkte a_1 und a_2 auf den Geraden aM_1 und aM_2 liegen, ist einleuchtend, dass die Ebene des durch die drei Punkte a, a_1 und a_2 gehenden Kreises, auch die Verbindungsgerade der beiden Centren M_1 und M_2 enthalten müsse. Es folgt daher der Satz:

198. „Die Ebenen sämmtlicher einem Kugelbündel angehörenden Kreise gehen durch eine und dieselbe Gerade.“

Die letztangeführte Gerade wird aus nachstehendem Grunde die „Potenzachse“ des Kugelbündels genannt.

§. 242.

Seien S_1, S_2 und S_3 drei beliebige Kugeln eines Kugelbündels, d. h. drei Kugeln, welche den beiden Gebüschen Γ_1 und Γ_2 gemeinschaftlich sind.

Durch den vorausgeschickten Satz 154) wurde nachgewiesen, dass sämmtliche Punkte, welche in Bezug auf diese drei Kugeln gleiche Potenzen besitzen, auf einer und derselben Geraden, „der Potenzachse“ der drei Kugeln liegen, und dass diese Gerade durch die beiden gemeinschaftlichen Punkte der drei Kugeln gehen müsse, da jeder derselben, in Bezug auf die drei Kugeln, die Potenz Null (also die gleiche Potenz) besitzt.

Nachdem aber die Potenzachse eine Gerade ist, wird dieselbe durch die Angabe zweier ihrer Punkte vollkommen bestimmt sein. Kennt man also zwei Punkte, deren jeder in Bezug auf die drei Kugeln eine gleiche Potenz besitzt, so ist die Potenzgerade die Verbindungslinie dieser beiden Punkte.

Im vorliegenden Falle sind in der That zwei solche Punkte, welche in Bezug auf die drei Kugeln S_1, S_2 und S_3 eine gleiche Potenz besitzen, bekannt. Es sind dies nämlich die beiden Centra M_1 und M_2 der Kugelgebüsche Γ_1 und Γ_2, welchen das Kugelbündel angehört.

Dieser einfachen Betrachtung entnehmen wir, dass die drei beliebig in dem Kugelbündel angenommenen Kugeln S_1, S_2 und S_3 die Gerade $M_1 M_2$ als Potenzachse besitzen, dass also einerseits jedem Punkte dieser Geraden $M_1 M_2$ in Bezug auf die drei Kugeln, die gleiche Potenz entspreche, und dass andererseits die drei Kugeln S_1,

S_2, S_3 die Gerade $M_1 M_2$ in den nämlichen zwei Punkten R_1 und R_2 treffen. Das Gleiche gilt offenbar auch von jeder anderen Kugel des Kugelbündels. Von der Richtigkeit des Gesagten kann man sich leicht die Überzeugung verschaffen, wenn man für eine der drei Kugeln S_1, S_2, S_3, allenfalls für S_3, eine beliebige andere Kugel S_4 des Bündels substituiert. Es gilt daher der Satz:

199. „Sämmtliche Kugeln eines Kugelbündels gehen durch zwei feste Punkte; jeder Punkt auf der Verbindungsgeraden dieser beiden Punkte hat in Bezug auf alle Kugeln des Kugelbündels eine gleiche Potenz, daher auch diese Gerade als die Potenzachse des Kugelbündels bezeichnet wird."

Durch Umkehrung dieses Satzes ergibt sich nachstehende Erzeugungsweise:

200. „Alle Kugeln, welche durch zwei beliebige feste Punkte gehen, erzeugen ein Kugelbündel, dessen Potenzachse die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte ist."

§. 243.

Die eben verzeichnete Eigenschaft leitet direct auf eine weitere, welche ihrerseits wieder die Quelle für mehrere andere bildet.

Ist nämlich p die Potenzachse eines Kugelbündels und sind R_1 und R_2 die beiden festen Punkte, durch welche sämmtliche Kugeln und Kreise des Bündels gehen, so hat, nach dem vorstehenden Satze, jeder beliebige Punkt M von p eine gleiche Potenz in Bezug auf alle Kugeln und Kreise des Kugelbündels, und zwar ist diese Potenz gleich derjenigen, welche der Punkt M in Bezug auf das Punktepaar R_1, R_2 besitzt.

Denkt man sich den Punkt M als Centrum eines Kugelgebüsches, von welchem R_1, R_2 ein Punktepaar darstellt, so ist klar, dass das Kugelbündel diesem Gebüsche angehört; dasselbe gilt von jedem anderen Punkte M auf p, woraus der Satz folgt:

201. „Jedes Kugelbündel gehört unendlich vielen Kugelgebüschen an, deren Centren sämmtlich auf der Potenzachse des ersteren liegen; das Punktepaar des Bündels stellt gleichzeitig ein Punktepaar eines jeden solchen Gebüsches dar."

§. 244.

Unter allen diesen Gebüschen gibt es ein besonderes, nämlich jenes, welches als Centrum den unendlich fernen Punkt der Potenzachse p hat. Dieses Gebüsch ist, wie wir wissen, ein sym-

metrisches. Die Orthogonalebene desselben ist, wie unschwer einzusehen, gleichzeitig auch eine Orthogonal- und Symmetrieebene für das Kugelbündel. Die letztgenannte Ebene ist mithin keine andere als jene, welche im Halbierungspunkte der Strecke RR' senkrecht auf p geführt werden kann. Demnach folgt der Satz:

202. „Jedes Kugelbündel besitzt eine Orthogonal- beziehungsweise Symmetrieebene; dieselbe steht auf der Potenzachse des Bündels senkrecht, und geht durch den Mittelpunkt des gemeinschaftlichen Punktepaares. Die Mittelpunkte aller Kugeln des Bündels liegen auf dieser Ebene.“

§. 245.

Vorher wurde der Satz aufgestellt, dass alle Kugeln, welche zwei gegebene Kugeln orthogonal schneiden, ein Kugelbündel erzeugen. Auf Grund des Satzes 151) ist aber auch bekannt, dass die Mittelpunkte sämmtlicher Kugeln, welche zwei Kugeln gleichzeitig orthogonal schneiden, auf der Potenzebene dieser beiden Kugeln liegen. Besagte Ebene kann, dem vorhergehenden Satze zufolge, nur die Symmetrieebene des Kugelbündels sein.

Weiters wurde auch gefunden, dass ein Kugelbündel als Bestandtheil unendlich vieler Kugelgebüsche anzusehen sei, und dass die Centra all dieser Kugelgebüsche auf der Potenzachse des Bündels liegen. Jedes dieser Gebüsche besitzt eine Orthogonalkugel, und diese muss von sämmtlichen Kugeln des Bündels rechtwinklig geschnitten werden.

Diese Betrachtung führt zu einer interessanten Eigenschaft.

Nehmen wir nämlich an, es sei p die Potenzachse eines Kugelbündels, und es seien auf derselben zwei Punkte M_1 und M_2 als Mittelpunkte zweier Orthogonalkugeln S_1 und S_2 des Bündels gegeben. Die Potenzebene P dieser beiden Kugeln steht auf p senkrecht und enthält die Mittelpunkte aller Kugeln des Bündels.

Nehmen wir einen weiteren beliebigen Punkt M_3 auf p an, und betrachten wir denselben als das Centrum einer dritten Orthogonalkugel S_3 des Kugelbündels, so muss die Potenzebene dieser Kugel und einer der beiden früheren Kugeln S_1 oder S_2 wieder die Mittelpunkte aller Kugeln des Bündels enthalten, und kann diese daher nur die vorher gefundene Ebene P sein.

Nachdem das Gleiche von jeder anderen Orthogonalkugel S'_3... gilt, so folgt, dass die Symmetrieebene P des Kugelbündels gleichzeitig die gemeinschaftliche Potenzebene aller Orthogonalkugeln des Bündels sei.

Setzen wir voraus, dass eine dieser Orthogonalkugeln die Potenzebene P in einem Kreise K schneide, so müssen durch diesen Kreis (nach Satz 150) auch alle übrigen Orthogonalkugeln des Bündels gehen. Es folgt daher der Satz:

203. „Sämmtliche Orthogonalkugeln eines Kugelbündels haben die Symmetrieebene des Kugelbündels zur gemeinschaftlichen Potenzebene; schneidet eine der Orthogonalkugeln diese Ebene in einem Kreise, so gehen durch diesen Kreis auch alle übrigen Orthogonalkugeln hindurch.“

§. 246.

Dass der Mittelpunkt dieses Kreises, welcher der „Orthogonalkreis“ des Kugelbündels genannt wird, auf der Potenzachse des Kugelbündels liegen müsse, ist, auf Grund früherer Auseinandersetzungen, vollkommen erwiesen.

Die Bezeichnung Orthogonalkreis rührt daher, weil der besagte Kreis, wie leicht gezeigt werden kann, alle Kugeln des Bündels rechtwinklig schneidet.

Man sagt nämlich: eine Kugel und ein Kreis schneiden sich in einem Punkte rechtwinklig, wenn die Kreistangente in diesem Punkte auf der Berührebene der Kugel in dem nämlichen Punkte senkrecht steht.

Sind nun S_1 und S_2 zwei Orthogonalkugeln des Kugelbündels, K deren Schnitt, also der Orthogonalkreis, und ist Σ eine beliebige Kugel des Bündels, so hat diese mit dem Kreise K zwei Punkte a und a' gemein. In dem Punkte a schneiden sich sowohl die Kugeln S_1 und Σ, als auch die Kugeln S_2 und Σ rechtwinklig.

Sind also T_1, T_2 und τ die Tangentialebenen der drei Kugeln S_1, S_2 und Σ, so steht sowohl T_1, als auch T_2 auf Σ senkrecht, und es muss daher auch der Schnitt t von T_1 und T_2, d. h. die Kreistangente im Punkte a senkrecht zu τ sein. Es folgt daher der Satz:

204. „Sämmtliche Kugeln eines Kugelbündels schneiden einen und denselben Kreis, welcher in der Symmetrieebene des Bündels liegt und seinen Mittelpunkt im Schnitte dieser Ebene mit der Potenzachse des Bündels hat, orthogonal.“

Nebenbei sei nur erwähnt, dass dieser Kreis, wie man sich leicht überzeugen kann, nicht reell zu sein braucht. Durch Umkehrung des vorstehenden Satzes erhält man den folgenden, welcher sich auf die Erzeugungsart eines Kugelbündels bezieht:

205. *„Sämmtliche Kugeln, welche einen festen Kreis orthogonal schneiden, erzeugen ein Kugelbündel, dessen Symmetrieebene die Kreisebene und dessen Potenzachse die Senkrechte aus dem Kreismittelpunkte auf diese Ebene ist."*

§. 247.

Denken wir uns weiters drei beliebige Kugelgebüsche, die nicht ein und dasselbe Kugelbündel gemein haben. Die Centra dieser Gebüsche seien M_1, M_2, M_3.

Es entsteht nun die Frage, ob die drei Gebüsche irgend welche Elemente gemein haben.

Von vornherein ist einleuchtend, dass die drei Gebüsche keine Punktepaare gemein haben können, denn ein gemeinschaftliches Punktepaar müsste auf einer Geraden liegen, welche gleichzeitig auch die Punkte M_1, M_2 und M_3 enthielte, was, der vorausgesetzten allgemeinen Lage wegen, nicht möglich ist. Da ferner gemeinschaftliche Kreise der drei Gebüsche in Ebenen liegen müssten, welche gleichzeitig die drei Punkte M_1, M_2 und M_3 enthalten, so ist klar, dass gemeinschaftliche Kreise der drei Gebüsche, sobald überhaupt solche vorhanden sind, sich in der Ebene $M_1 M_2 M_3$ vorfinden müssen. Hierauf werden wir an späterer Stelle zurückkommen.

Fragen wir nunmehr vorerst nach den gemeinschaftlichen Kugeln der drei Gebüsche. Ist a ein beliebiger Punkt im Raume, so enthält jede durch denselben gehende Kugel des Gebüsches Γ_1 den ihm conjugierten Punkt a_1; jede durch ihn führende Kugel des zweiten Gebüsches Γ_2, den ihm in diesem Gebüsche conjugierten Punkt a_2, und endlich jede Kugel des Gebüsches Γ_3, welche durch denselben geht, den ihm conjugierten Punkt a_3 dieses Gebüsches.

Hieraus ist zu ersehen, dass durch einen beliebigen Punkt a des Raumes eine, aber auch nur eine einzige Kugel geht, welche den drei Gebüschen M_1, M_2 und M_3 gleichzeitig angehört.

Besagte Kugel ist nämlich jene, welche durch den Punkt a und die drei ihm in Bezug auf die drei Gebüsche conjugierten Punkte a_1, a_2 und a_3 geführt werden kann.

Die Gesammtheit aller Kugeln, welche den drei Kugelgebüschen angehören, nennt man ein

„Kugelbüschel".

Die Eigenschaften eines solchen Büschels lassen sich leicht aus den Potenzeigenschaften des Kugelgebüsches ableiten.

Vor allem beachten wir die drei Orthogonalkugeln der Gebüsche M_1, M_2 und M_3. Jede Kugel des Gebüsches schneidet, wie wir bereits

wissen, die zugehörige Orthogonalkugel rechtwinklig. Die sämmtlichen Kugeln, welche den drei Gebüschen gleichzeitig angehören, also das Kugelbüschel bilden, schneiden mithin auch die drei Orthogonalkugeln rechtwinklig, und es folgt mithin der Satz:

206. „*Die Kugeln eines Kugelbüschels schneiden drei feste Kugeln, deren Mittelpunkte nicht auf einer und derselben Geraden liegen, orthogonal.*"

Durch Umkehrung ergibt sich sofort die Erzeugungsart:

207. „*Sind drei beliebige Kugeln im Raume gegeben, deren Mittelpunkte nicht auf einer und derselben Geraden liegen, so erzeugen alle Kugeln, welche diese drei Kugeln orthogonal schneiden, ein Kugelbüschel.*"

Nach Satz 155) wissen wir aber, dass die Mittelpunkte aller Kugeln, welche drei gegebene Kugeln rechtwinklig schneiden, auf der Potenzachse dieser drei Kugeln liegen, und dass diese Potenzachse auf derjenigen Ebene, welche die Mittelpunkte der drei gegebenen Kugeln verbindet, senkrecht steht.

Dies gibt, wenn wir auf den vorhergehenden Satz Rücksicht nehmen, unmittelbar folgende charakteristische Eigenschaft des Kugelbüschels.

208. „*Die Mittelpunkte aller Kugeln eines Kugelbüschels liegen auf einer und derselben Geraden.*"

§. 248.

Wenden wir uns hiemit wieder der ursprünglichen Darstellung eines Kugelbüschels, als den gemeinschaftlichen Bestandtheil dreier Kugelgebüsche Γ_1, Γ_2 und Γ_3 mit den Centren M_1, M_2 und M_3 zu und nehmen wir an, es seien S_1 und S_2 zwei beliebige Kugeln des Gebüsches.

Die Potenzebene dieser beiden Kugeln wird bestimmt sein, sobald man drei Punkte kennt, welche in Bezug auf diese beiden Kugeln dieselbe Potenz besitzen.

Drei derartige Punkte sind aber offenbar die Centren M_1, M_2 und M_3 der drei Kugelgebüsche. Denn, nach der ursprünglichen Definition des Kugelbüschels gehören die beiden Kugeln S_1 und S_2 dem Gebüsche Γ_1 an; das Centrum M_1 ist daher ein Punkt gleicher Potenz für diese Kugeln. Dasselbe gilt auch von den Centren M_2 und M_3.

Hieraus folgt unmittelbar, dass die Ebene der drei Centren M_1, M_2 und M_3 die Potenzebene der beiden willkürlich gewählten Kugeln des Kugelbüschels, also überhaupt aller Kugeln des Büschels sei.

Aus diesen Ergebnissen lässt sich jedoch noch eine anderweitige Folgerung ziehen. Seien nämlich S_1, S_2 und S_3 drei beliebige Kugeln des Büschels, und P die gemeinschaftliche Potenzebene aller Kugeln desselben.

Die Kugel S_1 schneidet die Ebene P in einem Kreise K. Durch diesen Kreis (der auch imaginär sein kann) muss offenbar jede zweite Kugel S_2, S_3... gehen, wenn derselben im Vereine mit der ersten Kugel S_1 die Ebene P als Potenzebene entsprechen soll (Satz 150).

Dieses Resultat sagt aus, dass sämmtliche Kugeln des Büschels einen und denselben Kreis (reell oder imaginär) enthalten, woraus weiter folgt, dass deren Mittelpunkte auf einer Geraden p, d. i. auf jener Geraden liegen müssen, welche aus dem Mittelpunkte des Kreises auf seine Ebene senkrecht gezogen wird. Mithin der Satz:

209. „Sämmtliche Kugeln eines Kugelbüschels gehen durch einen und denselben (reellen oder imaginären) Kreis.“

Die Umkehrung dieses Satzes liefert den nachstehenden, auf die Erzeugung eines Kugelbüschels bezughabenden Satz:

210. „Sämmtliche Kugeln, welche durch einen festen Kreis gehen, erzeugen ein Kugelbüschel.“

Setzen wir den oben erwähnten Kreis unendlich klein voraus, so folgt weiter:

211. „Sämmtliche Kugeln, welche sich in einem und demselben Punkte berühren, erzeugen ein Kugelbüschel.“

§. 249.

Seien wieder Γ_1, Γ_2 und Γ_3 drei Kugelgebüsche mit den Centren M_1, M_2 und M_3, so ist, wie wir fanden, die Ebene P, welche durch M_1, M_2 und M_3 geht, die gemeinschaftliche Potenzebene aller Kugeln, des den drei Gebüschen gemeinschaftlichen Büschels. Es wird daher auch jeder andere Punkt M_4 dieser Ebene die gleiche Potenz in Bezug auf alle Kugeln des Büschels besitzen.

Nimmt man demgemäß den Punkt M_4 als Centrum eines Kugelgebüsches an, dessen Potenz jener des Punktes M_4 in Bezug auf die Kugeln des Büschels gleich ist, so ist einleuchtend, dass das Kugelbüschel einen Bestandtheil des Gebüsches Γ_4 mit dem Centrum M_4 darstellen müsse.

Der Kreis K_1 in der Ebene P, welcher allen Kugeln des Büschels gemeinschaftlich ist, bildet somit ein Element des Gebüsches Γ_4.

Weiters wird auch die Orthogonalkugel des Gebüsches Γ_4, welche gleichzeitig eine Orthogonalkugel des diesem Gebüsche angehörenden Kreises K ist, eine Orthogonalkugel des Kugelbüschels sein.

Dasselbe gilt von jedem beliebigen anderen Punkte M_4 der Ebene P und dem zugehörigen Kugelgebüsche. Wir erhalten daher die beiden nachstehenden Sätze:

„212. *„Jedes Kugelbüschel kann als Bestandtheil unendlich vieler Kugelgebüsche betrachtet werden; die Centren aller dieser Gebüsche liegen in der Potenzebene des Kugelbüschels und enthalten den allen Kugeln des Büschels gemeinsamen Kreis als Element.“*

Und weiters den Satz:

213. *„Sämmtliche Orthogonalkugeln eines Kugelbüschels haben ihre Mittelpunkte auf der Potenzebene des Büschels und schneiden den in dieser Ebene liegenden gemeinschaftlichen Kreis des Büschels orthogonal.“*

Oder, wenn wir für jene Gerade, welche die Mittelpunkte aller Kugeln eines Kugelbüschels enthält, die Bezeichnung „Achse des Kugelbüschels“ einführen, mit Berücksichtigung des Satzes 205):

214. *„Die Orthogonalkugeln eines Kugelbüschels erzeugen ein Kugelbündel, dessen Potenzachse die Achse des Kugelbüschels ist.“*

§. 250.

Die Potenzebene eines beliebigen Kugelbüschels sei P, und K stelle den in dieser Ebene liegenden gemeinschaftlichen Kreis aller Kugeln des Büschels dar.

Jeder Punkt M_1 in der Ebene P kann, wie wir wissen, als das Centrum eines Kugelgebüsches Γ_1, welchem das Büschel als Bestandtheil angehört, angenommen werden.

Die hiefür hinreichende Bedingung besteht einfach darin, dass man die Potenz des Gebüsches der Potenz des Punktes M_1 in Bezug auf den Kreis K gleichsetzt, oder mit anderen Worten, dass man den Kreis K als Element des Gebüsches betrachtet.

Sind nun zwei solche Gebüsche M_1 und M_2 gegeben, so bestimmen dieselben ein Kugelbündel, dessen Potenzachse die in der Ebene P liegende Verbindungsgerade π_{12} der Punkte M_1 und M_2 ist.

Nachdem die Kugeln des gegebenen Kugelbüschels den beiden Kugelgebüschen M_1 und M_2 angehören, müssen dieselben offenbar auch Elemente des durch die beiden Gebüsche M_1 und M_2 erzeugten Kugelbündels π_{12} sein.

Das Gleiche gilt selbstverständlich von jedem beliebigen Paare von Gebüschen M_1 und M_2, also auch von allen Kugelbündeln, welche den Kreis K enthalten, und deren Achsen π_{12} in der Ebene P liegen. Hiernach folgt der Satz:

215. „Sämmtliche Kugelbündel, welche ihre Achsen auf der Potenzebene eines gegebenen Kugelbüschels haben, und den gemeinsamen Kreis des Büschels als Element enthalten, enthalten auch das gegebene Büschel als Bestandtheil.“

§. 251.

Es kann nun die Frage nach der Bedingung, welche zwei gegebene Kugelbündel erfüllen müssen, damit sie ein und dasselbe Kugelbüschel enthalten, aufgeworfen werden.

Aus dem vorhergehenden Satze 215) folgt unmittelbar, dass, um obiger Forderung zu entsprechen, vor allem die Potenzachsen der Kugelbündel in der Potenzebene des Kugelbüschels liegen müssen, oder mit anderen Worten, die Potenzachsen der gegebenen Kugelbündel müssen einen Punkt M gemein haben.

Diese Bedingung allein jedoch genügt noch nicht; denn, es ist leicht einzusehen, dass, sobald die beiden Kugelbündel gemeinschaftliche Kugeln enthalten, diese Kugeln auch demjenigen Kugelgebüsche, welchem der Punkt M als Centrum entspricht und das eine Bündel enthält, sowie auch jenem Kugelgebüsche angehören müssen, welches das nämliche Centrum M besitzt, und dem, als Element, das zweite Kugelbündel angehört.

Nun können aber zwei Kugelgebüsche mit gemeinschaftlichem Centrum, jedoch verschiedenen Potenzen, auch nicht eine einzige Kugel gemein haben.

Hieraus folgt, dass die beiden Gebüsche mit dem Centrum M in ein und dasselbe Gebüsch zusammenfallen müssen.

Diese Bedingung lässt sich demnach folgendermaßen aussprechen. Sollen zwei Kugelbündel Π und Π' ein Kugelbüschel gemein haben, so ist nothwendig, dass sich ihre Potenzachsen π und π' in einem Punkte M schneiden, und dass beide Kugelbündel dem nämlichen Kugelgebüsche mit dem gemeinsamen Centrum M angehören.

Dass die letztgenannte Bedingung hinreicht, um die gestellte Frage der Beantwortung zuzuführen, ist sofort klar; denn, gehören zwei Kugelbündel einem und demselben Gebüsche an, so ist es auch selbstverständlich, dass die Achsen derselben durch das Centrum dieses Gebüsches gehen, also einen Punkt gemein haben müssen. Hiernach ergibt sich der Satz:

216. „Sollen zwei Kugelbündel ein Kugelbüschel gemein haben, so ist es nothwendig, aber auch hinreichend, dass sie Bestandtheile eines und desselben Kugelgebüsches sind. Die Ebene der beiden Potenzachsen ist sodann die Potenzebene des Büschels.“

§. 252.

Die Potenzachse eines Kugelbündels hat mit sämmtlichen Kugeln desselben zwei feste Punkte gemein. Sind demnach zwei Kugelbündel gegeben und haben dieselben zwei Kugeln S_1 und S_2 gemeinsam, so muss die Potenzachse π_1 des einen Bündels mit der Kugel S_1 die nämlichen Punkte wie mit der Kugel S_2 gemein haben. Letzteres ist offenbar nur dann möglich, wenn die Potenzachse in der Ebene jenes (reellen oder imaginären) Kreises K liegt, welcher sich als Schnitt der beiden Kugeln S_1 und S_2 ergibt, also nur dann, wenn diese in der Potenzebene der beiden Kugeln S_1 und S_2 gelegen ist. Das Gleiche gilt selbstverständlich auch von der Potenzachse π_2 des anderen Kugelbündels.

Es finden sich somit in dem vorliegenden Falle die beiden Potenzachsen π_1 und π_2 in einer und derselben Ebene P, d. i. in der Potenzebene der beiden Kugeln S_1 und S_2 vor. Der Schnittpunkt M dieser Potenzachsen hat die gleiche Potenz in Bezug auf die beiden Kugeln S_1 und S_2 und folglich auch in Bezug auf alle Kugeln der beiden Kugelbündel. Die letzteren gehören somit einem und demselben Gebüsche mit dem Centrum M an.

Mit Rücksichtnahme auf Satz 216) folgt daher, dass einerseits die beiden Kugelbündel ein Kugelbüschel gemein haben, dessen Potenzebene die Potenzebene der beiden Kugeln S_1 und S_2 ist und dass andererseits diese Kugeln selbst, Kugeln des Büschels sind.

Wir erhalten sonach den Satz:

217. „Haben zwei Kugelbündel zwei Kugeln gemein, so haben dieselben unendlich viele gemein. Alle diese Kugeln gehören einem und demselben Kugelbüschel an, dessen gemeinschaftlicher Kreis der Schnittkreis der beiden ersten Kugeln ist.“

§. 253.

Alle Kugeln, welche einen und denselben Kreis K orthogonal schneiden, erzeugen, wie im Satze 205) nachgewiesen wurde, ein Kugelbündel.

Schneidet aber eine Kugel einen Kreis orthogonal, d. h. ist die Tangente an den Kreis in einem der beiden Schnittpunkte senkrecht zu der Tangentialebene der Kugel in dem nämlichen Punkte, so wird jede durch den Kreis gelegte Kugel die gegebene Kugel ebenfalls orthogonal schneiden. Denn die Berührungsebene der durch den Kreis willkürlich gelegten Kugel enthält die Tangente des Kreises in dem Berührungspunkte und steht mithin auch senkrecht zu der Berührungsebene der gegebenen zweiten Kugel.

Hieraus erhellt, dass jede Kugel, welche durch den Orthogonalkreis eines Kugelbündels gelegt wird, eine Orthogonalkugel für dieses Bündel sei. Das genannte Kugelbündel ist also ein Bestandtheil eines jeden Kugelgebüsches, dessen Orthogonalkugel den Orthogonalkreis des Bündels enthält.

Untersuchen wir weiters, welche Lage die Orthogonalkreise K_1 und K_2 zweier Kugelbündel haben müssen, damit den letzteren ein gemeinsames Kugelbüschel entspreche.

Nach Satz 216) müssen die beiden Kugelbündel vor allem einem und demselben Kugelgebüsche angehören. Der vorstehenden Betrachtung gemäß, muss aber die Orthogonalkugel dieses Gebüsches den Kreis K_1 sowohl als auch den Kreis K_2 enthalten.

Hieraus ergibt sich sofort als nothwendige und hinreichende Bedingung, dass die beiden gegebenen Orthogonalkreise K_1 und K_2 einer und derselben Kugel angehören, oder was dasselbe ist, dass dieselben zwei (reelle oder imaginäre) Punkte gemein haben müssen. Die beiden Kugelbündel haben sodann ein Kugelbüschel gemeinschaftlich, dessen Kugeln die beiden Kreise K_1 und K_2 gleichzeitig orthogonal schneiden.

Berücksichtigen wir noch, dass die Potenzachse eines Kugelbündels, dessen Kugeln einen gegebenen Kreis K_1 orthogonal schneiden, jene Gerade ist, welche durch den Mittelpunkt dieses Kreises senkrecht auf seine Ebene gezogen wird, so ist die Potenzebene des vorgenannten Kugelbüschels diejenige Ebene, welche durch die Mittelpunkte der beiden Kreise K_1 und K_2, gleichzeitig aber auch durch den Mittelpunkt der durch diese Kreise führenden Kugel geht.

Dies liefert den nachstehenden Satz, resp. die Erzeugungsweise des Kugelbüschels:

218. „Sämmtliche Kugeln, welche zwei Kreise, die auf einer und derselben Kugel liegen (oder was dasselbe ist, die zwei reelle oder imaginäre Punkte gemein haben), orthogonal schneiden, erzeugen ein Kugelbüschel, dessen Potenzebene diejenige ist, welche sowohl die Mittelpunkte der beiden Kreise, als auch den Mittelpunkt der durch sie gehenden Kugel enthält.“

§. 254.

Besondere, das Kugelbüschel betreffende Sätze.

Sei K der gemeinschaftliche Kreis aller Kugeln eines Kugelbüschels. Die Achse des Büschels ist jene Gerade, welche durch den Mittelpunkt des Kreises K geht und auf dessen Ebene senkrecht steht.

Jeder Punkt auf dieser Achse ist der Mittelpunkt einer durch den Kreis K gehenden Kugel, d. i. einer Kugel des Büschels.

Je weiter sich dieser Punkt von dem Mittelpunkte des Kreises K entfernt, also auf der Achse fortrückt, umso größer wird die entsprechende Kugel des Büschels. Für den Grenzfall, dass der Mittelpunkt der Kugel mit dem unendlich fernen Punkte der Achse des Büschels zusammenfällt, übergeht die durch den Kreis K gehende Kugel, in die Ebene dieses Kreises. Besagte Ebene ist somit ebenfalls als ein Element des Kugelbüschels zu betrachten. Mithin der Satz:

219. „Unter den verschiedenen Kugeln eines Kugelbüschels gibt es eine, deren Radius unendlich groß ist, d. i. die Potenzebene des Büschels.“

§. 255.

Vordem wurde bewiesen (Satz 175), dass alle Kugeln, welche durch einen festen Kreis K_1 gehen, einen beliebigen zweiten Kreis K_2, welcher mit K_1 nicht auf einer und derselben Kugel liegt, in einer Kreisinvolution schneiden. Nachdem alle durch den Kreis K_1 gehenden Kugeln ein Kugelbüschel erzeugen, so kann der citierte Satz auch in folgender Form ausgesprochen werden:

220. „Ein Kugelbüschel bestimmt auf jedem Kreise, der nicht auf einer Kugel des Büschels liegt, eine Kreisinvolution.“

§. 256.

Nachdem die Größe des Radius dieses Kreises ganz willkürlich ist, so kann man anstandslos auch voraussetzen, dass er unendlich groß werde, d. h. in eine Gerade übergehe.

Eine beliebige Gerade wird daher von den Kugeln eines Kugelbüschels in Punktepaaren einer Involution geschnitten und sind hierbei solche Punkte conjugiert, welche einer und derselben Kugel des Büschels angehören. Die Potenzebene schneidet die Gerade in dem Centralpunkte der Involution, da dieselbe als Kugel von unendlich großem Radius betrachtet wird; der ihrem Schnittpunkte mit der Geraden conjugierte Punkt wird mithin in unendlicher Entfernung liegen.

Es lässt sich jedoch auch direct zeigen, dass eine beliebige Gerade g von dem Kugelbüschel in einer Involution geschnitten werde.

Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Potenzebene des Kugelbüschels sei C. Der Punkt C hat, sowie jeder andere Punkt dieser

Ebene die gleiche Potenz k^2 in Bezug auf alle Kugeln des Büschels. Schneidet daher eine beliebige Kugel S des Büschels die Gerade g in zwei Punkten a_1 und a_2, so ist das Product

$$Ca_1 . Ca_2 = k^2,$$

also constant. Die Punktepaare a_1, a_2 bilden daher eine Involution, deren Centralpunkt C und deren Modul k^2 ist. Dies liefert den Satz:

221. „Jede Gerade wird von einem beliebigen Kugelbüschel in einer Involution geschnitten, deren Centralpunkt der Schnittpunkt der Geraden mit der Potenzebene und deren Modul der Potenz dieses Punktes für das Kugelbüschel gleich ist."

§. 257.

Betrachten wir die Schnitte der bisher untersuchten drei Kugelsysteme mit einer Ebene.

Zunächst ist einleuchtend, dass der Schnitt eines Kugelgebüsches Γ mit einer beliebigen Ebene durch alle möglichen in der Ebene liegenden Kreise repräsentiert wird. Denn nach Satz 170) lässt sich durch jeden beliebig im Raume liegenden Kreis, also auch durch jeden Kreis in der gegebenen Ebene, eine Kugel legen, welche dem Gebüsche angehört. Hieraus folgt der Satz:

222. „Der Schnitt eines Kugelgebüsches mit einer beliebigen Ebene wird von allen möglichen Kreisen dieser Ebene dargestellt."

§. 258.

Sei ferner ein beliebiges Kugelbündel mit der Potenzachse p gegeben; dasselbe ist durch eine Ebene E zu schneiden. Es frägt sich, was für ein System die Schnittkreise sämmtlicher Kugeln des Bündels mit der Ebene E erzeugen.

Zunächst ist einleuchtend, dass durch zwei beliebige Punkte der Ebene E nur ein Kreis dieses Systems geht. Denn durch zwei beliebige Punkte geht (nach Satz 195) nur eine einzige Kugel des Bündels und der Schnitt dieser Kugel mit der Ebene ist der oberwähnte Kreis.

Das System der Kreise in der Ebene E hat aber noch eine bestimmte charakteristische Eigenschaft.

Die Ebene E schneidet nämlich die Potenzachse p in einem Punkte P, welcher, wie jeder andere Punkt der Potenzachse, die gleiche Potenz in Bezug auf alle Kugeln des Bündels, also auch die gleiche Potenz in Bezug auf alle Kreise hat, welche sich als Schnitte der durch P gehenden Ebene E mit den Kugeln des Bündels ergeben.

Der Schnitt des Kugelbündels mit der Ebene E ist daher ein System von Kreisen, deren jeder in Bezug auf einen festen Punkt dieselbe Potenz besitzt. Dieses System ist somit das ebene Analogon zum Kugelgebüsch im Raume. Dasselbe wird ein „Kreisbündel" und der feste Punkt das „Centrum des Kreisbündels" genannt.

Wir nennen dieses Gebilde aus dem Grunde nicht ein „Kreisgebüsch", weil es bloß ein System zweiter Stufe ist, während ein „Gebüsche" immer ein System dritter Stufe vorstellt. Man erhält hiernach den Satz:

223. Der ebene Schnitt eines Kugelbündels ist ein Kreisbündel, dessen Centrum der Durchstoßpunkt der schneidenden Ebene mit der Potenzachse des Kugelbündels ist. Die Potenz desselben ist jener gleich, die dem Durchstoßpunkte in Bezug auf die Kugeln des Kugelbündels entspricht."

§. 259.

Der Schnitt eines Kugelbüschels, dessen sämmtliche Kugeln durch den Kreis K gehen mögen, mit einer beliebigen Ebene E ist ein System von Kreisen, deren jeder durch die zwei Punkte M_1 und M_2 geht, in welchem die Ebene E den Kreis K schneidet.

Die sämmtlichen Kreise einer Ebene, welche durch die nämlichen zwei festen Punkte M_1 und M_2 gehen, bilden ein System, welches als räumliches Analogon das Kugelbündel besitzt, da die Elemente desselben ebenfalls durch zwei feste Punkte führen.

Dieses System wird ein „Kreisbüschel" und die beiden festen Punkte dessen „Scheitelpunkte" oder „Basispunkte" genannt.

Die Ebene E schneidet die Potenzebene des Kugelbüschels in einer Geraden p, welche durch die Punkte M_1 und M_2 geht. Jeder Punkt dieser Geraden besitzt in Bezug auf alle Kugeln des Kugelbüschels (K) dieselbe Potenz, also auch die nämliche Potenz in Bezug auf alle Kreise des Kreisbüschels (M_1, M_2). Besagte Gerade heißt daher die „Potenzachse" des Kreisbüschels. Demnach folgt der Satz:

224. „Der ebene Schnitt eines Kugelbüschels ist ein Kreisbüschel, dessen Scheitelpunkte die Schnittpunkte der Ebene mit dem, allen Kugeln gemeinschaftlichen Kreise sind."

§. 260.

Suchen wir ferner noch diejenige Bedingung auf, welche zwei Kugelbüschel erfüllen müssen, damit sie eine Kugel gemein haben.

Seien K_1 und K_2 die beiden Kreise, durch welche sämmtliche Kugeln des einen, beziehungsweise des zweiten Büschels gehen müssen.

Soll eine Kugel sowohl dem einen, als auch dem anderen Büschel angehören, so muss dieselbe durch die beiden Kreise K_1 und K_2 gehen. Es ist daher nothwendig, dass K_1 und K_2 auf derselben Kugel liegen. Diese letztere wird sodann auch das gemeinschaftliche Element der beiden Kugelbüschel darstellen. Es besteht mithin der Satz:

225. „Sollen zwei Kugelbüschel im Raume eine Kugel gemein haben, so ist nothwendig, dass die beiden Kreise, in welchen sich sämmtliche Kugeln des einen, beziehungsweise die des anderen Büschels schneiden, auf einer und derselben Kugel liegen. Die letztere stellt sodann das gemeinschaftliche Element der beiden Kugelbüschel dar.“

§. 261.

Haben zwei Kugelbüschel zwei Kugeln gemeinschaftlich, so müssen durch den Schnittkreis der beiden Kugeln sowohl die Kugeln des einen Büschels, als auch jene des zweiten Büschels gehen. Hieraus ergibt sich unmittelbar, dass die beiden Kugelbüschel identisch seien, woraus der Satz folgt:

226. „Haben zwei Kugelbüschel zwei Kugeln gemein, so gilt das Gleiche von allen übrigen Kugeln; diese Büschel sind also identisch.“

§. 262.

In einer Ebene E sei ein Kreisbündel mit dem Centrum M und der Potenz k^2, sowie außerhalb der Ebene ein beliebiger Punkt A_1 gegeben.

Legt man durch jeden Kreis des Kreisbündels und durch den festen Punkt A_1 eine Kugel, so erhält man, wie sich ohne Schwierigkeit nachweisen lässt, ein Kugelbündel.

Sei nämlich K_1 ein beliebig gewählter Kreis des Bündels M. Die durch denselben und durch den festen Punkt A_1 gelegte Kugel S_1 wird die Verbindungsgerade MA_1 noch in einem zweiten Punkte A_2 schneiden. Da diese Kugel den Kreis K_1 enthält, so muss der Punkt M nicht bloß in Bezug auf den Kreis K_1, sondern auch in Bezug auf die durch denselben gehende Kugel S_1 die Potenz k^2 besitzen; es wird daher:

$$MA_1 \cdot MA_2 = k^2$$

sein. Durch diese Relation wird der Punkt A_2 vollkommen und zwar unabhängig von dem Kreise K_1 bestimmt.

Hieraus folgt, dass alle Kugeln, welche durch die Kreise des Kreisbüschels (M) und durch den festen Punkt A_1 gehen, auch noch

einen zweiten festen Punkt A_2 der Geraden MA_1 enthalten, also ein Kugelbündel mit der Potenzachse MA_1A_2 erzeugen. Dieses Ergebnis liefert den Satz:

227. „Alle Kugeln, welche durch die Kreise eines ebenen Kreisbündels und nebstbei durch einen festen Punkt des Raumes gehen, enthalten noch einen zweiten festen Punkt der Verbindungsgeraden des gegebenen Punktes mit dem Centrum des Kreisbündels; dieselben bilden daher ein Kugelbündel, dessen Potenzachse diese Gerade ist.“

§. 263.

Sei ein ebenes Kreisbüschel mit den beiden Scheitelpunkten M_1 und M_2, sowie außerhalb seiner Ebene ein beliebiger Punkt P gegeben.

Sämmtliche Kugeln, welche durch die Kreise des Büschels und durch den Punkt P gelegt werden, enthalten offenbar die drei Punkte M_1, M_2, P, und mithin auch den durch diese drei Punkte gelegten Kreis K.

Hieraus folgt, dass diese Kugeln ein Kugelbüschel erzeugen, dessen Potenzebene die Ebene der drei Punkte M_1, M_2, P und dessen Basiskreis K ist.

Demnach erhalten wir unmittelbar den Satz:

228. „Sämmtliche Kugeln, welche durch die Kreise eines ebenen Kreisbüschels und durch einen festen außerhalb der Ebene des Büschels liegenden Punkt gehen, bilden ein Kugelbüschel; die Kugeln dieses Büschels schneiden sich in jenem Kreise, welcher durch den gegebenen Punkt und durch die Basispunkte (Scheitelpunkte) des Kreisbüschels gelegt wird. Die Ebene dieser drei Punkte ist die Potenzebene des Kugelbüschels.“

§. 264.

Jedes Kreisbündel besitzt einen Orthogonalkreis, d. i. jenen Kreis, welcher aus dem Centrum des Bündels, als Mittelpunkt, und mit der Quadratwurzel aus der Potenz, als Radius, beschrieben wird. Dieser Kreis schneidet alle Kreise des Kreisbündels rechtwinklig.

Sei nun K_0 der Orthogonalkreis eines Kreisbüschels und K ein beliebiger Kreis des Büschels; die Tangenten in jedem der den beiden Kreisen K_0 und K gemeinschaftlichen Punkte a und b stehen auf einander senkrecht.

Denken wir uns den Kreis K_0 als größten Kreis einer Kugel S_0, so wird offenbar jeder Kreis K des Kreisbündels diese Kugel orthogonal schneiden, also auch jede durch einen Kreis des Bündels gelegte

Kugel diese Kugel rechtwinklig treffen. Stellen wir uns weiters diese Kugel S_0 als Orthogonalkugel eines Kugelgebüsches vor, so wird jede Kugel des Gebüsches die Ebene des Kreisbündels in einem Kreise, in Bezug auf welchen das Centrum M des Gebüsches die Potenz k^2 hat, schneiden. Besagter Kreis wird somit dem Kreisbündel mit dem Orthogonalkreise K_0 angehören. Dies gibt den Satz:

229. „Legt man durch den Orthogonalkreis eines Kreisbüschels, als größten Kugelkreis, eine Kugel und betrachtet diese Kugel als Orthogonalkugel eines Kugelgebüsches, so ist der Schnitt dieses Gebüsches mit der Ebene des Kreisbündels, dieses letztere selbst."

Nebenbei sei hier der Vergleich des vorstehenden Satzes mit dem Satze 222) angeregt und auf die Beachtung der Ausnahme hingewiesen, welche diesfalls bezüglich einer durch das Centrum des Gebüsches gehenden Ebene gilt.

§. 265.

Ein ebenes Kreisbündel mit dem Orthogonalkreise K_0 und außerdem eine beliebige Kugel S'_0 im Raume sind gegeben; es ist zu untersuchen, was für ein System diejenigen Kugeln erfüllen, welche durch die Kreise des Kreisbündels und orthogonal zu der gegebenen Kugel S'_0 gelegt werden.

Unter Berufung auf den vorhergehenden Satz kann der Orthogonalkreis K_0 als größter Kreis einer Kugel S_0 angenommen werden; ferner enthält jede Kugel, welche diese Kugel orthogonal schneidet, einen Kreis des Bündels.

Die gesuchten Kugeln haben daher die Eigenschaft, beide Kugeln S_0 und S'_0 orthogonal zu schneiden. Umgekehrt wird jede Kugel, welche S_0 und S'_0 orthogonal schneidet, einen Kreis des Bündels enthalten.

Nachdem aber (Satz 197) alle Kugeln, welche zwei gegebene Kugeln orthogonal schneiden, ein Kugelbündel erzeugen, dessen Potenzachse die Verbindungsgerade der Mittelpunkte jener Kugeln ist und als dessen Orthogonalkreis der Schnittkreis der beiden Orthogonalkugeln resultiert, so ergibt sich sofort der nachstehende Satz resp. die Erzeugungsweise:

230. „Die Kugeln, welche durch die Kreise eines Kreisbündels gehen und eine gegebene Kugel orthogonal schneiden, erzeugen ein Kugelbündel, dessen Potenzachse die Verbindungsgerade des Mittelpunktes der gegebenen Kugel mit dem Centrum des Kreisbündels ist."

§. 266.

Ein Kreisbüschel mit den Scheitelpunkten A_1 und A_2, sowie eine beliebige Kugel S_0 sind gegeben; es wird um das System der Kugeln gefragt, welche durch die Kreise des Büschels (A_1, A_2) gehen und die gegebene Kugel S_0 orthogonal schneiden.

Denken wir uns zu diesem Zwecke auf der Potenzachse $A_1 A_2$ des Kreisbüschels zwei beliebige Punkte M_1 und M_2 angenommen und betrachten wir dieselben als Centren zweier Kreisbündel, welche beide das Kreisbüschel (A_1, A_2) enthalten.

Hiefür ist die nothwendige, aber auch hinreichende Bedingung, dass die beiden Scheitelpunkte A_1 und A_2 als Punktepaar des Kreisbündels M_1 sowohl, als auch des Bündels M_2 aufgefasst werden, oder kurz, dass als die diesbezüglichen Potenzen k_1^2 und k_2^2 der besagten Kreisbündel beziehungsweise die Werte $M_1 A_1 . M_1 A_2$ und $M_2 A_1 . M_2 A_2$ angenommen werden.

Jedes dieser Kreisbündel bestimmt sodann, auf Grund des vorhergehenden Satzes, ein Kugelbündel, mit der Kugel S_0 als Orthogonalkugel. Der Schnitt der beiden Kugelbündel mit der Ebene des Kreisbüschels $A_1 A_2$ sind sodann die beiden vorgenannten Kreisbündel M_1 und M_2.

Andererseits gehören aber diese beiden Kugelbündel auch einem und demselben Kugelgebüsche und zwar jenem an, dessen Orthogonalkugel die gegebene Kugel S_0 repräsentiert. Dieselben haben daher ein Kugelbüschel gemein, für welches die Kugel S_0 ebenfalls eine Orthogonalkugel ist. Besagtes Kugelbüschel schneidet die Ebene in einem Kreisbüschel, welches offenbar den beiden Kreisbündeln M_1 und M_2 angehören muss, also nur das gegebene Kreisbüschel (A_1, A_2) sein kann.

Hieraus entnehmen wir, dass die Kugeln, welche durch die Kreise des Büschels (A_1, A_2) gehen und die Kugel orthogonal schneiden, ein Kugelbüschel erzeugen.

Die Potenzebene dieses Kugelbüschels geht selbstverständlich durch die Scheitelpunkte A_1 und A_2 des Kreisbüschels und durch den Mittelpunkt der gegebenen Kugel. Es folgt mithin der Satz resp. die Erzeugungsweise:

231. „Sämmtliche Kugeln, welche durch die Kreise eines gegebenen Kreisbüschels gehen und außerdem eine gegebene Kugel orthogonal schneiden, erzeugen ein Kugelbüschel, dessen Potenzebene durch den Mittelpunkt der gegebenen Kugel und durch die Scheitelpunkte des Kreisbüschels geht.“

§. 267.

Denkt man sich die gegebene Kugel in den beiden letztangestellten Betrachtungen und den daraus hervorgegangenen Sätzen, als eine solche, die einen unendlich großen Radius hat, also in eine Ebene übergeht, so folgen die beiden Specialsätze:

232. „*Sämmtliche Kugeln, welche durch die Kreise eines gegebenen ebenen Kreisbündels gehen und deren Mittelpunkte auf einer gegebenen Ebene liegen, erzeugen ein Kugelbündel, dessen Potenzachse das Perpendikel vom Centrum des Kreisbündels auf die gegebene Ebene ist.*“

Und weiters der Satz:

233. „*Sämmtliche Kugeln, welche durch die Kreise eines ebenen Kreisbüschels gehen und deren Mittelpunkte auf einer gegebenen Ebene liegen, erzeugen ein Kugelbüschel, dessen Potenzebene jene ist, die durch die Potenzachse des Kreisbüschels senkrecht auf die gegebene Ebene gelegt wird.*“

§. 268.

Das sphärische Kreisbüschel und Kreisbündel.

Ähnliche Sätze und Erzeugungsweisen, wie die eben entwickelten, wird man gewinnen, wenn man statt der ebenen Kreisbüschel und Kreisbündel sphärische Kreisbüschel und Kreisbündel einführen würde.

Unter einem sphärischen Kreisbündel versteht man nämlich den Schnitt eines Kugelbündels mit einer beliebigen, dem Kugelbündel nicht angehörenden Kugel; unter einem sphärischen Kreisbüschel dagegen fasst man den Schnitt eines Kugelbüschels mit einer beliebigen, dem Büschel nicht angehörenden Kugel auf, versteht man also die Gesammtheit der Kreise auf einer Kugel, welche durch die nämlichen zwei Punkte gehen.

In eine specielle Entwicklung dieser Eigenschaften wollen wir uns jedoch an dieser Stelle nicht einlassen, werden aber in der Folge Gelegenheit finden, hierauf zurückzukommen und einige diesbezügliche Untersuchungen anzustellen.

§. 269.

Fragen wir zunächst in was für ein Kugelsystem sich ein Kugelbündel, beziehungsweise ein Kugelbüschel durch inverse Transformation verwandelt. Diese Frage ist unschwer zu beantworten.

Im Vorhergegangenen wurde nämlich bereits erwiesen, dass man ein Kugelbündel immer als Bestandtheil zweier (eigentlich unendlich

vieler Kugelgebüsche) betrachten könne, und weiters wurde auch gefunden, dass ein Kugelgebüsch durch inverse Transformation sich wieder in ein Kugelgebüsch verwandle.

Sind daher Γ_1 und Γ'_1 zwei beliebige Kugelgebüsche und Σ_1 das denselben gemeinschaftliche Kugelbündel, ist ferner J ein beliebig gewähltes Inversionscentrum, so verwandeln sich die beiden Kugelgebüsche Γ_1 und Γ'_1 wieder in zwei Kugelgebüsche Γ_2 und Γ'_2, und es ist gleichzeitig einleuchtend, dass jede Kugel des Kugelbündels Σ_1, d. h. jede Kugel, die den beiden Gebüschen Γ_1 und Γ'_1 gemeinschaftlich ist, in eine Kugel verwandelt wird, welche den Kugelgebüschen Γ_2 und Γ'_2 gemeinschaftlich ist, also dem durch diese beiden Gebüsche bestimmten Kugelbündel Σ_2 angehören muss.

Zu demselben Resultate gelangen wir aber auch durch folgende Betrachtung.

Ein Kugelbündel wird, wie uns bereits geläufig, auch von allen jenen Kugeln gebildet, welche zwei beliebig gegebene Kugeln orthogonal schneiden. Sind demnach S_1 und S'_1 zwei Orthogonalkugeln eines beliebigen Kugelbündels, die wir vermittelst reciproker Radien transformieren, so werden sich einerseits die beiden Kugeln S_1 und S'_1 in zwei andere Kugeln S_2 und S'_2 und andererseits jede Kugel des Kugelbündels Σ_1, welche die Kugeln S_1 und S'_1 orthogonal schneidet (nach Satz 179) wieder in eine Kugel verwandeln, welche die beiden Kugeln S_2 und S'_2 orthogonal schneidet, mithin wieder einem Kugelbündel Σ_2 angehört. Der Schnittkreis der beiden Kugeln S_1 und S'_1 ist der Orthogonalkreis des Bündels Σ_1, während der Schnittkreis der Kugeln S_2 und S'_2 der Orthogonalkreis des Kugelbündels Σ_2 sein wird.

Nachdem sich diese beiden Kreise, als Schnitte inverser Kugeln, entsprechen, so folgt der Satz:

234. „Ein beliebiges Kugelbündel verwandelt sich durch inverse Transformation wieder in ein Kugelbündel, wobei der Orthogonalkreis des ersteren durch Inversion wieder in den Orthogonalkreis des zweiten übergeht.“

§. 270.

Ebenso leicht ist nachzuweisen, dass ein Kugelbüschel durch inverse Transformation wieder in ein Kugelbüschel verwandelt wird.

Man kann diesfalls entweder von dem Standpunkte ausgehen, unter dessen Festhalten ein Kugelbüschel stets als Bestandtheil dreier verschiedener Kugelgebüsche darstellbar ist, und das ihm inverse System wieder einen Bestandtheil der diesen drei Gebüschen invers entsprechenden Kugelgebüsche, also ebenfalls ein Kugelbüschel dar-

stelle, oder man geht von der Eigenschaft aus, dass alle Kugeln, welche einem Kugelbüschel angehören, durch einen und denselben Kreis K gehen.

Dieser Kreis transformiert sich invers wieder in einen Kreis, durch welchen die den Kugeln des Büschels invers entsprechenden Kugeln gehen müssen. Die letztgenannten Kugeln erzeugen daher wieder ein Kugelbüschel, und man gelangt demnach zu dem Satze:

235. „Ein Kugelbüschel verwandelt sich durch inverse Transformation wieder in ein Kugelbüschel, und zwar entsprechen sich diejenigen beiden Kreise invers, in welchen sich sämmtliche Kugeln des ursprünglichen, beziehungsweise des transformierten Büschels schneiden. Die Potenzebene des transformierten Kugelbüschels entspricht invers derjenigen Kugel des ursprünglichen Kugelbüschels, welche durch das Inversionscentrum geht und umgekehrt."

Der letzte Theil dieses Satzes ergibt sich sofort, wenn man in Erwägung zieht, dass ein Kreis in einer Ebene durch Inversion in einen Kreis übergeht, welcher auf der der Ebene desselben invers entsprechenden und daher durch das Inverscentrum gehenden Kugel liegt.

§. 271.

Untersuchen wir nunmehr, was für ein System alle jene Kugeln bilden, welche durch die Kreise eines sphärischen Kreisbündels gehen, und eine gegebene Kugel orthonogal schneiden.

Die Kugel, auf welcher das sphärische Kreisbündel liegt, sei S. Das Letztere sei erzeugt als Schnitt der Kugel S mit einem Kugelbündel p. Die Kugeln, welche durch die Kreise dieses sphärischen Kreisbündels gehen und die gegebene Kugel S_0 orthogonal durchschneiden, mögen ein Kugelsystem erzeugen, das wir mit Σ bezeichnen wollen.

Transformieren wir mittelst reciproker Radien derart, dass wir das Transformationscentrum J auf der Kugel S, welche das Kreisbündel trägt, annehmen. Hierbei verwandelt sich die Kugel S in eine Ebene S', das (das Kreisbündel erzeugende) Kugelbündel p wieder in ein Kugelbündel p', und ebenso die Kugel S_0 in eine zweite Kugel S'_0.

Es ist einleuchtend, dass dem sphärischen Kreisbündel (S,p), als Schnitt der Kugel S mit dem Kugelbündel p invers der Schnitt der Ebene S' mit dem Kugelbündel p', also ein ebenes Kreisbündel (S',p') entsprechen muss.

Ist nun K eine beliebige Kugel des Systems Σ, d. h. eine Kugel, welche durch einen Kreis des sphärischen Büschels (S, p) geht

und die Kugel S_0 orthogonal schneidet, so wird die ihr invers entsprechende Kugel K' durch einen Kreis des ebenen Bündels (S', p') gehen und die Kugel S'_0 gleichfalls orthogonal schneiden.

Das von der Kugel K' erzeugte System Σ' ist (nach Satz 230) ein Kugelbündel; es muss daher auch das System Σ ein solches darstellen. Wir gelangen auf diese Weise zu dem Satze:

236. „Sämmtliche Kugeln, welche durch die Kreise eines sphärischen Kreisbündels gehen, und eine beliebig gegebene Kugel orthogonal schneiden, erzeugen ein Kugelbündel.“

§. 272.

Ertheilt man der im vorstehenden Satze genannten und als „beliebig gegeben“ bezeichneten Kugel verschiedene Lagen im Raume, so erhält man auch verschiedene Kugelbündel, welche durch das sphärische Kreisbündel gehen. Als natürliche Folge ergibt sich daher der Satz:

237. „Durch ein sphärisches Kreisbündel können unendlich viele Kugelbündel gelegt werden, indem jede Kugel im Raume als eine Orthogonalkugel eines solchen Kugelbündels betrachtet werden kann.“

§. 273.

Aus dem Satze 237) folgt unmittelbar der nachstehende speciellere, wenn man die gegebene Kugel auf einen Punkt reduciert:

238. „Sämmtliche Kugeln, welche durch die Kreise eines sphärischen Kreisbündels, und nebstbei durch einen beliebigen Punkt im Raume gehen, erzeugen ein Kugelbündel.“

Ebenso kann man den Radius der gegebenen Orthogonalkugel ins Unbegrenzte wachsen lassen, für die Kugel also eine Ebene substituieren. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich der Specialfall des Satzes 237):

239. „Sämmtliche Kugeln, welche durch die Kreise eines sphärischen Kreisbündels gehen und ihre Mittelpunkte auf einer gegebenen Ebene haben, erzeugen ein Kugelbündel.“

§. 274.

Aus dem Satze 237) kann noch ein zweiter sehr interessanter Satz gefolgert werden.

Ein ebenes Kreisbündel mit dem Orthogonalkreise K, sowie ein beliebiges sphärisches Kreisbündel auf einer Kugel S seien gegeben.

Wird, wie wir in einem vorhergegangenen Falle sahen, durch den Orthogonalkreis K, als größten Kreis, eine Kugel S_0 gelegt, so wird jede Kugel, welche diese letztangeführte Kugel orthogonal schneidet, die Ebene in einem Kreise des Kreisbündels treffen.

Betrachten wir jenes Kugelbündel, welches (nach Satz 237) durch die Kreise des sphärischen Kreisbündels auf S geht und die Kugel S_0 orthogonal schneidet, so ergibt sich (nach Satz 289) sofort, dass dieses Kugelbündel auch das ebene Kreisbündel enthält, oder mit anderen Worten, dass letzteres ein Schnitt des ersteren ist. Hiernach der Satz:

240. „Durch ein beliebiges sphärisches Kreisbündel und durch ein beliebiges ebenes Kreisbündel lässt sich stets ein Kugelbündel legen.“

§. 275.

Der vorstehende Satz kann durch Anwendung der inversen Transformation sowohl verallgemeinert, als auch specialisiert werden.

Nimmt man nämlich das Inversionscentrum beliebig im Raume an, so verwandelt sich sowohl das sphärische, als auch das ebene Kreisbündel in ein sphärisches Kreisbündel.

Nimmt man hingegen das Inversionscentrum auf den beiden Trägern (auf der Ebene und auf der Kugel S, also auf dem Schnittkreise beider) an, so übergehen beide Kreisbündel in ebene Kreisbündel und man hat demgemäß die Sätze:

241. „Durch zwei sphärische Kreisbündel lässt sich stets ein Kugelbündel legen“

und:

242. „Durch zwei ebene Kreisbündel kann stets ein Kugelbündel gelegt werden.“

§. 276.

Die drei letzten Sätze gestatten noch eine anderweitige Ausdrucksform.

Die Kreise der beiden Bündel können nämlich einander eindeutig zugeordnet werden, wenn man solche Kreise als entsprechende annimmt, welche auf einer und derselben Kugel des Kugelbündels liegen. Die vorhergehenden drei Sätze nehmen sodann folgende Gestalt an:

243. „Die Kreise zweier beliebig angenommenen Kreisbündel (gleichgiltig ob diese beiden Kreisbündel ebene oder sphärische sind, oder ob das eine eben, das andere aber sphärisch ist) können stets

ein-deutig einander derart zugeordnet werden, dass zwei entsprechende Kreise immer auf einer Kugel eines Kugelbündels liegen."

§. 277.

Ferner wurde bewiesen (Satz 231), dass alle Kugeln, welche durch die Kreise eines ebenen Kreisbüschels gehen und eine gegebene Kugel orthogonal schneiden, ein Kugelbüschel erzeugen. Dieser Satz lässt sich durch Inversion verallgemeinern, indem man das ebene Kreisbüschel in ein sphärisches Kreisbüschel verwandelt. Es ergibt sich dann sofort der Satz:

244. „*Sämmtliche Kugeln, welche durch die Kreise eines sphärischen Kreisbüschels gehen und eine Kugel orthogonal schneiden, erzeugen ein Kugelbüschel.*"

Dieser Satz kann auf zweifache Weise specialisiert werden; einmal dadurch, dass man die gegebene Orthogonalkugel auf einen Punkt reduciert, das anderemal dadurch, dass man diese Kugel unendlich groß werden lässt, also durch eine Ebene ersetzt. Dies gibt die beiden Sätze:

245. „*Sämmtliche Kugeln, welche durch die Kreise eines sphärischen Büschels und durch einen festen Punkt gehen, erzeugen ein Kugelbüschel*"

und:

246. „*Sämmtliche Kugeln, welche durch die Kreise eines sphärischen Büschels gehen und deren Mittelpunkte auf einer gegebenen Ebene liegen, erzeugen ein Kugelbüschel.*"

XVI. Capitel.

Theorie der Kugelberührung und der Ähnlichkeitspunkte.

§. 278.

Jede Berührebene einer Kugel kann als der Grenzfall der schneidenden Ebene, wenn sich der Schnittkreis auf einen Punkt reduciert, betrachtet werden. Diesen Punkt pflegt man in der obigen Bedeutung einen „Punktkreis" zu nennen.

Zwei Kugeln berühren sich in einem Punkte A, wenn sie in diesem Punkte eine gemeinschaftliche Berührebene besitzen, also den Punktkreis A gemein haben.

Denken wir uns vor allem im Raume einen beliebigen Kreis K, sowie eine Ebene E, welche den Kreis K in nicht reellen Punkten treffe und stellen wir die Frage, ob es Kugeln gebe, welche einerseits durch den Kreis K gehen und andererseits die Ebene E berühren.

Wir wissen diesbezüglich, dass sämmtliche durch den Kreis K gehende Kugeln ein Kugelbüschel bilden, und dass dieses Kugelbüschel von der Ebene E in einem Kreisbüschel geschnitten wird. Die beiden möglichen „Punktkreise" dieses Kreisbüschels repräsentieren die Berührungspunkte der zwei möglichen Berührebenen.

Von der Möglichkeit, dass es zwei solcher Kugeln gibt, welche durch einen gegebenen Kreis K gehen und eine gegebene Ebene E berühren, kann man sich durch directe Construction dieser Kugeln leicht überzeugen.

Ist nämlich g die Schnittgerade der gegebenen Ebene E mit der Ebene des Kreises K und nehmen wir auf g einen beliebigen Punkt P_1 an, so ist die Potenz desselben, in Bezug auf die zu suchende durch K gehende Berührungskugel, gleich der Potenz desselben, in Bezug auf den Kreis K.

Zieht man also durch P_1 eine Tangente an den Kreis K, welche diesen im Punkte a_1 berühren mag, so ist die Strecke $P_1 a_1$ die Länge aller von P_1 aus, an die Kugel geführten Tangenten. Es ist sonach einleuchtend, dass der Berührungspunkt der zu suchenden Kugel mit der Ebene E auf jenem Kreise k_1 liegen müsse, welcher in dieser Ebene, aus dem Punkte P_1 als Mittelpunkt und dem Radius $r_1 = P_1 a_1$, beschrieben wird.

Denken wir uns einen zweiten Punkt P_2 auf der Geraden g gewählt und von demselben eine Tangente $P_2 a_2$ an den gegebenen Kreis K gezogen, sowie weiters aus dem Mittelpunkte P_2 in der Ebene einen Kreis k_2 mit dem Radius $r_2 = P_2 a_2$ gezeichnet, so wird auf demselben ebenfalls der Berührungspunkt der gesuchten Kugel liegen müssen.

Nachdem sich nun die Kreise k_1 und k_2 in zwei Punkten B_1 und B_2 schneiden, so gibt es zwei verschiedene Kugeln, welche, der gestellten Forderung gemäß, die Ebene E beziehungsweise in B_1 und B_2 berühren.

Infolge der Symmetrie der Ebene E und des Kreises K gegen jene Ebene e, welche durch den Mittelpunkt des letzteren senkrecht zur Geraden g gelegt wird, findet man leicht, dass die Mittelpunkte der beiden Berührungskugeln in dieser Ebene liegen müssen und dass die Berührungspunkte B_1 und B_2 derselben mit der Ebene E auf der Schnittgeraden der letzteren mit der vorgenannten Symmetrieebene e sich vorfinden müssen.

Schneidet der Kreis K die Ebene E in zwei reellen Punkten A und B, so ist durch denselben offenbar keine Kugel möglich, welche die Ebene E berühren würde, weil jede durch den Kreis K gelegte Kugel die Ebene E in einem durch die Punkte A und B gehenden Kreise schneidet.

Berührt insbesondere der Kreis K die Ebene E in einem Punkte A, so kann der Berührungspunkt der Ebene E mit der zu suchenden Kugel selbstverständlich nur der Punkt A sein, indem jede durch den Kreis K gelegte Kugel die Ebene E in einem durch A gehenden Kreise schneidet.

Errichtet man im Punkte A eine Senkrechte AC auf die Ebene E, so wird diese den Mittelpunkt C der gesuchten Kugel enthalten. Der Mittelpunkt C liegt aber bekanntlich auch auf der Geraden mC, welche aus dem Mittelpunkte m des Kreises K auf dessen Ebene normal gezogen wird; es ist somit C der Schnittpunkt der beiden Geraden AC und mC. Hieraus ist gleichzeitig zu entnehmen, dass in diesem Falle nur eine einzige Kugel existiert, welche der gestellten Forderung entspricht.

Wir erhalten somit den Satz:

247. „Durch einen gegebenen Kreis kann man zwei (reelle) Kugeln legen, welche eine gegebene Ebene berühren, wenn die letztere mit dem Kreise keine reellen Punkte gemein hat; dagegen kann nur eine (reelle) Kugel gelegt werden, wenn der gegebene Kreis die gegebene Ebene berührt und endlich ist keine (reelle) Kugel zu legen möglich, wenn der Kreis die Ebene in zwei reellen Punkten schneidet.“

§. 279.

Dieser Satz kann durch Anwendung der Inversion sofort verallgemeinert werden, wenn man die gegebene Ebene invers in eine Kugel verwandelt. Der verallgemeinerte Satz wird dann lauten:

248. „Durch einen gegebenen Kreis kann man zwei Kugeln legen, welche eine gegebene Kugel berühren, wenn der Kreis die letztere nicht reell schneidet; eine Kugel, wenn der Kreis die gegebene Kugel berührt und keine (reelle) Kugel, wenn der Kreis die gegebene Kugel reell schneidet.“

§. 280.

Zu dem gleichen Resultate gelangen wir auch durch eine directe Untersuchung, welche gleichzeitig die constructive Lösung der Aufgabe liefert.

Sei nämlich S die gegebene Kugel und K der gegebene Kreis, von welchem wir voraussetzen wollen, dass er die Kugel S nicht (reell) schneidet.

Denken wir uns, was unter allen Umständen möglich ist, durch den Kreis K eine beliebige Kugel S_1 derart gelegt, dass sie die gegebene Kugel S in einem reellen Kreise K_1 treffe. Die Ebenen der Kreise K und K_1 schneiden sich in einer Geraden g. Jeder Punkt P dieser Geraden hat, da dieselbe in der Potenzebene der beiden Kugeln S und S_1 (Ebene des Schnittkreises K_1 dieser Kugeln) liegt, die gleiche Potenz in Bezug auf die Kugel S und den der Kugel S_1 angehörenden Kreis K, mithin auch die gleiche Potenz in Bezug auf jede durch den gegebenen Kreis K gelegten Kugel, sowie in Bezug auf die gegebene Kugel selbst. Mit anderen Worten: Die Potenzebene der gegebenen Kugel S und einer jeden durch den Kreis K gelegten Kugel muss durch die Gerade g gehen.

Unter den durch den Kreis gehenden Kugeln befinden sich aber auch diejenigen, welche die Kugel S berühren.

Ist S'_b eine solche Kugel, so muss, wie wir eben fanden, die Potenzebene dieser Kugel S'_b und der gegebenen Kugel S nothwendig durch die Gerade g gehen. Andererseits ist aber die Potenzebene zweier sich berührenden Kugeln die Tangentialebene in ihrem Berührungspunkte.

Die Potenzebene wird also diesfalls eine von den zwei Tangentialebenen sein, welche man durch die Gerade g an die gegebene Kugel S legen kann und deren Berührungspunkt B_1 mit dieser Kugel wird auch den Berührungspunkt mit der zu suchenden Kugel S'_b darstellen. Letztere ist somit durch diesen Berührungspunkt B_1 und durch den Kreis K vollständig bestimmt.

Die zweite durch g gelegte Tangentialebene der gegebenen Kugel S berührt diese letztere in einem Punkte B_2, welcher gleichzeitig den Berührungspunkt der Kugel S mit einer zweiten durch den gegebenen Kreis K gehenden Kugel S^2_b darstellt.

Berührt der Kreis K die Kugel S in einem Punkte A, so findet man leicht, dass in diesem Falle die Gerade g eine Tangente der Kugel S in A sei, und dass daher nur eine Tangentialebene durch dieselbe an S gelegt werden kann, deren Berührungspunkt eben wieder A ist.

§. 281.

Ein Kugelgebüsch Γ, welches die Orthogonalkugel S_0 besitzen möge und außerdem eine beliebige, dem Gebüsche nicht angehörende

Kugel S seien gegeben; es handelt sich darum, zu untersuchen, ob es Kugeln im Gebüsche gebe, welche die gegebene Kugel berühren, und wenn, was für Eigenschaften denselben zukommen.

Nehmen wir einen beliebigen Punkt a auf der Kugel S an. Die Mittelpunkte aller, die Kugel S in a berührenden Kugeln liegen auf der Geraden, welche den Berührungspunkt a mit dem Mittelpunkte m der Kugel S verbindet. Alle diese Kugeln gehen durch den Punkt a.

Soll eine von diesen Berührungskugeln gleichzeitig dem Gebüsche S_0 angehören, so ist es nothwendig, aber auch hinreichend, dass dieselbe außer den Punkt a auch den diesem Punkte zugeordneten Punkt a' des Gebüsches enthalte. Nachdem aber die Mittelpunkte aller Kugeln, welche durch die beiden Punkte a und a' gehen, in jener Ebene E liegen, welche im Mittelpunkte der Strecke aa' auf die Gerade aa' senkrecht geführt wird, und nachdem diese Ebene die Gerade ma in einem Punkte C trifft, welcher gleichzeitig den Mittelpunkt einer die Kugel S im Punkte a berührenden Kugel darstellt, so ist klar, dass die letztgenannte Kugel den beiden Bedingungen, einerseits dem Gebüsche S_0 anzugehören und andererseits die Kugel S zu berühren, vollkommen entspricht.

Da sich das Gleiche von jedem Punkte a der Kugel S behaupten lässt, so folgt der Satz:

249. „Eine beliebige Kugel wird in jedem Punkte von einer, aber auch nur von einer einem gegebenen Kugelgebüsche angehörenden Kugel unter der Voraussetzung berührt, dass die gegebene Kugel selbst dem Gebüsche nicht angehört.“

Würde die Kugel selbst ein Element des Gebüsches repräsentieren, so ist leicht einzusehen, dass dieselbe von Kugeln des Gebüsches nur in jenen Punkten berührt werden könnte, welche gleichzeitig der Orthogonalkugel angehören.

Wäre K der Kreis, in welchem die Orthogonalkugel S_0, die dem Gebüsche angehörende Kugel S schneidet, so wird jede Kugel, welche die Kugel S in einem Punkte des Kreises K berührt, nothwendig dem Gebüsche S_0 angehören müssen.

§. 282.

Wir haben somit festgestellt, dass eine beliebige, einem Gebüsche S_0 nicht angehörende Kugel S in jedem ihrer Punkte von einer Kugel des Gebüsches berührt werde. — Es mögen nun auch die Eigenschaften dieser Berührungskugeln ermittelt werden.

Diesfalls bietet sich vor allem wieder die Transformation durch reciproke Radien als Untersuchungsmittel dar. Nehmen wir nämlich

das Centrum M des gegebenen Gebüsches S_0, als Inversionscentrum und die Potenz des Gebüsches als Inversionsmodul an, so transformieren sich bekanntlich alle Kugeln des Gebüsches in sich selbst. Diejenige Kugel S jedoch, welche dem Gebüsche S_0 nicht angehört, verwandelt sich bei dieser Transformation in eine zweite Kugel S_1, die demselben Kegel, welcher der ersten Kugel aus dem Inversionscentrum M umgeschrieben wird, eingeschrieben ist.

Das Inversionscentrum ist also ein Ähnlichkeitspunkt der beiden Kugeln S und S_1.

Berücksichtigen wir ferner, dass zwei sich berührende Kugeln durch Inversion wieder in zwei sich berührende Kugeln verwandelt werden, so gelangen wir zu dem Schlusse, dass eine Kugel Σ_1 des Gebüsches, welche die Kugel S berührt, auch die dieser Kugel invers entsprechende Kugel S_1 berühren werde, nachdem sie sich bei der Inversion in sich selbst trransformiert.

Der Berührungspunkt der Kugel S_1 mit der Kugel Σ ist offenbar invers dem Berührungspunkte der Kugel S mit der Kugel Σ; die Berührungspunkte der beiden Kugeln S und S_1 mit einer Kugel Σ des Gebüsches liegen also stets auf einer durch das Centrum M des Gebüsches (Inversionscentrum) gehenden Geraden und bilden ein Punktepaar des Gebüsches. Hiernach folgt der Satz:

250. „Sämmtliche Kugeln eines Gebüsches, welche eine dem Gebüsche nicht angehörende Kugel berühren, berühren noch eine zweite Kugel, welche mit der ersteren in Bezug auf das Centrum des Gebüsches, als Ähnlichkeitspunkt, ähnlich gelegen ist. Jede durch dieses Centrum gehende Gerade trifft die beiden Kugeln in vier Punkten, von welchen zwei die Berührungspunkte einer Kugel des Gebüsches und die beiden anderen die Berührungspunkte einer zweiten Kugel des Gebüsches repräsentieren.“

§. 283.

Der Ähnlichkeitspunkt zweier Kugeln spielt somit bei dem Systeme von Kugeln, welche die beiden gegebenen Kugeln gleichzeitig berühren, eine nicht untergeordnete Rolle. Wir wollen dessen Bedeutung näher kennen lernen.

Seien S_1 und S_2 zwei beliebige Kugeln, von denen wir, der Einfachheit wegen, mit welcher die Betrachtung durchgeführt werden kann, voraussetzen wollen, dass sie außerhalb einander liegen, dass also der Abstand ihrer Mittelpunkte M_1 und M_2 größer als die Summe der Kugelradien R_1 und R_2 sei.

Der äußere Ähnlichkeitspunkt A dieser Kugeln, d. i. der eine Scheitel der diesen Kugeln umschriebenen Kegel liegt auf der Centralen $M_1 M_2$ und theilt die Strecke $M_1 M_2$ äußerlich in dem Verhältnisse der beiden Kugelradien R_1 und R_2. Es verhält sich demnach

$$M_1 A : M_2 A = R_1 : R_2.$$

Ziehen wir durch A eine beliebige Gerade g, welche die Kugel S_1 in den Punkten a_1 und b_1, und die Kugel S_2 in den Punkten a_2 und b_2 schneiden möge. Führen wir sodann die Geraden $M_1 a_1$, $M_1 b_1$, $M_2 a_2$ und $M_2 b_2$, welche sämmtlich in jener Ebene, welche die Gerade g mit der Centralen $M_1 M_2$ bestimmt, liegen, so sieht man sofort, dass hiedurch zwei Paare ähnlicher Dreiecke $A a_1 M_1$ und $A a_2 M_2$, und $A b_1 M_1$ und $A b_2 M_2$ entstehen. Es verhält sich nämlich:

$$A M_1 : A M_2 = a_1 M_1 : a_2 M_2 = R_1 : R_2$$

und andererseits

$$A M_1 : A M_2 = b_1 M_1 : b_2 M_1 = R_1 : R_2.$$

Die Geraden $M_1 a_1$ und $M_2 a_2$; ebenso wie die Geraden $M_1 b_1$ und $M_2 b_2$ sind unter einander parallel. Infolge dieser Eigenschaften nennt man Punktepaare wie a_1 und a_2, b_1 und b_2, welche auf den beiden Kugeln S_1 und S_2 durch parallele Radien $M_1 a_1$ und $M_2 a_2$, resp. $M_1 b_1$ und $M_2 b_2$ bestimmt werden, ähnlich liegende Punkte der beiden Kugeln, und zwar in Bezug auf den äußeren Ähnlichkeitspunkt A, sobald die Radien $M_1 a_1$ und $M_2 a_2$ den gleichen Sinn haben, die Verbindungsgerade $a_1 a_2$ also durch A geht.

Ebenso gut kann selbstverständlich auch von ähnlich liegenden Punkten in Bezug auf den inneren Ähnlichkeitspunkt J gesprochen werden; dieselben sind Endpunkte zweier paralleler, aber entgegengesetzt gerichteter Radien der beiden Kugeln S_1 und S_2, deren Verbindungsgerade durch den inneren Ähnlichkeitspunkt J führt. Der Beweis hiefür stimmt mit jenem für den vorhergehenden Fall vollkommen überein.

Hieraus ist zu entnehmen, dass jede beliebige, durch den Ähnlichkeitspunkt A gezogene Gerade g die Kugeln S_1 und S_2 in zwei Paaren ähnlich liegender Punkte a_1, a_2; b_1, b_2 treffe.

Betrachten wir aber auch die Punktepaare a_1, b_2 und a_2, b_1, welche nicht ähnlich liegen, etwas näher. Vor allem ergeben die beiden Proportionen:

$$A a_1 : A a_2 = R_1 : R_2$$

und

$$A b_1 : A b_2 = R_1 : R_2$$

unmittelbar die dritte:

$$Aa_1 : Aa_2 = Ab_1 : Ab_2,$$

woraus folgt:

$$Aa_1 . Ab_2 = Aa_2 . Ab_1.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass der Ähnlichkeitspunkt A in Bezug auf das Punktepaar $a_1\, b_2$ dieselbe Potenz wie in Bezug auf das Punktepaar $a_2 b_1$ habe.

Nun ist aber das Product $Aa_1 . Ab_1$ für jede Lage des Strahles g constant und dem Werte nach gleich der Potenz $K_1{}^2$ des Ähnlichkeitspunktes A in Bezug auf die Kugel S_1; ebenso ist

$$Aa_2 . Ab_2 = K_2{}^2$$

gleich der Potenz des Ähnlichkeitspunktes A in Bezug auf die Kugel S_2. Hieraus folgt:

$$Aa_1 . Ab_1 \times Aa_2 . Ab_2 = K_1{}^2 . K_2{}^2$$

oder, weil $Aa_1 . Ab_2 = Aa_2 . Ab_1$ ist,

$$Aa_1{}^2 . Ab_2{}^2 = Ab_1{}^2 . Aa_2{}^2 = K_1{}^2 . K_2{}^2,$$

oder auch

$$Aa_1 . Ab_2 = Ab_1 . Aa_2 = K_1 . K_2.$$

Der Wert $K_1 . K_2$ ist unabhängig von der Lage des Strahles g, woraus die Folgerung entspringt, dass der Punkt A, in Bezug auf alle Punktepaare von der Beschaffenheit a_1, b_2 oder a_2, b_1 auf der Kugel, dieselbe Potenz habe.

Dieses Ergebnis führt unmittelbar zu dem Resultate, dass die eine Kugel S_1 stets in die andere S_2 invers verwandelt werden kann, wenn man den Ähnlichkeitspunkt A als Inversionscentrum, und die Größe $K_1 . K_2$, d. i. das geometrische Mittel aus den Potenzen des Punktes A in Bezug auf beide Kugeln S_1 und S_2, als Inversionsmodul annimmt. Hiernach gilt der Satz:

251. „Zwei beliebig im Raume gegebene Kugeln können stets invers in einander transformiert werden, wenn man den Ähnlichkeitspunkt derselben als Inversionscentrum und das geometrische Mittel der Potenzen dieses Punktes, in Bezug auf die beiden Kugeln, als Inversionsmodul wählt.“

§. 284.

Es bedarf wohl keines besonderen Beweises, dass auch der innere Ähnlichkeitspunkt J der beiden Kugeln S_1 und S_2 als Inversionscentrum angenommen werden kann, nur ist diesfalls, wie selbstverständlich, der Inversionsmodul negativ, also gleich $(- K_1 . K_2)$ zu nehmen.

Der gefundenen Eigenschaft gemäß werden wir jene Punktepaare, in welchen ein beliebiger Ähnlichkeitsstrahl die beiden Kugeln trifft, und nicht ähnlich liegen, als „inverse Punkte“ oder als „invers liegende Punkte“ der beiden Kugeln bezeichnen.

Zu dem vorstehenden Satze können wir auch ohne jedwede Rechnung auf folgende Weise gelangen.

Ist S eine beliebige Kugel, und sind K_1 und K_2 zwei auf derselben liegende beliebige Kreise, so können durch diese letzteren, wie bekannt, stets zwei Kegelflächen zweiten Grades gelegt werden.

Dies im Auge behaltend, nehmen wir vorerst zwei beliebige Kugeln S_1 und S_2 an, und erinnern uns des Satzes 197), auf Grund dessen es eine unendliche Anzahl von Kugeln S_0 gibt, welche die beiden gegebenen Kugeln S_1 und S_2 orthogonal schneiden. Die Mittelpunkte dieser Kugeln sind die Punkte der Potenzebene von S_1 und S_2.

Wählen wir nun eine von diesen Orthogonalkugeln S_0, welche die beiden Kugeln S_1 und S_2 in den beiden Kreisen K_1 und K_2 schneiden möge. Durch diese beiden Kreise K_1 und K_2 lassen sich, weil sie auf einer und derselben Kugel S_0 liegen, ohneweiters zwei Kegelflächen legen. Sei A der Scheitel eines dieser zwei Kegel. — Nimmt man den letztgenannten Punkt als Inversionscentrum und die Potenz desselben, in Bezug auf die Kugel S_0, als Inversionsmodul an, so verwandelt sich diese Kugel S_0 in sich selbst, wobei der Kreis K_1 in den Kreis K_2 übergeht.

Die Kugel S_1, welche durch K_1 geht, und längs dieses Kreises die Kugel S_0 orthogonal schneidet, übergeht durch Inversion in eine zweite Kugel, welche durch den Kreis K_2 geht, die Kugel S_0 ebenfalls orthogonal schneidet, und daher keine andere als die Kugel S_2 sein kann.

Hieraus folgt, dass die Kugel S_1 durch inverse Transformation stets in die Kugel S_2 verwandelt werden kann, wenn man den Punkt A als Inversionscentrum und dessen Potenz in Bezug auf eine Orthogonalkugel der beiden Kugeln S_1 und S_2, als Inversionsmodul annimmt.

Nachdem aber bekanntlich zwei inverse Kugeln stets einem und demselben Kegel, dessen Scheitel das Inversionscentrum ist, eingeschrieben sind, so folgt, dass das Inversionscentrum A gleichzeitig einer der beiden Ähnlichkeitspunkte beider Kugeln S_1 und S_2 ist. Dies gibt vor allem den Satz:

252. „Schneidet man zwei beliebige Kugeln durch eine gemeinschaftliche Orthogonalkugel, so sind die Scheitel der beiden durch die zwei Schnittkreise gehenden Kegelflächen, die beiden Ähnlichkeitspunkte der gegebenen zwei Kugeln.“

§. 285.

Berücksichtigt man ferner, dass sämmtliche Kugeln, welche zwei gegebene Kugeln orthogonal schneiden, ein Kugelbündel erzeugen, dessen Potenzachse die Centrale dieser beiden Kugeln ist, und dass jeder Punkt der letzteren die gleiche Potenz in Bezug auf alle diese Orthogonalkugeln besitzt, so ergibt sich auf Grundlage der früheren Betrachtung noch der Satz:

253. „Eine Kugel kann invers in jede beliebige andere Kugel transformiert werden, wenn man als Inversionscentrum einen der beiden Ähnlichkeitspunkte beider Kugeln, und als Inversionsmodul die Potenz dieses Punktes in Bezug auf das Bündel der Orthogonalkugeln beider Kugeln annimmt."

§. 286.

Betrachtet man weiters das Inversionscentrum, d. h. den Ähnlichkeitspunkt A der beiden Kugeln S_1 und S_2 als Centrum eines Kugelgebüsches, dessen Potenz der Potenz des Punktes A in Bezug auf das Bündel der Orthogonalkugeln von S_1 und S_2 gleich ist, oder mit anderen Worten: nimmt man A als Centrum eines Kugelgebüsches an, welches das Bündel der Orthogonalkugeln von S_1 und S_2 als Bestandtheil enthält, so wird (nach Satz 179) jede Kugel dieses Gebüsches, welche eine der Kugeln S_1 und S_2 berührt, nothwendig auch die andere berühren müssen, und werden die beiden Berührungspunkte zwei „inverse Punkte" der Kugeln S_1 und S_2 darstellen. Dies ergibt den Satz:

254. „Sämmtliche Kugeln, welche zwei gegebene Kugeln berühren, gehören demselben Gebüsche an, wie das Bündel der Orthogonalkugeln beider Kugeln. Das Centrum dieses Gebüsches ist der eine oder der andere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kugeln. Die Berührungspunkte einer Kugel mit den beiden gegebenen Kugeln sind stets invers liegende Punkte der letzteren."

§. 287.

Als eine weitere Folgerung ergibt sich noch eine besondere Eigenschaft der Orthogonalkugel des Gebüsches.

Wir haben gesehen, dass die beiden Kugeln S_1 und S_2 aus dem Centrum A in einander transformiert werden können, wenn man als Inversionsmodul die Potenz K_2 des Punktes A in Bezug auf die Orthogonalkugeln von S_1 und S_2 annimmt, und dass sämmtliche Kugeln, welche S_1 und S_2 berühren, demjenigen Gebüsche angehören, welches einerseits die genannte Potenz und andererseits A als Centrum besitzt.

Bei der angeführten Inversion verwandelt sich die Orthogonalkugel dieses Gebüsches Punkt für Punkt in sich selbst und die Kugel S_1 wird in die Kugel S_2 überführt. Gesetzt nun, die Kugel S_1 schneide die eben erwähnte Orthogonalkugel, so muss durch den Schnittkreis, da dieser sich selbst entspricht, auch die inverse Kugel S_2 gehen.

Hieraus ist zu ersehen, dass die fragliche Orthogonalkugel keine andere, als jene Kugel sein könne, welche den Ähnlichkeitspunkt A zum Mittelpunkte hat und durch den reellen oder imaginären Schnittkreis der beiden Kugeln S_1 und S_2 geht, oder was dasselbe ist, dem durch S_1 und S_2 bestimmten Kugelbüschel angehört. Dies gibt den Satz:

255. „Sowohl die Orthogonalkugeln zweier beliebig gegebenen Kugeln, als auch jene Kugeln, welche die beiden gegebenen Kugeln gleichzeitig berühren, gehören zwei verschiedenen Kugelgebüschen an; die Orthogonalkugeln dieser beiden Gebüsche sind jene beiden Kugeln des durch die gegebenen zwei Kugeln bestimmten Kugelbüschels, welche die beiden Ähnlichkeitspunkte der letzteren als Mittelpunkte besitzen."

§. 288.

Der vorstehende Satz gestattet, wie eine einfache Betrachtung lehrt, noch eine Erweiterung.

Seien wieder S_1 und S_2 zwei beliebig gegebene Kugeln, die sich in einem Kreise K schneiden mögen. Diesen Kreis können wir anstandslos immer reell annehmen, da die Resultate natürlich auch dann gelten werden, wenn er imaginär ist.

Der Ähnlichkeitspunkt der beiden Kugeln, für welchen wir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, den äußeren wählen wollen, sei A. Dies vorausgesetzt, wird die im vorhergehenden Satze genannte Orthogonalkugel die Kugel S_0 sein, welche den Mittelpunkt A besitzt und durch den Kreis K geht.

Zu den Punktepaaren jenes Gebüsches, welches diese Kugel S_0 zur Orthogonalkugel hat, gehören, wie aus den früheren Betrachtungen klar wurde, auch sämmtliche Paare inverser Punkte der beiden Kugeln S_1 und S_2.

Hievon kann man sich auch direct durch folgende Betrachtung überzeugen.

Zieht man durch A einen beliebigen Strahl g nach irgend einem Punkte a des Kreises K, so wird derselbe die beiden Kugeln S_1 und S_2 in zwei Paaren inverser Punkte treffen, wovon jedoch das eine Paar in a zusammenfällt. Es ist sonach das Quadrat von Aa die Potenz des Punktes A in Bezug auf alle Paare invers liegender

Punkte, und wird folglich die Kugel S_0, welche den Radius Aa besitzt, die Orthogonalkugel für diese Punktepaare sein.

Nimmt man den Punkt A als Inversionscentrum und das Quadrat des Kugelradius von S_0 als Inversionsmodul an, so verwandelt sich die Kugel S_1 in die Kugel S_2, während die Kugeln, Kreise und Punktepaare des Gebüsches S_0 in sich selbst transformiert werden.

Sind demnach a_1 und b_2 zwei beliebige inverse Punkte der beiden Kugeln S_1 und S_2, so repräsentieren dieselben auch ein Punktepaar des Gebüsches S_0 und jede durch diese Punkte gelegte Kugel Σ gehört sodann selbstverständlich dem Gebüsche an.

Eine solche Kugel wird durch Inversion in sich selbst transformiert und die Kugel S_1 übergeht hierbei in S_2; es muss daher (nach Satz 179) jener Winkel, unter welchem sich die Kugeln S_1 und Σ schneiden, demjenigen Winkel, unter welchem sich die ihnen inversen Kugeln S_2 und Σ treffen, gleich sein. Wir sehen also, dass jede Kugel, welche durch zwei inverse Punkte der Kugeln S_1 und S_2 gelegt wird, diese Kugeln unter gleichen Winkeln schneidet.

Nimmt man umgekehrt eine beliebige Kugel des Gebüsches S_0 an, so wird einerseits in Bezug auf die Gleichheit der Winkel dasselbe gelten, andererseits aber auch klar hervorgehen, dass besagte Kugel durch eine unzählige Menge von Paaren inverser Punkte der beiden Kugeln S_1 und S_2 gehe.

Sind nämlich K_1 und K_2 jene beiden Kreise, in denen eine solche Kugel die beiden Kugeln S_1 und S_2 schneidet, so sind diese Kreise offenbar selbst invers und liegen daher auf einer Kegelfläche, welche das Inversionscentrum A zum Scheitel hat. Jede Erzeugende dieses Kegels trifft somit die beiden Kreise, also auch die Kugeln S_1 und S_2 in einem inversen Punktepaar. Dies gibt den Satz:

256. „*Sind zwei beliebige Kugeln gegeben und bestimmt man in dem durch sie gegebenen Kugelbüschel jene Kugel, welche einen der beiden Ähnlichkeitspunkte zum Mittelpunkte hat, so ist diese die Orthogonalkugel eines Kugelgebüsches, dessen sämmtliche Kugeln die beiden gegebenen Kugeln unter gleichen Winkeln schneiden, also speciell auch berühren oder orthogonal schneiden.*“

§. 289.

Wenn man berücksichtigt, dass alle Kugeln, welche durch zwei feste Punkte gehen, ein Kugelbündel erzeugen und weiters beachtet, dass durch zwei inverse Punkte der Kugeln S_1 und S_2 ein Kugelbündel gelegt werden kann, welches dem nämlichen Gebüsche S_0 wie

das Bündel der Orthogonalkugeln von S_1 und S_2 angehört und mithin mit demselben ein Kugelbüschel gemein haben muss, so folgt unmittelbar der nachstehende Satz:

257. „Sämmtliche Kugeln, welche durch irgend ein Paar inverser Punkte zweier Kugeln gehen, erzeugen ein Bündel; dieselben schneiden die beiden Kugeln stets unter gleichen Winkeln. Insbesondere gibt es in dem Kugelbündel ein Kugelbüschel, dessen Elemente beide Kugeln orthogonal schneiden; dagegen existiert nur eine einzige Kugel, welche die beiden Kugeln berührt.“

§. 290.

Durch zwei beliebige Paare inverser Punkte zweier Kugeln lässt sich, da sie in Bezug auf A gleiche Potenzen haben, stets ein Kreis K legen. Während die eine der beiden Kugeln durch Inversion aus A in die andere übergeht, verwandelt sich der Kreis K in sich selbst und es ist daher klar, dass er die beiden gegebenen Kugeln unter gleichen Winkeln schneiden muss. Dies Ergebnis führt zu dem Satze:

258. „Durch irgend zwei Paare inverser Punkte zweier Kugeln lässt sich stets ein Kreis legen; derselbe schneidet die beiden Kugeln unter gleichen Winkeln.“

Auf demselben Wege kann die Richtigkeit des folgenden allgemeineren Satzes eingesehen und gerechtfertigt werden:

259. „Jeder Kreis, welcher durch ein Paar inverser Punkte zweier Kugeln beliebig gelegt wird, schneidet beide Kugeln unter gleichen Winkeln.“

§. 291.

Wir wollen nun die vorhergehenden Sätze unter der Voraussetzung specialisieren, dass die eine der gegebenen Kugeln S_1 und S_2 unendlich klein werde, sich also auf einen Punkt s_1 reduciere.

Zunächst ist einleuchtend, dass sich bei unbegrenzter Abnahme des Radius von S_1, die Ähnlichkeitspunkte von S_1 und S_2 immer mehr dem Punkte s_1 nähern werden, bis dieselben endlich, wenn der Radius gleich Null wird, also S_1 auf die Punktkugel s_1 reduciert erscheint, mit demselben zusammenfallen.

Irgend eine, durch den nunmehr mit s_1 zusammenfallenden Ähnlichkeitspunkt A gehende Gerade g trifft die Punktkugel s_1 in zwei Punkten a_1 und b_1, die beide mit s_1 zusammenfallen, während dieselbe Gerade die Kugel S_2 in zwei Punkten a_2 und b_2 schneidet.

Nimmt man s_1 als Inversionscentrum an und setzt man den Inversionsmodul gleich Null, so verwandelt sich jeder Punkt des Raumes invers in den Punkt s_1. Es sind sonach s_1 und a_2 ebensowohl als s_1 und b_2 Paare inverser Punkte.

Da ferner die die Punktkugel berührenden Kugeln durch den sie vertretenden Punkt gehen, so folgt, dass alle Kugeln, welche durch s_1 führen und die Kugel S_2 berühren, dem Kugelgebüsch mit dem Centrum s_1 und der Potenz Null angehören.

Ferner ist klar, dass jede Kugel des Gebüsches, d. h. jede beliebige durch s_1 gehende Kugel die Punktkugel und die Kugel S_2 unter gleichen Winkeln (da der Schnittwinkel mit der ersteren überhaupt ganz unbestimmt ist) schneiden wird.

§. 292.

Zu bestimmteren Resultaten gelangt man, wenn vorausgesetzt wird, dass der Radius der einen von den beiden Kugeln S_1 und S_2 unendlich groß werde, dass diese Kugel also in eine Ebene übergehe.

Denken wir uns zu diesem Behufe wieder zwei beliebige Kugeln S_1 und S_2; der Ähnlichkeitspunkt beider sei A und S_A stelle die Orthogonalkugel aller, die beiden Kugeln S_1 und S_2 unter gleichen Winkel schneidenden (also auch speciell aller orthogonal schneidenden und berührenden) Kugeln dar, repräsentiere also diejenige Kugel, welche A zum Mittelpunkt hat und durch den Schnittkreis K von S_1 und S_2 geht.

Wählen wir jetzt auf der einen Kugel, etwa auf S_2 ein beliebiges Inversionscentrum M und transformieren wir alle Kugeln, so übergeht:

a) Die Kugel S_1 wieder in eine gewisse Kugel S'_1;

b) die Kugel S_2, auf welcher das Inversionscentrum M liegt, in eine Ebene S'_e;

c) der Kreis K, als Schnittkreis von S_1 und S_2, in jenen Kreis K', in welchem sich die transformierte Kugel S'_1 und die Ebene S'_e schneiden;

d) die Kugel S_A, welche durch den Kreis K geht, in eine Kugel S'_A, die durch den transformierten Kreis K' führt, und endlich

e) das Gebüsch aller die beiden Kugeln S_1 und S_2 unter gleichen Winkeln schneidenden Kugeln, welches die Kugel S_A zur Orthogonalkugel hat, wieder in ein Gebüsch von Kugeln, welcher die Kugel S'_A als Orthogonalkugel zukömmt und dessen sämmtliche Kugeln die Kugel S'_1 und die Ebene S'_e unter gleichen Winkeln scheiden.

Hieraus erhellt, dass alle Eigenschaften, welche im Vorhergehenden für zwei Kugeln aufgestellt wurden, auch dann erhalten bleiben, wenn man der einen dieser Kugeln eine Ebene substituiert. Dies Ergebnis liefert vorderhand den Satz:

260. „*Sämmtliche Kugeln, welche eine gegebene Ebene und eine gegebene Kugel unter gleichen Winkeln schneiden (also auch speciell orthogonal schneiden oder berühren), gehören einem Gebüsche an, dessen Orthogonalkugel durch den (reellen oder imaginären) Schnittkreis der gegebenen Ebene und der gegebenen Kugel geht.*“

Es ist selbstverständlich, dass, wenn bei der vorigen Betrachtung vom zweiten oder inneren Ähnlichkeitspunkte ausgegangen worden wäre, man ein zweites Gebüsch von der gleichen Bedeutung erhalten hätte.

§. 293.

Untersuchen wir die Lage der Orthogonalkugeln dieser beiden Gebüsche etwas näher.

Sei E irgend eine Ebene und S eine beliebige Kugel, welche die Ebene E in dem (reellen oder imaginären) Kreise K schneiden möge.

Da wir soeben gefunden haben, dass bezüglich der sich unter gleichen Winkeln schneidenden Kugeln alle Eigenschaften dieselben bleiben, wie im Falle zweier Kugeln, so können wir unmittelbar von dem Satze 260) Gebrauch machen und das dort Gesagte in richtiger Weise auf den vorliegenden Fall anwenden.

Gestützt auf den eben angeführten Satz erzeugen jene Kugeln, welche die Ebene E und die Kugel S unter gleichen Winkeln schneiden, zwei verschiedene Kugelgebüsche, von welchen das eine den einen Ähnlichkeitspunkt von E und S, das andere dagegen den zweiten Ähnlichkeitspunkt von E und S als Centrum hat und deren Orthogonalkugeln durch den Kreis K, welchen E und S gemein haben, gehen.

Es frägt sich nunmehr noch um die Lage der beiden Ähnlichkeitspunkte einer Kugel S und einer Ebene E. Hierüber gibt eine einfache Grenzbetrachtung Aufschluss.

Denken wir uns zwei Kugeln S und S' und den diesen beiden Kugeln umschriebenen Kegel, dessen Scheitel A sei. Setzen wir weiters die Kugel S als unveränderlich voraus, während der Radius der Kugel S' ohne Unterlass wachsen möge.

Gemäß dieser letzteren Annahme wird gleichzeitig der den beiden Kugeln umschriebene Kegel immer stumpfer, während dessen Scheitel A sich immer mehr und mehr der Peripherie der Kugel S nähern

wird. Gehen wir hierbei bis zur äußersten Grenze vor, d. i. bis der Radius der Kugel S' unendlich groß wird, diese letztere Kugel also in eine Ebene E übergeht. Diesfalls verwandelt sich der den Kugeln S und S' umschriebene Kegel in eine zur Ebene E parallele Tangentialebene der Kugel S und dessen Scheitel A in den Berührungspunkt dieser Ebene. Die zweite zu E parallele Berührebene der Kugel S hat sodann als Berührungspunkt den zweiten Ähnlichkeitspunkt I von S und E.

Dieser Betrachtung ist hiernach zu entnehmen, dass die beiden Ähnlichkeitspunkte einer Kugel S und einer Ebene E die Berührungspunkte der ersteren mit den zu der letzteren parallelen Tangentialebenen sind, oder was dasselbe ist, mit den Endpunkten des zur Ebene E senkrechten Durchmessers der Kugel S zusammenfallen. Man erhält somit als Specialsatz:

261. „*Sämmtliche Kugeln, welche eine Ebene und eine Kugel unter gleichen Winkeln schneiden (also insbesondere auch orthogonal schneiden oder berühren), bilden zwei Kugelgebüsche. Die Orthogonalkugeln dieser beiden Gebüsche gehen durch jenen Kreis, welchen die gegebene Kugel mit der gegebenen Ebene gemein hat und ihre Mittelpunkte sind die Endpunkte des zur gegebenen Ebene senkrechten Durchmessers der gegebenen Kugel.*“

§. 294.

Durch nachstehende Betrachtung gelangen wir auch direct zu gleichem Resultate.

Sei S eine gegebene Kugel und E eine gegebene Ebene, welche, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, eine solche Lage habe, dass sie die Kugel S in einem reellen Kreise K schneide. Ferner sei A der eine Endpunkt des zu E senkrechten Durchmessers der Kugel S; es ist also die Tangentialebene der Kugel S im Punkte A parallel zur Ebene E.

Nach Satz 177) ist es immer möglich, die Kugel S durch Inversion in die Ebene E zu transformieren. Es genügt zu diesem Zwecke, den Punkt A als Inversionscentrum anzunehmen und als Inversionsmodul das Product aus dem Durchmesser der Kugel S und dem Abstande des Punktes A von der Ebene E vorauszusetzen. Die Punkte des Kreises K sind selbstentsprechend, woraus folgt, dass jene Kugel S_0, welche A zum Mittelpunkte hat und durch den Kreis K geht, alle selbstentsprechenden Punkte enthält, und dass deren Radius der Quadratwurzel aus dem Inversionsmodul gleich sei.

Ziehen wir durch A eine beliebige Gerade g, welche die Kugel S im Punkte a und die Ebene E im Punkte b treffen möge, so sind diese Punkte einander invers entsprechend und können als conjugierte Punkte jenes Kugelgebüsches betrachtet werden, welches die Kugel S_0 zur Orthogonalkugel hat. Legt man daher durch die beiden Punkte a und b eine beliebige Kugel Σ, so gehört diese dem genannten Gebüsche an.

Transformiert man invers in der vorangegebenen Weise, so verwandelt sich die Kugel Σ in sich selbst, die Kugel S aber in die Ebene E und es wird mithin der Winkel, unter welchem sich die Kugeln S und Σ schneiden, jenem Winkel gleich sein, unter welchem die Kugel Σ der Ebene E begegnet. Hiemit ist die Richtigkeit des letztangeführten Satzes auch direct erwiesen.

Denken wir uns speciell diejenige Kugel Σ construiert, welche durch die Punkte a und b geht und die Ebene E in b berührt, so wird dieselbe offenbar auch die Kugel S berühren müssen.

Dasselbe gilt von allen invers liegenden Punktepaaren, d. h. von all' jenen Punktepaaren, welche sich als Schnitte der Kugel S und der Ebene E mit einem beliebigen, durch A gehenden Strahle ergeben. Wir erhalten demnach unmittelbar als zweiten Satz:

262. „Ist eine Kugel und eine beliebige Ebene gegeben und zieht man durch den einen oder anderen Endpunkt des zu der Ebene senkrechten Kugeldurchmessers einen beliebigen Strahl, so schneidet dieser die Kugel und die Ebene in je einem Punkte, welche Punkte allemal Berührungspunkte einer und derselben Kugel sind.“

§. 295.

Was den Fall anbelangt, wenn wir statt der beiden Kugeln S_1 und S_2 die Ebenen E_1 und E_2 voraussetzen, so ist, infolge der Symmetrie dieser beiden Ebenen gegen ihre zwei Winkelhalbierebenen H_1 und H_2, sofort einleuchtend, dass jede Kugel, die ihren Mittelpunkt auf H_1 oder H_2 hat, die Ebenen E_1 und E_2 unter gleichen Winkeln schneiden müsse (speciell berühre), dass also die beiden Gebüsche der Kugeln, welche die gegebenen Ebenen unter gleichen Winkeln schneiden, zwei symmetrische Kugelgebüsche sind, deren Symmetrieebenen die Winkelhalbierebenen H_1 und H_2 sind.

Ein besonderes Verhalten zeigen diesfalls auch jene Kugeln, welche die beiden Ebenen E_1 und E_2 orthogonal schneiden.

Da nämlich eine Kugel eine Ebene nur dann orthogonal schneidet, wenn deren Mittelpunkt auf dieser Ebene liegt, so ist einleuchtend, dass die Mittelpunkte aller Orthogonalkugeln der beiden Ebenen E_1 und E_2 auf der Schnittgeraden der letzteren liegen müssen.

Zu diesen Orthogonalkugeln der Ebenen E_1 und E_2 sind auch die auf denselben, also auf der gemeinschaftlichen Schnittgeraden senkrecht stehenden Ebenen, als Kugeln von unendlich großem Radius, zu rechnen.

Endlich gehören zu den degenerierten Kugeln, welche E_1 und E_2 unter gleichen Winkeln schneiden, auch alle jene Ebenen, welche auf den beiden Symmetrieebenen senkrecht stehen, d. h. alle Ebenen, welche den beiden symmetrischen Kugelgebüschen mit den Orthogonalebenen H_1 und H_2 angehören.

Da die Centra symmetrischer Kugelgebüsche die unendlich fernen Punkte der zu ihren Orthogonalebenen senkrechten Geraden sind, so hat man als inverse Punkte der beiden Ebenen E_1 und E_2 jene zu betrachten, deren Verbindungsgeraden auf H_1 oder H_2 senkrecht stehen.

§. 296.

Schließlich wollen wir noch einen besonderen Fall auch schon deswegen anführen, weil sich eine sehr interessante Folgerung aus demselben ziehen lässt.

Es ist dies nämlich jener Fall, in welchem das Gebüsch aller Kugeln, welche zwei Kugeln unter gleichen Winkeln schneiden, ein symmetrisches wird, also nicht eine Orthogonalkugel, sondern eine Orthogonalebene besitzt, ohne dass, wie vorher, die beiden Kugeln in Ebenen zu übergehen brauchen.

Dieser Fall tritt offenbar nur dann ein, wenn die beiden Kugeln gleich groß sind.

Sind nämlich zwei Kugeln S_1 und S_2 gleich groß, so sind dieselben gegen jene Ebene, welche ihre Centrale halbiert und auf derselben senkrecht steht, symmetrisch. Jede Kugel, welche auf dieser Ebene ihren Mittelpunkt hat, zeigt gegen die beiden Kugeln S_1 und S_2 ein symmetrisches Verhalten, schneidet also auch beide stets unter gleichen Winkeln. Hieraus folgt, dass das Gebüsch der sich unter gleichen Winkeln schneidenden Kugeln, mit Beibehaltung der vorgenannten Ebene, als gleichzeitige Symmetrie- und Orthogonalebene, ein symmetrisches ist.

Halten wir dies fest und setzen wir zwei beliebige ungleiche Kugeln S_1 und S_2 voraus. S_0 sei die Orthogonalkugel des einen Kugelgebüsches, dessen Kugeln die beiden gegebenen Kugeln S_1 und

S_2, unter gleichen Winkeln schneiden, d. i. also eine Kugel, welche als Mittelpunkt einen der beiden Ähnlichkeitspunkte A von S_1 und S_2 hat und durch den (reellen oder imaginären) Schnittkreis von S_1 und S_2 geht.

Nehmen wir auf dieser Orthogonalkugel S_0 einen beliebigen Punkt M als Inversionscentrum an und setzen wir einen ganz willkürlichen Inversionsmodul voraus, so werden die beiden Kugeln S_1 und S_2 in zwei andere Kugeln S'_1 und S'_2 transformiert, während die Kugel S_0, da sie das Inversionscentrum M enthält, in eine Ebene S'_0 übergehen wird. Ferner verwandelt sich, da bei der Inversion alle Winkel unverändert erhalten bleiben, das Gebüsch jener Kugeln, die orthogonal zu S_0 sind und mithin S_1 und S_2 unter gleichen Winkeln schneiden, wieder in ein Gebüsch, dessen Kugeln die beiden transformierten Kugeln S'_1 und S'_2 unter gleichen Winkeln, die Ebene S'_0 aber orthogonal schneiden.

Hieraus folgt, dass das transformierte Gebüsch ein, mit der Orthogonalebene S'_0 symmetrisches sei, und dass daher die beiden transformierten Kugeln S'_1 und S'_2 nothwendig gleich groß sein müssen.

Dasselbe gilt von jedem anderen Punkte M auf der Kugel S_0, als Inversionscentrum. Aber auch die sämmtlichen Punkte der Orthogonalkugel des zweiten Kugelgebüsches, dessen Kugeln S_1 und S_2 sich unter gleichen Winkeln schneiden, d. h. jener Kugel, die den anderen Ähnlichkeitspunkt als Centrum hat und durch den Schnittkreis von S_1 und S_2 geht, haben dieselbe Eigenschaft. Daher der Satz:

263. „Zwei beliebige ungleich große Kugeln können durch Inversion stets in zwei gleich große transformiert werden; es genügt zu diesem Zwecke, das Inversionscentrum auf einer jener beiden Kugeln anzunehmen, welche zu dem, durch die beiden gegebenen Kugeln bestimmten Kugelbüschel gehören und deren Mittelpunkte die Ähnlichkeitspunkte der beiden gegebenen Kugeln sind."

§. 297.

Gegenseitige Beziehung dreier Kugeln, Entwicklung der Eigenschaften in Bezug auf deren Ähnlichkeitspunkte und der sie berührenden Kugeln.

Betrachten wir drei beliebige Kugeln, und versuchen wir deren Eigenschaften, welche sie in Bezug auf ihre Ähnlichkeitspunkte und die sie berührenden Kugeln besitzen, zu entwickeln.

Die drei beliebigen Kugeln seien S_1, S_2 und S_3. Nehmen wir, um die Betrachtung möglichst einfach zu gestalten, die Centralebene derselben, d. h. die Ebene, welche durch die drei Kugelmittelpunkte C_1, C_2 und C_3 (Taf. XIII, Fig. 70) geht, als Zeichnungsebene an.

Die Ähnlichkeitspunkte A_3 und I_3 der beiden Kugeln S_1 und S_2, oder, was dasselbe ist, die Scheitel der den beiden Kugeln S_1 und S_2 umschriebenen Kegel, liegen, wie aus dem Vorhergegangenen bekannt, auf der Geraden $C_1 C_2$, welche die Mittelpunkte dieser Kugeln verbindet, und theilen die Strecke $C_1 C_2$ äußerlich oder beziehungsweise innerlich im Verhältnisse der beiden Kugelradien R_1 und R_2.

Analoges gilt von den beiden Ähnlichkeitspunkten A_2 und I_2 der Kugeln S_1 und S_3, sowie auch von den Ähnlichkeitspunkten A_1 und I_1 der Kugeln S_2 und S_3.

Die so erhaltenen sechs Ähnlichkeitspunkte liegen sämmtlich in der Centralebene $C_1 C_2 C_3$ der drei Kugeln S_1, S_2 und S_3. Wie unschwer zu erkennen, sind C_1, C_2, A_3 und I_3 vier harmonische Punkte, und, wie leicht einzusehen, gilt das Gleiche auch von C_2, C_3, A_1 und I_1 und von C_3, C_1, A_2 und I_2.

Verbinden wir irgend zwei beliebige dieser sechs Ähnlichkeitspunkte, etwa A_1 und A_2 durch eine Gerade a, und denken wir uns durch dieselbe die beiden möglichen Tangentialebenen an die Kugel S_3 gelegt.

Es ist diesbezüglich sofort klar, dass diese beiden Ebenen auch jene zwei Kegelflächen berühren müssen, welche aus A_1 und A_2 der Kugel S_3, und mithin auch den beiden Kugeln S_2 und S_1 umschrieben sind. Als solche müssen aber wiederum diese beiden Ebenen auch die letztgenannten Kugeln S_2 und S_1, und folglich auch den diesen letzteren gemeinschaftlich umschriebenen Kegel berühren. Hieraus folgt aber weiter, dass die eben bezeichneten Ebenen den Scheitel A_3 dieses Kegels enthalten müssen, oder, was dasselbe ist, dass ihre Schnittgerade, welche keine andere als die Gerade $A_1 A_2$ ist, durch den Scheitel A_3 gehen muss.

Wie nunmehr ohneweiters zu erkennen, müssen die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte A_1, A_2 und A_3 auf einer und derselben Geraden a liegen. Noch bedarf es aber des Nachweises, dass der vorher auf der Verbindungsgeraden der beiden äußeren Ähnlichkeitspunkte A_1 und A_2 bestimmte dritte Ähnlichkeitspunkt A_3 thatsächlich auch der dritte äußere Ähnlichkeitspunkt sein müsse und kein innerer sein könne.

Der Voraussetzung gemäß liegt A_2 außerhalb der Strecke $C_1 C_3$ und A_1 außerhalb der Strecke $C_2 C_3$. Das Dreieck $C_1 C_2 C_3$ liegt

mithin ganz auf einer und derselben Seite der Geraden $A_1 A_2$, und kann daher die dritte Seite $C_1 C_2$ des Dreiecks von $A_1 A_2$ auch nur in ihrer Verlängerung getroffen werden.

Verbindet man einen äußeren Ähnlichkeitspunkt A_1 mit einem inneren Ähnlichkeitspunkte I_2 durch eine Gerade i_1, so liefert eine Wiederholung der eben angestellten Betrachtungen das Resultat, dass diese Gerade ebenfalls noch einen dritten Ähnlichkeitspunkt enthalten müsse, welcher aber nothwendig ein innerer sein wird.

Wäre nämlich besagter Punkt ein äußerer, so würde die Gerade i_1 zwei äußere Ähnlichkeitspunkte enthalten, mithin als äußere Ähnlichkeitsachse auch den dritten enthalten müssen, was, der Voraussetzung gemäß, nicht möglich ist. Übrigens ist einleuchtend, dass eine Gerade, wie beispielsweise i_1, wenn sie eine Seite des Dreieckes zwischen den Eckpunkten C_1 und C_3 trifft, auch noch eine zweite Dreiecksseite ($C_1 C_2$) in derselben Art schneiden müsse.

Wir erhalten daher vier Geraden, von welchen die eine die sämmtlichen drei äußeren Ähnlichkeitspunkte enthält, während jede der drei übrigen je zwei innere und einen äußeren Ähnlichkeitspunkt in sich schließt.

Diese Geraden werden die „Ähnlichkeitsachsen der drei Kugeln S_1, S_2 und S_3" genannt, und zwar pflegt man die erstere die „äußere", die drei übrigen aber die „inneren" Ähnlichkeitsachsen zu heißen.

Aus der harmonischen Lage der Kugelcentren mit den Paaren von Ähnlichkeitspunkten erkennt man sofort, dass die vier Ähnlichkeitsachsen ein vollständiges Vierseit bilden, dessen Diagonaldreieck das Mittelpunktsdreieck $C_1 C_2 C_3$ ist. Es besteht mithin der Satz:

264. „Von den sechs Ähnlichkeitspunkten, welche drei beliebige Kugeln paarweise bestimmen, liegen die drei äußeren auf einer Geraden, während ferner je zwei innere und ein äußerer gleichfalls auf einer Geraden gelegen sind. Diese vier Geraden, von welchen die erstere die äußere und die drei letzteren die inneren Ähnlichkeitsachsen der drei Kugeln heißen, bilden ein vollständiges Vierseit, dessen Diagonaldreieck das Dreieck der drei Kugelmittelpunkte ist."

Aus den vorausgeschickten Betrachtungen geht ferner gleichzeitig auch noch der nachstehende Satz hervor:

265. „An drei beliebige Kugeln im Raume lassen sich acht (reelle oder zum Theile oder auch ganz imaginäre) gemeinschaftliche Berührebenen legen, von welchen je zwei durch eine Ähnlichkeitsachse gehen."

§. 298.

Denken wir uns durch eine Ähnlichkeitsachse, beispielsweise durch die äußere a (Taf. XIII, Fig. 70) eine beliebige Ebene e gelegt. Dieselbe schneide die drei Kugeln S_1, S_2 und S_3 beziehungsweise in drei Kreisen K_1, K_2 und K_3. Dabei wird gleichzeitig jeder der drei, den Kugeln paarweise aus A_1, A_2 und A_3 umschriebenen Kegel in zwei Erzeugenden geschnitten, welche offenbar gemeinschaftliche Tangenten der Schnittkreise K_1, K_2 und K_3 sein müssen.

Wie leicht einzusehen, werden also durch A_1, A_2 und A_3 auch die Ähnlichkeitspunkte und folglich durch die Gerade a auch die äußere Ähnlichkeitsachse der drei Schnittkreise K_1, K_2 und K_3 dargestellt. Dasselbe gilt selbstverständlich auch von jenen Ebenen, die durch eine der inneren Ähnlichkeitsachsen gelegt werden, und es ergibt sich sonach der Satz:

266. „Legt man durch eine der Ähnlichkeitsachsen dreier Kugeln eine Ebene, welche die letzteren in drei Kreisen schneidet, so ist die genannte Ähnlichkeitsachse auch eine Ähnlichkeitsachse der drei Schnittkreise, und zwar eine äußere oder innere, je nachdem sie für die Kugeln eine äußere oder innere ist.“

Die Ebene, welche durch die drei Kugelmittelpunkte geht, enthält sämmtliche vier Ähnlichkeitsachsen, und es folgt daher aus dem vorhergehenden Satze unmittelbar der nachstehende:

267. „Die Ebene, welche durch die Mittelpunkte dreier Kugeln geht, schneidet diese letzteren in drei größten Kreisen, deren vier Ähnlichkeitsachsen mit jenen der drei Kugeln identisch sind.“

Liegen die drei Kugelmittelpunkte insbesondere auf einer und derselben Geraden, so enthält diese die sechs Ähnlichkeitspunkte, und mithin auch die vier Ähnlichkeitsachsen.

§. 299.

Seien S_1, S_2 und S_3 wieder drei beliebig liegende Kugeln und C_1, C_2 und C_3 deren Mittelpunkte.

Denken wir uns durch C_1, C_2, C_3 drei beliebige unter einander parallele Geraden gezogen, welche die drei Kugeln beziehungsweise in den Punkten a_1, b_1; a_2, b_2 und a_3, b_3 schneiden mögen, und setzen wir gleichzeitig, um einen bestimmten Fall behufs der vorstehenden Betrachtung hervorzuheben, voraus, dass die Strecken $C_1 a_1$, $C_2 a_2$ und $C_3 a_3$ den nämlichen Sinn haben.

Der getroffenen Annahme gemäß geht sodann die Verbindungsgerade $a_1 a_2$, wie bereits früher bei Betrachtung zweier Kugeln gefunden wurde, durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt A_3 der beiden Kugeln S_1 und S_2. Ferner führt die Gerade $a_2 a_3$ durch den Ähnlichkeitspunkt A_1 der Kugeln S_2 und S_3, und endlich geht die Gerade $a_3 a_1$ durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt A_2 der Kugeln S_3 und S_1.

Die drei Geraden $a_1 a_2$, $a_2 a_3$, $a_3 a_1$ schneiden sich in a_1, a_2 und a_3, treffen nebstbei die äußere Ähnlichkeitsachse $A_1 A_2 A_3$ der drei Kugeln, liegen also mit der letzteren in einer und derselben Ebene. Würde man die Radien nehmen, welche verschiedenen Sinn besitzen, wie beispielsweise $C_1 b_1$, $C_2 a_2$ und $C_3 a_3$, so findet man auf dieselbe einfache Weise, dass auch die drei Punkte b_1, a_2 und a_3 mit der inneren Ähnlichkeitsachse i_1, welche den äußeren Ähnlichkeitspunkt A_1 der Kugeln S_2 und S_3 enthält, gleichfalls in einer und derselben Ebene liegen. Demnach folgt der Satz:

268. „Zieht man in drei beliebigen Kugeln drei untereinander parallele, sonst aber beliebig gerichtete Radien, so liegen die Endpunkte derselben allemal in einer Ebene, welche eine Ähnlichkeitsachse der drei Kugeln enthalten muss. Diese Ähnlichkeitsachse wird die äußere oder eine innere sein, je nachdem die genannten drei Endpunkte entweder sämmtlich auf einerlei Seite der Centralebene, oder zu verschiedenen Seiten derselben liegen.“

§. 300.

Sind S_1, S_2 und S_3 drei beliebige Kugeln, und stellt S eine Kugel dar, welche die drei ersteren in drei Punkten x_1, x_2 und x_3 berührt, so geht, wie wir aus Satz 254) wissen, die Verbindungsgerade $x_1 x_2$ durch den Ähnlichkeitspunkt A_3 der beiden Kugeln S_1 und S_2.

Dieselbe könnte offenbar ebenso gut auch durch den inneren Ähnlichkeitspunkt I_3 dieser Kugeln gehen, doch hängt dies lediglich von der Art und Weise ab, wie die Kugel S die drei Kugeln S_1, S_2 und S_3 berührt. Wir setzen daher, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, voraus, die drei Berührungspunkte x_1, x_2, x_3 lägen auf einerlei Seite der Centralebene. Ferner geht, der nunmehr getroffenen Wahl entsprechend, aus demselben Grunde wie oben die Gerade $x_3 x_2$ durch den Ähnlichkeitspunkt A_1 von S_2 und S_3 und ebenso die Gerade $x_3 x_1$ durch den Ähnlichkeitspunkt A_2 von S_3 und S_1.

Dies Ergebnis sagt aber nichts anderes aus, als dass die Ebene des Dreieckes der Berührungspunkte x_1, x_2 und x_3 die

Ähnlichkeitsachse A_1, A_2, A_3 enthalten müsse und dass demnach der Satz gelte:

269. „Die Ebene, welche durch die drei Berührungspunkte dreier gegebenen Kugeln mit irgend einer vierten Kugel geht, enthält stets eine Ähnlichkeitsachse der ersten drei Kugeln.“

§. 301.

Aus dem Satze 254) folgt, dass sämmtliche Kugeln, welche zwei gegebene Kugeln S_1 und S_2 unter gleichen Winkeln schneiden (also insbesondere auch berühren), zwei Kugelgebüschen angehören, deren Centren die Ähnlichkeitspunkte A_3 und I_3 der beiden Kugeln S_1 und S_2 sind.

Ebenso findet man, dass jene Kugeln, welche die gegebenen Kugeln S_1 und S_3 unter gleichen Winkeln schneiden oder beziehungsweise berühren, zwei Kugelgebüschen angehören, welche die Ähnlichkeitspunkte A_2 und I_2 als Centra besitzen. Es ist daher einleuchtend, dass jede Kugel, welche alle drei Kugeln S_1, S_2, S_3 unter gleichen Winkeln schneidet oder insbesondere berührt, einem der Kugelgebüsche A_3 oder I_3 und gleichzeitig einem der Kugelgebüsche A_2 oder I_2 angehören muss.

Besagte Kugel muss also einem der vier Kugelbündel angehören, welches die Kugelgebüsche A_3 und A_2; A_3 und I_2; A_2 und I_3; I_2 und I_3 gemeinschaftlich haben. Gestützt auf den Satz 201) wissen wir aber, dass die Potenzachse eines Kugelbündels, welches zwei gegebenen Gebüschen angehört, die Verbindungsgerade der beiden Centra dieser Gebüsche sei.

Im vorliegenden Falle erkennt man sofort, dass diese Verbindungsgeraden keine anderen, als die vier Ähnlichkeitsachsen der gegebenen drei Kugeln S_1, S_2 und S_3 sind. Hiernach gelangen wir zu dem Schlusse, dass sämmtliche Kugeln, welche die drei gegebenen Kugeln S_1, S_2 und S_3 unter gleichen Winkeln schneiden oder speciell berühren, gewissen vier Kugelbündeln angehören, deren Potenzachsen die vier Ähnlichkeitsachsen der gegebenen drei Kugeln darstellen.

Nachdem bei der vorstehenden Betrachtung überhaupt alle Kugeln einbezogen wurden, welche die obangeführte Eigenschaft besitzen, so ist leicht einzusehen, dass, wenn man von anderen Gebüschen, beispielsweise von A_1, I_1 und A_2, I_2 ausgegangen wäre, die vier durch sie bestimmten Kugelbündel doch keine anderen, als die erst gefundenen sein können.

Dies kann, wie folgt, nachgewiesen werden. Stellen wir uns allenfalls vor, die beiden Gebüsche A_1 und A_2 würden ein anderes Kugelbündel mit der Potenzachse $A_1 A_2 A_3$ gemein haben, als die beiden Gebüsche A_1 und A_3, oder in anderer Ausdrucksform, die beiden festen Punkte m_1 und m_2, in welchen sämmtliche Kugeln des Bündels (A_1, A_2) die Potenzachse $A_1 A_2 A_3$ treffen, wären von jenen beiden festen Punkten m'_1 und m'_2 verschieden, in welchen sämmtliche Kugeln des Bündels (A_1, A_3) die Potenzachse $A_1 A_2 A_3$ schneiden.

Ist nun S eine Kugel, welche die drei Kugeln S_1, S_2, S_3 äußerlich berührt, d. h. liegen die drei Berührungspunkte x_1, x_2, x_3 auf derselben Seite der Centralebene, so muss diese Kugel, den vorhergehenden Untersuchungen gemäß, sowohl dem Bündel (A_1, A_2) als auch dem Bündel (A_1, A_3) angehören; besagte Kugel müsste also die Gerade $A_1 A_2 A_3$ in den vier Punkten m_1, m_2, m'_1, m'_2 schneiden, was offenbar ganz und gar unmöglich ist. Es bleibt demnach kein anderer Ausweg als der übrig, dass das Punktepaar m_1, m_2 mit dem Paare $m'_1. m'_2$ zusammenfalle, d. h. dass die beiden Kugelbündel (A_1, A_2) und (A_1, A_3) identisch seien. Es gilt also der Satz:

270. „Sämmtliche Kugeln, welche drei gegebene Kugeln unter gleichen Winkeln schneiden (also insbesondere auch orthogonal schneiden oder berühren), gehören vier Kugelbündeln an, deren Potenzachsen die Ähnlichkeitsachsen der gegebenen drei Kugeln sind.“

§. 302.

Die Specialfälle, wenn eine oder mehrere der drei Kugeln sich auf einen Punkt reducieren, oder aber unendlich groß werden, d. h. in Ebenen übergehen, wollen wir hier nicht weiter in Betracht ziehen. Die hierauf bezüglichen Sätze sind entweder durch Inversion oder durch geeignete Specialisierung aus dem vorstehenden Satze ebenso schwierigkeitslos abzuleiten, wie es früher bezüglich zweier gegebenen Kugeln durchgeführt wurde.

Einen Fall jedoch wollen wir noch hervorheben und den diesbezüglichen Satz aufstellen:

271. „Alle Kugeln, welche drei gleich große Kugeln unter gleichen Winkeln schneiden oder berühren, bilden ein besonderes Kugelbündel, d. i. ein Kugelbündel, dessen Orthogonalkreis insbesondere durch eine Gerade vertreten ist. Auf dieser Geraden, die gleichzeitig die Potenzachse der drei gegebenen Kugeln darstellt, liegen die Mittelpunkte aller die drei Kugeln unter gleichen Winkel schneidenden oder insbesondere berührenden Kugeln.“

§. 303.

Wenn die drei gegebenen Kugeln S_1, S_2 und S_3 nicht gleich groß sind, so kann man durch eine einfache Betrachtung auch zur Kenntnis der Orthogonalkreise jener Kugelbündel gelangen, welche die drei gegebenen Kugeln unter gleichen Winkeln schneiden.

Wählen wir, um die Betrachtung zu fixieren, unter den vier möglichen Kugelbündeln dasjenige, dessen Kugeln die drei gegebenen Kugeln S_1, S_2, S_3 in denjenigen drei Punkten berühren, deren Ebene stets durch die äußere Ähnlichkeitsachse $A_1 A_2 A_3 = a$ geht.

Die Kugeln dieses Bündels gehören jenem Gebüsche an, dessen Kugeln die beiden Kugeln S_1 und S_2 unter gleichen Winkeln schneiden. Die Orthogonalkugel $S^0{}_{12}$ dieses Gebüsches ist (nach Satz 256) diejenige, welche den Ähnlichkeitspunkt A_3 der Kugeln S_1 und S_2 zum Mittelpunkte hat und durch den Schnittkreis K_{12} von S_1 und S_2 geht.

In übereinstimmender Weise findet man, dass sämmtliche Kugeln, welche S_1, S_2, S_3 unter gleichen Winkeln schneiden, orthogonal sein müssen zu jener Kugel $S^0{}_{23}$, die den Ähnlichkeitspunkt A_1 zum Mittelpunkte hat und durch den Schnittkreis K_{23} der Kugeln S_2 und S_3 führt, sowie ferner auch orthogonal zu jener Kugel $S^0{}_{13}$, welche den Ähnlichkeitspunkt A_2 als Mittelpunkt hat und durch den Schnittkreis K_{13} der Kugeln S_1 und S_3 gelegt werden kann.

Wir wissen aber auch, dass die sämmtlichen Kugeln, welche die Kugeln S_1, S_2 und S_3 unter gleichen Winkeln schneiden, einerseits ein Kugelbündel bilden und andererseits ist bekannt, dass sämmtliche Orthogonalkugeln eines Kugelbündels ein Kugelbüschel erzeugen.

Hieraus folgt, dass die drei eben gefundenen Orthogonalkugeln $S^0{}_{12}$, $S^0{}_{23}$ und $S^0{}_{31}$ sich in einem und demselben Kreise, dem Orthogonalkreise des genannten Kegelbündels schneiden müssen.

Zu gleichen Resultaten gelangt man, wenn die inneren Ähnlichkeitspunkte I_1, I_2, I_3 der drei Kugeln S_1, S_2, S_3 in Betracht gezogen werden. Man erhält somit den Satz:

272. „Sind drei Kugeln S_1, S_2, S_3 gegeben und sind A_1, I_1; A_2, I_2; A_3, I_3 die sechs Ähnlichkeitspunkte derselben, so kann man sechs Kugeln construieren, deren Mittelpunkte die sechs Ähnlichkeitspunkte sind. Die letztgenannten Kugeln gehören beziehungsweise den drei Kugelbüscheln an, welche die gegebenen drei Kugeln paarweise bestimmen. — Je drei dieser sechs Kugeln, deren Mittelpunkte auf derselben Ähnlichkeitsachse der gegebenen drei Kugeln liegen, schneiden sich in einem Kreise und jede Kugel, welche zu einem der so ent-

stehenden vier Kreise orthogonal ist, schneidet die drei gegebenen Kugeln unter gleichen Winkeln. — Die vier Kreise gehen durch jene zwei Punkte, in welchen sich die drei gegebenen Kugeln schneiden."

Der letztere Theil dieses Satzes ergibt sich einerseits als Folgerung aus der in der vorausgeschickten Betrachtung angeführten Eigenschaft, dass die drei Kugeln S^0_{12}, S^0_{23}, S^0_{31} durch die Schnittkreise K_{12}, K_{23}, K_{31} der Kugelpaare S_1, S_2; S_2, S_3; S_3, S_1 gehen, also nothwendig die Schnittpunkte der drei Kugeln S_1, S_2 und S_3 enthalten müssen, wornach sich als selbstverständlich herausstellt, dass auch der Schnittkreis K der drei Kugeln S^0_{12}, S^0_{23}, S^0_{31} durch die genannten Punkte führen muss. Andererseits kann man die Schnittpunkte der drei gegebenen Kugeln S_1, S_2 und S_3 als Punktkugeln auffassen, welche diese drei Kugeln berühren und mithin jeden der vier Orthogonalkreise orthogonal schneiden, was offenbar nur dann möglich ist, wenn die besagten Punktkugeln diesen Kreisen angehören.

§. 304.

Nimmt man auf einem der vier Kreise einen Punkt an und betrachtet denselben als Inversionscentrum, so verwandeln sich (nach Satz 263) sowohl die Kugeln S_1 und S_2, als auch die beiden Kugeln S_2 und S_3 in zwei gleich große Kugeln. Sämmtliche drei Kugeln werden also unter der gemachten Voraussetzung in solche von gleichen Radien transformiert. Dies gibt, wenn wir die Definitionen der vier Kreise auf den vorstehenden Satz 272) beziehen, den Satz:

273. „Betrachtet man einen beliebigen Punkt auf einem der vier Kreise als Inversionscentrum, so verwandeln sich die drei gegebenen Kugeln in drei gleich große Kugeln."

§. 305.

Gegenseitige Beziehungen von vier Kugeln.

Sind die vier gegebenen Kugeln S_1, S_2, S_3 und S_4, so wird man durch den vorhergegangenen Erörterungen analoge Betrachtungen zu folgenden Resultaten gelangen.

Die vier Kugeln können auf sechsfache Art zu je zweien zusammengefasst werden und bieten daher zwölf Ähnlichkeitspunkte.

Ferner kann man dieselben zu je dreien auf vierfache Weise combinieren, wodurch man sechzehn Ähnlichkeitsachsen erhält. Von diesen sechzehn Ähnlichkeitsachsen sind vier äußere und zwölf innere.

Die vier äußeren liegen, da je zwei von ihnen einen Punkt gemein haben, in einer und derselben Ebene, welche die „äußere Ähnlichkeitsebene" der vier Kugeln genannt wird.

Ferner bestimmen die äußeren Ähnlichkeitsachsen mit den inneren noch weitere sieben Ebenen, die „inneren Ähnlichkeitsebenen", von welchen wieder jede eine äußere und drei innere Ähnlichkeitsachsen enthält. Durch jeden der zwölf Ähnlichkeitspunkte gehen vier Ähnlichkeitsachsen und drei Ähnlichkeitsebenen etc. etc.

§. 306.

Sind S_1, S_2, S_3, S_4 vier beliebige Kugeln, so frägt es sich zunächst um jene Kugeln, welche alle vier gegebenen Kugeln unter gleichen Winkeln schneiden oder insbesondere berühren werden.

Alle Kugeln, welche die drei Kugeln S_1, S_2 und S_3 unter gleichen Winkeln schneiden, bilden (nach Satz 271) ein Kugelbündel, dessen Orthogonalkreis K_{123} auf den zugehörigen drei Kugeln S^0_{12}, S^0_{13}, S^0_{23} liegt.

In gleicher Weise werden sämmtliche Kugeln, welche die drei Kugeln S_1, S_2 und S_4 unter gleichen Winkeln schneiden, ein Kugelbündel bilden, dessen Orthogonalkreis K_{124} der Schnittkreis der entsprechenden drei Kugeln S^0_{12}, S^0_{14} und S^0_{24} ist.

Wir sehen somit, dass die beiden Orthogonalkreise K_{123} und K_{124} auf derselben Kugel S^0_{12} liegen, dass also auch die beiden Kugelbündel einem und demselben Kugelgebüsche und zwar jenem, mit der Orthogonalkugel S^0_{12} angehören. Die beiden Kugelbündel haben mithin ein Kugelbüschel gemein und den Kugeln dieses Büschels kömmt die Eigenschaft zu, sämmtliche vier Kugeln unter gleichen Winkeln zu schneiden.

Da aber die vier Kugeln zwölf Ähnlichkeitspunkte haben, so gibt es auch zwölf verschiedene Kugeln von der Art S^0_{xy}. Je drei solcher Kugeln, deren Mittelpunkte auf derselben Ähnlichkeitsachse liegen, schneiden sich in einem gewissen Kreise K_{xyz}.

Nachdem es aber im ganzen sechzehn Ähnlichkeitsachsen gibt, so existieren auch sechzehn derartige Kreise. Auch haben wir gesehen, dass vier solche Kreise, die zu drei Kugeln gehören, die nämlichen Punkte wie die Kugeln selbst gemein haben. Ferner ist bekannt, dass durch jeden Ähnlichkeitspunkt vier Ähnlichkeitsachsen gehen, dass sich also auf jeder Kugel S^0_{xy} vier Kreise K_{xyz} vorfinden werden.

Die sechzehn Kreise K lassen sich also sechzehnmal zu je zweien so gruppieren, dass sie auf einer und derselben Kugel liegen. Da aber jeder Kreis K gleichzeitig auf zwei Kugeln S^0_{xy} liegt, so liefern die sechzehn Paare von Kreisen K_{xyz} doch nur acht von einander verschiedene Kugelbüschel. Nachdem weiters die Potenzachsen der vier Kugelbündel, deren Kugeln drei gegebene Kugeln unter gleichen Winkeln treffen, die vier Ähnlichkeitsachsen dieser drei Kugeln sind, so werden (nach Satz 216) die Potenzebenen der acht Kugelbüschel, deren Kugeln vier gegebene Kugeln unter gleichen Winkeln schneiden, die acht Ähnlichkeitsebenen dieser vier Kugeln darstellen. Daher der Satz:

274. „Sämmtliche Kugeln, welche vier gegebene Kugeln unter gleichen Winkeln schneiden (also insbesondere auch orthogonal schneiden oder berühren), bilden acht verschiedene Kugelbüschel, deren Potenzebenen die acht Ähnlichkeitsebenen der vier gegebenen Kugeln sind.“

§. 307.

Die Achsen dieser acht Kugelbüschel, d. h. die geometrischen Orte ihrer Kugelmittelpunkte stehen bekanntlich auf den betreffenden acht Ähnlichkeitsebenen (Potenzebenen) senkrecht und treffen dieselben in den Mittelpunkten jener acht Kreise, in welchen sich die sämmtlichen Kugeln der acht Büschel schneiden.

Wir wissen ferner, dass zu vier gegebenen Kugeln nur eine einzige Orthogonalkugel existiere. Der Mittelpunkt derselben ist der Potenzpunkt der vier Kugeln. Diese Orthogonalkugel gehört gleichzeitig den sämmtlichen acht Kugelbüscheln an und schneidet mithin die acht Ähnlichkeitsebenen in den acht, diese Kugelbüschel bestimmenden Kreisen. Es besteht mithin der Satz:

275. „Die Achsen der acht Kugelbüschel, deren Kugeln vier gegebene Kugeln unter gleichen Winkeln schneiden, sind die Senkrechten von dem Potenzpunkte der vier Kugeln auf die acht Ähnlichkeitsebenen. Die Kreise, in welchen sich die Kugeln eines jeden der acht Kugelbüschel schneiden, sind jene, in welchen die Orthogonalkugel der vier Kugeln die acht Ähnlichkeitsebenen trifft. Die Ähnlichkeitsebenen selbst sind die Potenzebenen der acht Kugelbüschel.“

§. 308.

Im Vorhergegangenen wurde gezeigt (Satz 248), dass es im allgemeinen zwei Kugeln gebe, welche eine gegebene Kugel berühren und durch einen gegebenen Kreis gehen, oder was dasselbe ist, dass

in jedem Kugelbüschel zwei Kugeln existieren, die eine gegebene, dem Büschel nicht angehörende Kugel berühren.

In jedem der vorgenannten acht Büschel gibt es demnach zwei Kugeln, welche eine von den gegebenen vier Kugeln, also überhaupt alle vier Kugeln berühren. Demnach folgt unmittelbar der Satz:

276. „Es gibt sechzehn Kugeln, deren jede vier gegebene Kugeln berührt. Diese Kugeln haben ihre Mittelpunkte paarweise auf jenen Geraden, welche durch den Potenzpunkt der vier gegebenen Kugeln senkrecht zu ihren acht Ähnlichkeitsebenen gezogen werden; dieselben gehen paarweise durch diejenigen Kreise, in welchen die acht Ähnlichkeitsebenen von der Orthogonalkugel der gegebenen vier Kugeln geschnitten werden.“

§. 309.

Mit Rücksicht auf die in den §§. 306 und 307 gepflogene Erörterung ergibt sich folgende einfache Construction für die sechzehn Kugeln, welche vier gegebene Kugeln berühren.

Man bestimmt zunächst die acht Ähnlichkeitsebenen und die Orthogonalkugel der vier gegebenen Kugeln. Die letztere schneidet die vier Kugeln in vier Kreisen, deren Ebenen mit den acht Ähnlichkeitsebenen zum Schnitte gebracht, zweiunddreißig Geraden liefert. Die Berührungsebenen, welche man durch diese zweiunddreißig Geraden an eine der Kugeln legt, fallen paarweise in sechzehn Ebenen zusammen; die Berührungspunkte derselben sind jene der gesuchten sechzehn Kugeln.

Es bedarf wohl kaum besonders hervorgehoben werden, dass nicht immer alle sechzehn Kugeln reell sein werden; es kann sogar der Fall eintreten, dass sie sämmtlich imaginär sind, wie es beispielsweise dann vorkömmt, wenn die Kugel S_1 die Kugel S_2 umschließt, dagegen aber die beiden Kugeln S_3 und S_4 ausschließt etc.

XVII. Capitel.

Die Dupin'sche Cyclide.

§. 310.

„Eine Dupin'sche Cyclide ist die Umhüllungsfläche aller Kugeln, welche drei gegebene Kugeln berühren."

Die Centralebene der drei gegebenen Kugeln S_1, S_2 und S_3 ist eine Symmetrieebene für diese Kugeln; daher auch für die berührenden Kugeln und ebenso für deren Enveloppe, d. i. für die Cyclide.

Wie aus Vorhergegangenem (Band II) bekannt, wird eine Umhüllungsfläche im allgemeinen von allen umhüllten Flächen in Curven berührt, welche man die „Charakteristiken" der Umhüllungsfläche nennt; ebenso wissen wir bereits, dass diese Charakteristiken gleichzeitig die Schnittcurven zweier unmittelbar auf einander folgender, umhüllten Flächen sind.

Im vorliegenden Falle sind die umhüllten Flächen Kugelflächen und da sich zwei Kugelflächen nur in einem Kreise schneiden können, so folgt unmittelbar, dass die Umhüllungsfläche von Kugeln immer nur Kreise zu Charakteristiken hat. Hieraus folgt unmittelbar der Satz:

277. „Die Charakteristiken der Dupin'schen Cyclide sind Kreise."

§. 311.

Da ferner jede umhüllte Fläche von der Umhüllungsfläche längs einer Charakteristik berührt wird, so besitzen die beiden Flächen längs dieser Charakteristik eine gemeinschaftliche Normalenfläche, d. i. der geometrische Ort der Flächennormalen in den Punkten der letzteren.

Ist die umhüllte Fläche eine Kugel, so ist bekannt, dass die Normalen derselben in jedem ihrer Punkte durch den Mittelpunkt derselben gehen.

Hieraus folgt unmittelbar, dass jede Umhüllungsfläche einer veränderlichen Kugel, also auch die Cyclide, längs ihrer Charakteristiken, als Normalenflächen gerade Kreiskegel besitzen, deren Scheitel die Mittelpunkte der jeweiligen Lage der umhüllten Kugel repräsentieren.

Ist aber auf irgend einer krummen Fläche eine Curve vorhanden, längs welcher die zugehörige Normalenfläche abwickelbar ist, so nennt man bekanntlich eine solche Curve eine „Krümmungslinie" der Fläche.

Da dieser Fall bei der Cyclide längs ihrer Charakteristiken eintritt, so kann, als hieher gehörend, der Satz aufgestellt werden:

278. „Die (kreisförmigen) Charakteristiken einer Dupin'schen Cyclide stellen eine Schar von Krümmungslinien dieser Fläche dar.“

§. 312.

Sind die drei gegebenen Kugeln S_1, S_2, S_3 so gelegen, dass ihre Mittelpunkte auf einer und derselben Geraden liegen, so ist diese gemeinschaftliche Centrale gleichzeitig eine gemeinschaftliche Rotationsachse für die obgenannten drei Kugeln.

Kennt man eine Kugel, welche die drei Kugeln berührt, so wird diese Kugel, um die genannte Achse gedreht, in jeder Lage eine Berührkugel der drei Kugeln vorstellen; die Umhüllungsfläche derselben ist sodann eine Rotationsfläche, und zwar diesfalls eine Ring- oder Wulstfläche. Es kann hiernach die Ringfläche als ein besonderer Fall der Dupin'schen Cyclide angesehen werden.

Ein anderer besonderer Fall einer Cyclide, oder richtiger gesagt, einer degenerierten Cyclide, ist der gerade Kreiskegel, welcher entsteht, sobald vorausgesetzt wird, dass die drei gegebenen Kugeln unendlich große Radien besitzen, diese Kugeln also in drei Ebenen übergehen.

Auf diese beiden besonderen Fälle werden wir zurückkommen und werden wir dieselben überdies zur Untersuchung der Eigenschaften der Cyclide benützen.

Denken wir uns nun die drei gegebenen Kugeln S_1, S_2 und S_3 in beliebiger gegenseitiger Lage.

Wir wollen diese Kugeln, indem die veränderliche (umhüllte) Kugel dieselben in jeder ihrer Lage berührt, in ihrer dermaligen Eigenschaft die „Leitkugeln“ der Cyclide nennen.

Sämmtliche Kugeln, welche drei gegebene Kugeln berühren, gehören, wie wir wissen (Satz 270), vier Kugelbündeln an, deren Potenzachsen die vier Ähnlichkeitsachsen der gegebenen drei Kugeln sind. Ferner ist bekannt, dass alle Kugeln eines jeden dieser vier Bündel durch zwei feste Punkte (reell oder imaginär), auf je einer dieser Ähnlichkeitsachsen gehen.

Die Kugeln jener vier Bündel, welche gleichzeitig die drei Kugeln S_1, S_2, S_3 berühren, erzeugen sodann vier verschiedene Cycliden, von welchen jede einem dieser vier Bündel entspricht.

Um unsere Betrachtungen einigermaßen einzuschränken und zu fixieren, nehmen wir an, die Cyclide solle von jenen Kugeln erzeugt

werden, deren entsprechendes Kugelbündel die äußere Ähnlichkeitsachse A zur Potenzachse hat.

Besagte Ähnlichkeitsachse oder Potenzachse wird von allen Kugeln des zugehörigen, die Kugeln S_1, S_2 und S_3 unter gleichen Winkeln schneidenden Kugelbündels in zwei festen (reellen oder imaginären) Punkten geschnitten. Durch diese Punkte, wir wollen dieselben Δ_1 und Δ_2 nennen, gehen also nicht nur die sämmtlichen erzeugenden Kugeln der Cyclide, sondern weiters auch, wie übrigens selbstverständlich, die Schnittkreise zweier solcher Kugeln. Dies gilt namentlich von den Schnittkreisen zweier unmittelbar aufeinander folgender umhüllten Kugeln, d. h. von den Charakteristiken der Cyclide. Es folgt daher der Satz:

279. „Die Charakteristiken einer Dupin'schen Cyclide sind Kreise, welche sämmtlich durch zwei feste (reelle oder imaginäre) Punkte auf einer Ähnlichkeitsachse der drei Leitkugeln gehen.“

§. 313.

Es wird nunmehr auch keinerlei Schwierigkeit bieten, zu unterscheiden, ob diese beiden obbezeichneten Punkte Δ_1 und Δ_2, welche die „Knotenpunkte“ oder „Doppelpunkte“ erster Art der Cyclide genannt werden, reell oder imaginär sind.

Wir wissen nämlich, dass die Scheitelpunkte eines Kugelbündels, d. h. die beiden festen Punkte auf der Potenzachse des Bündels reell oder imaginär sind, je nachdem sich die Orthogonalkugeln dieses Bündels beziehungsweise nicht schneiden oder schneiden, oder mit anderen Worten: die Scheitelpunkte eines Kugelbündels sind reell, wenn ihr Orthogonalkreis imaginär ist, und umgekehrt.

Andererseits wurde aber auch gezeigt (Satz 272), dass die Orthogonalkreise derjenigen Kugelbündel, welche S_1, S_2, S_3 unter gleichen Winkeln schneidet, durch die beiden Schnittpunkte dieser drei Kugeln gehen, also mit denselben beziehungsweise reell oder imaginär werden.

Die Knotenpunkte der Cyclide werden demgemäß reell sein, wenn die beiden Schnittpunkte der drei Leitkugeln S_1, S_2, S_3 imaginär sind, und umgekehrt. Es gilt folglich der Satz:

280. „Die beiden Knotenpunkte der Cyclide, d. h. die beiden Punkte, durch welche sämmtliche Charakteristiken gehen, sind reell oder imaginär, je nachdem die Schnittpunkte der drei gegebenen Leitkugeln imaginär, beziehungsweise reell sind.“

Wir werden in der Folge noch zwei anderweitige Doppelpunkte auf der Fläche kennen lernen, welche zu den beiden ersteren in ebenso interessanten als eigenthümlichen Beziehungen stehen.

§. 314.

Nehmen wir weiters einen beliebigen Punkt im Raume als Inversionscentrum an, und untersuchen wir, was sich in dem Falle ergibt, als die Cyclide transformiert wird.

Die drei gegebenen Leitkugeln verwandeln sich durch die Inversion wieder in drei Kugeln S'_1, S'_2, S'_3; ebenso werden die die Leitkugeln berührenden Kugeln wieder in Kugeln, welche die drei transformierten S'_1, S'_2, S'_3 berühren, übergehen.

Endlich wird durch den gleichnamigen Vorgang offenbar auch die Cyclide in jene Fläche verwandelt werden, welche all die Kugeln berührt, die mit den transformierten Kugeln S'_1, S'_2, S'_3 eine Berührung eingehen. Hieraus folgt also, dass auch die Cyclide durch inverse Transformation immer wieder in eine Cyclide übergeht. Wir können demnach den Satz aufstellen:

281. „Eine Cyclide transformiert sich durch Inversion stets wieder in eine Cyclide.“

§. 315.

Setzen wir voraus, dass die drei Leitkugeln zwei reelle Punkte gemein haben (wobei, nach Satz 280, die Knotenpunkte der Cyclide imaginär werden), und wählen wir den einen dieser Schnittpunkte als Inversionscentrum, so übergehen die drei Leitkugeln durch Inversion in drei Ebenen; die erzeugenden Kugeln der Cyclide dagegen verwandeln sich in jene Kugeln, welche die drei Ebenen berühren, und die Umhüllungsfläche der ersteren, die Cyclide nämlich, übergeht in die Umhüllungsfläche der letzteren, d. i. in einen geraden Kreiskegel.

Endlich übergehen die Charakteristiken der Cyclide als Schnittkreise unmittelbar aufeinander folgender Kugellagen in eben solche auf dem Kreiskegel, d. i. in die Kreisschnitte, während die beiden imaginären Knotenpunkte, welche allen Charakteristiken gemeinsam sind, in die imaginären Kreispunkte auf der allen (parallelen) Kreisschnittsebenen gemeinschaftlichen unendlich fernen Geraden verwandelt werden.

Wir erhalten somit den Satz:

282. *„Jede Dupin'sche Cyclide, deren beide Knotenpunkte erster Art (sämmtlichen Charakteristiken gemeinsam) imaginär sind, kann durch Inversion in einen geraden Kreiskegel transformiert werden. Behufs Erreichung dieses Zweckes genügt es, das Inversionscentrum in einen der beiden Punkte zu verlegen, in welchen sich die drei Leitkugeln (selbstverständlich reell) schneiden. Unter dieser Annahme transformieren sich die drei Leitkugeln in drei Ebenen; die Cyclide in einen diesen Ebenen eingeschriebenen geraden Kreiskegel; der zweite Schnittpunkt der Leitkugeln in den Scheitel dieses Kegels und die Charakteristiken der Cyclide in die Kreisschnitte des Kegels."*

§. 316.

Die Möglichkeit dieser Transformation lässt den geraden Kreiskegel als Mittel erscheinen, gewisse Eigenschaften einer Cyclide mit imaginären Knotenpunkten erster Art zu entwickeln.

Vor allem ist sofort einleuchtend, dass den geradlinigen Erzeugenden des Rotationskegels auf der Cyclide Kreise entsprechen werden, welche sämmtlich durch die beiden Schnittpunkte der Leitkugeln gehen müssen. Durch den einen dieser Schnittpunkte gehen besagte Kreise deshalb, weil derselbe dem Kegelscheitel invers ist, und durch den anderen aus dem Grunde, weil sich jede Gerade in einen durch das Inversionscentrum gehenden Kreis verwandelt.

Aus der charakteristischen Eigenschaft der Inversion, kleinste Theile ähnlich abzubilden, folgt aber, dass die Fläche in jedem der beiden genannten Punkte eine Gestalt annehmen müsse, welche jener, die die Kegelfläche in der unmittelbaren Nähe des Kegelscheitels besitzt, ähnlich ist, dass also diesfalls die beiden genannten Punkte wieder zwei reelle „Knotenpunkte", „conische Punkte" oder „Doppelpunkte" der Cyclide darstellen.

Durch diese Knotenpunkte geht auf der Cyclide noch eine von der Charakteristikenschar verschiedene zweite Schar von Kreisen.

Diese Kreise stehen mit den Charakteristiken in einer wichtigen Wechselbeziehung. Nachdem dieselben die Inversen der Erzeugenden des Rotationskegels sind, und diese zu den Kreisschnitten des Kegels senkrecht stehen, so bilden sie, weil sich Winkelgrößen durch Inversion nicht ändern, gleichfalls rechte Winkel mit den Charakteristiken; dieselben sind also die orthogonalen Trajectorien der letzteren. Es ist aber bekanntlich bei jeder Fläche der Fall, dass die orthogonalen Trajectorien einer Schar von Krümmungslinien

ebenfalls eine Curvenschar, d. i. die zweite Schar von Krümmungslinien der Fläche vorstellen.

Dass die Kreise auf der Cyclide, welche den Kegelerzeugenden invers entsprechen, Krümmungslinien sind, ist auch unmittelbar auf folgende Weise leicht einzusehen.

Der Kegel wird längs einer Erzeugenden von einer Ebene berührt. Diese Ebene verwandelt sich durch Inversion in eine Kugel, welche die Cyclide längs dem der Erzeugenden entsprechenden Kreise berührt. Die Normalenfläche der Kugel, also auch jene der Cyclide, ist daher in diesem Falle, sowie vorher bei den Charakteristiken, wieder ein gerader Kreiskegel, woraus unmittelbar folgt, dass alle diese Kreise Krümmungslinien der Cyclide sind. Man erhält demgemäß den Satz:

283. „Bei jeder Dupin'schen Cyclide sind beide Scharen von Krümmungslinien ebene Curven, und zwar Kreise. Jede Schar von Krümmungslinien geht durch zwei feste Punkte. Das eine Paar dieser Knotenpunkte sind die Schnittpunkte der drei Leitkugeln, während das andere Paar von Knotenpunkten die beiden Scheitelpunkte des Kugelbündels sind, dessen Kugeln die drei Leitkugeln unter gleichen Winkeln schneiden."

§. 317.

Denken wir uns die Cyclide durch drei Leitkugeln S_1, S_2, S_3, welche die beiden Punkte δ_1 und δ_2 gemein haben, gegeben, und dieselbe wieder dadurch in einen Rotationskegel verwandelt, dass wir das Inversionscentrum in einen der beiden Punkte δ_1 und δ_2, etwa nach δ_1, verlegen.

Hierbei übergehen die drei Leitkgeln S_1, S_2, S_3 in drei Ebenen S'_1, S'_2 und S'_3, welche sich in einem Punkte δ'_2 schneiden, der dem Punkte δ_2 invers entspricht.

Sämmtliche Kugeln, welche die drei Kugeln S_1, S_2, S_3 berühren, transformieren sich in Kugeln, welche mit den drei Ebenen S'_1, S'_2 und S'_3 eine Berührung eingehen. Während die ersteren die Cyclide umhüllen, umhüllen die letzteren den den drei Ebenen S'_1, S'_2 und S'_3 eingeschriebenen Rotationskegel, dessen Scheitel der Punkt δ'_2 ist.

Betrachten wir eine beliebige Berührebene des Kegels. Dieselbe berührt den Kegel längs einer Erzeugenden; die sämmtlichen Kugeln dagegen, welche dem Kegel eingeschrieben sind, in Punkten, welche dieser Erzeugenden angehören.

Diese Berührebene verwandelt sich invers in eine Kugel, welche durch die Punkte δ_1 und δ_2 geht, die Cyclide längs der den Kegel-

erzeugenden invers entsprechenden Kreislinie berührt, und endlich auch alle umhüllten Kugeln der Cyclide in Punkten dieses Kreises tangiert.

Nachdem es aber unendlich viele solcher Berührungsebenen des Kegels gibt, so existieren auch unendlich viele derartige Kugeln, oder mit anderen Worten: die Cyclide hüllt noch eine zweite Schar von Kugeln ein, welche demselben Kugelbündel wie die drei Leitkugeln angehören, welche also durch die beiden Schnittpunkte der drei Leitkugeln gehen und nebstbei sämmtliche Kugeln der anderen Schar in Punkten berühren, welche den Krümmungslinien der Fläche angehören. Hiernach gelangen wir zu dem Satze:

284. „Eine Dupin'sche Cyclide ist die Umhüllungsfläche zweier verschiedenen Kugelscharen. Diese Kugelscharen gehören zwei verschiedenen Kugelbündeln an; jede Kugel der einen Schar wird von sämmtlichen Kugeln der zweiten Schar in Punkten berührt, die auf einem Kreise liegen, welcher eine Krümmungslinie der Cyclide darstellt, und umgekehrt."

Hieraus folgt unmittelbar noch der Satz:

285. „Wird eine Cyclide von einer veränderlichen Kugel umhüllt, die stets drei gegebene Leitkugeln schneidet, und nimmt man drei beliebige Lagen der veränderlichen Kugel als Leitkugeln an, so wird eine veränderliche Kugel, welche die letzteren berührt, ebenfalls dieselbe Cyclide umhüllen."

§. 318.

Die beiden Kugelbündel, welche die beiden Scharen umhüllter Kugeln enthalten, besitzen je eine Symmetrieebene. Diese beiden Symmetrieebenen müssen auch Symmetrieebenen für die Cyclide, als Erzeugnis dieser Kugelscharen, sein.

Die Symmetrieebene jener Schar umhüllter Kugeln, zu welchen die gegebenen drei Leitkugeln gehören, ist die Centralebene dieser drei Kugeln.

Die Symmetrieebene der zweiten Kugelschar, d. h. jene des Kugelbündels, dessen Elemente die Leitkugeln unter gleichen Winkeln schneiden, ist zur Potenzachse dieses Bündels normal, und, nachdem die Potenzachse gleichzeitig eine Ähnlichkeitsachse der gegebenen drei Leitkugeln ist, mithin in der Centralebene der letzteren liegt, so steht die gesuchte Symmetrieebene der zweiten Schar auf der Centralebene der drei Leitkugeln, d. i. auf der Symmetrieebene der ersten Schar senkrecht.

Die Cyclide besitzt sonach zwei zu einander normale Symmetrieebenen — die Symmetrieebenen der beiden Kugelbündel — welchen die erzeugenden Kugeln angehören.

Es ist nicht schwer, nachzuweisen, dass jede dieser Symmetrieebenen durch die Potenzachse des entsprechenden anderen Bündels, d. i. durch die Verbindungsgeraden $\Delta_1 \Delta_2$ und $\delta_1 \delta_2$ der beiden Paare von Knotenpunkten der Cyclide gehe.

Die Potenzachse desjenigen Kugelbündels, welches auch die drei Leitkugeln S_1, S_2, S_3 enthält, ist die Verbindungsgerade der Punkte δ_1 und δ_2, in welchen sich diese Kugeln begegnen. Die Symmetrieebene, welche dem Bündel entspricht, dessen Kugeln die S_1, S_2, S_3 unter gleichen Winkeln treffen, enthält die Mittelpunkte aller dieser Kugeln. Nachdem aber die beiden Punkte δ_1 und δ_2 als Punktkugeln aufgefasst werden können, welche S_1, S_2, S_3 gleichfalls berühren oder unter gleichen Winkeln schneiden, so müssen dieselben, also auch deren Verbindungsgerade $\delta_1 \delta_2$, der genannten Symmetrieebene angehören.

Dasselbe gilt von der zweiten Symmetrieebene und der Potenzachse des zweiten Kugelbündels.

Da weiters die beiden Potenzachsen auf den Symmetrieebenen ihrer eigenen Kugelbündel senkrecht stehen, und die Symmetrieebenen selbst normal zu einander sind, so gilt das Gleiche auch von den Potenzachsen. Es folgt mithin der Satz:

286. „Jede Dupin'sche Cyclide besitzt zwei zu einander normale Symmetrieebenen, welche gleichzeitig die Symmetrieebenen jener Kugelbündel sind, denen die beiden erzeugenden Kugelscharen angehören. Die Symmetrieebene des einen Kugelbündels enthält die Potenzachse des anderen und umgekehrt. Die beiden Potenzachsen sind zwei sich kreuzende auf einander senkrecht stehende Geraden. Jede derselben ist die Verbindungsgerade eines Paares von Knotenpunkten der Cyclide.“

§. 319.

Greifen wir auf den Satz 284) zurück, so können wir ohne jedwede Schwierigkeit weitere Folgerungen ziehen.

Es wurde dortselbst gezeigt, dass alle Kugeln der einen Schar eine beliebige Kugel der anderen Schar in Punkten eines Kreises berühren, welcher eine Krümmungslinie der Cyclide darstellt.

Sind demnach wieder S_1, S_2 und S_3 die drei gegebenen Leitkugeln, so lässt sich die Cyclide, auf Grund der eben ausgesprochenen Eigenschaften, leicht aus ihren Krümmungslinien construieren.

Sei nämlich Σ eine beliebige Kugel der einen Schar, welche die Kugeln S_1, S_2 und S_3 in den Punkten a_1, a_2 und a_3 berühren mag. Diese Kugel Σ wird von allen Kugeln der anderen Schar in Punkten eines Kreises berührt, welcher eine Krümmungslinie der Cyclide repräsentiert. Zu den Kugeln dieser anderen Schar gehören aber auch die drei Leitkugeln S_1, S_2 und S_3; es sind daher deren Berührungspunkte a_1, a_2 und a_3 drei Punkte des genannten Kreises.

Da bekanntlich die Ebene der drei Punkte a_1, a_2 und a_3 durch die Ähnlichkeitsachse A der drei Leitkugeln geht, so wird es zur Construction des genannten Kreises genügen, einen von den drei Punkten a_1, a_2 a_3 zu kennen; denn der Kreis wird sich als Schnitt der Kugel Σ mit der durch die Ähnlichkeitsachse A und durch den bekannten Punkt a_1 gelegten Ebene ergeben.

Besonders hervorzuheben sind die beiden durch die Ähnlichkeitsachse A gehenden gemeinschaftlichen Berührebenen der drei Leitkugeln S_1, S_2 und S_3.

Heißen die Berührungspunkte der drei Kugeln S_1, S_2, S_3 mit diesen beiden Ebenen beziehungsweise α_1, α_2, α_3 und β_1, β_2, β_3, so sind, der vorhergehenden Betrachtung gemäß, die durch diese Punkte gehenden zwei Kreise K_α und K_β zwei Krümmungslinien der Cyclide.

Die beiden Ebenen berühren einerseits die Cyclide längs der beiden Kreise K_α und K_β, berühren aber auch andererseits (nach Satz 284) alle Kugeln der anderen zu S_1, S_2, S_3 gehörenden Kugelschar in Punkten dieses Kreises. Dieses Ergebnis führt, wenn man berücksichtigt, dass die beiden Berührebenen sowohl, als auch die in denselben liegenden Kreise symmetrisch gegen die Centralebene der drei Kugeln S_1, S_2, S_3 liegen, zu der nachstehenden Erzeugungsart der Cyclide:

287. „Sind in zwei Ebenen zwei gleich große Kreise in symmetrischer Lage gegen eine Winkelhalbierebene der beiden Ebenen gegeben, so umhüllen sämmtliche Kugeln, welche die beiden Ebenen in Punkten dieser beiden Kreise berühren, eine Dupin'sche Cyclide."

§. 320.

Nachdem man die beiden genannten Berührebenen der drei Leitkugeln S_1, S_2, S_3 (nach Satz 285) auch als Leitflächen für die Schar jener erzeugenden Kugeln, zu denen S_1, S_2 und S_3 gehören, betrachten kann, so findet man ohne weiteres folgende Erzeugungsweisen:

288. „*Eine Kugel, welche eine Kugel und zwei Ebenen in jeder Lage berührt, umhüllt eine Dupin'sche Cyclide*“

und:

289. „*Eine veränderliche Kugel, welche in jeder Lage zwei Kugeln und eine Ebene berührt, umhüllt eine Dupin'sche Cyclide.*“

Ferner:

290. „*Eine veränderliche Kugel, welche in jeder Lage eine Kugel und eine Ebene berührt, und deren Mittelpunkt sich in einer anderen Ebene fortbewegt, erzeugt als Umhüllungsfläche eine Dupin-sche Cyclide.*“

§. 321.

Sind S_1, S_2, S_3 die drei Leitkugeln, e_1 und e_2 die beiden gemeinschaftlichen Berührebenen derselben und endlich Σ_1 und Σ_2 zwei beliebige Kugeln, deren jede die drei Kugeln S_1, S_2 und S_3 berührt.

Es ist an und für sich klar, dass jede Kugel S, deren Mittelpunkt auf der Centralebene der drei Kugeln S_1, S_2 und S_3 liegt und die Kugeln Σ_1 und Σ_2 berührt, eine erzeugende Kugel der Cyclide sei.

Um hieraus eine Erzeugungsweise der Cyclide zu folgern, haben wir bloß zu untersuchen, welche Beziehungen die Kugeln Σ_1 und Σ_2 zu der genannten Centralebene haben.

Aus Früherem wissen wir, dass die Potenzachse des Kugelbündels, welcher die Kugeln der einen Schar, beispielsweise der Schar Σ angehören, in der Symmetrieebene der anderen Schar S, d. i. in der Centralebene der drei gegebenen Kugeln S_1, S_2, S_3 liege, und ferner ist bekannt, dass die beiden Symmetrieebenen auf einander senkrecht stehen.

Diese Bedingungen werden offenbar immer erfüllt, wie man auch die Kugeln Σ_1 und Σ_2 und die Centralebene gegen einander liegend annehmen mag. Man ist demnach berechtigt, behufs Erzeugung einer Cyclide zwei Kugeln der einen Schar und die Symmetrieebene der anderen Schar willkürlich zu wählen.

Hievon kann man sich auch folgendermaßen überzeugen. Sei E die gegebene Symmetrieebene, seien ferner Σ_1 und Σ_2 die beiden gegebenen Kugeln, so können leicht drei Kugeln S_1, S_2 und S_3 construiert werden, deren Mittelpunkte auf E liegen und die beiden Kugeln Σ_1 und Σ_2 berühren. Diese drei Kugeln bestimmen sodann als „Leit-

kugeln" eine Cyclide, deren Symmetrieebene E ist und von welcher Σ_1 und Σ_2 Lagen der umhüllten Kugel repräsentieren. Es gilt demnach der Satz:

291. *„Eine veränderliche Kugel, deren Mittelpunkt sich auf einer festen Ebene fortbewegt, während sie selbst zwei feste, beliebig gegebene Kugeln berührt, umhüllt eine Dupin'sche Cyclide."*

§. 322.

Da, wie wir wissen, sämmtliche Lagen dieser veränderlichen Kugeln von zwei Ebenen e_1 und e_2 berührt werden, welche gegen die Symmetrieebene E symmetrisch liegen, so kann der Satz aufgestellt werden:

292. *„Alle Kugeln, welche zwei feste Kugeln berühren und deren Mittelpunkte auf einer gegebenen Ebene liegen, werden auch von zwei, zu der letzteren symmetrisch liegenden Ebenen berührt."*

§. 323.

Da die Krümmungslinien der einen Schar auf einer Cyclide Kreise sind, welche sich in den beiden Knotenpunkten dieser Schar schneiden und nachdem alle Krümmungslinien, welche auf Kugeln der einen Schar liegen, von den Kugeln der anderen Schar berührt werden, so folgt:

293. *„Berührt eine veränderliche Kugel in jeder Lage drei feste Kreise, welche zwei Punkte gemein haben, so umhüllt dieselbe eine Dupin'sche Cyclide."*

§. 324.

Sind a, b, c die Berührungspunkte einer solchen obgedachten Kugel mit den drei Kreisen K_1, K_2, K_3, so sind dieselben auch Berührungspunkte dieser Kugel mit den Kugeln der anderen Schar, welche durch die drei Kreise gehen. Derjenige Kreis, welcher durch a, b, c gelegt werden kann, wird sodann (nach Satz 284) ebenfalls eine Krümmungslinie der Cyclide darstellen.

Nachdem aber jede Krümmungslinie einer Schar (auf jeder beliebigen Fläche) auf jeder Krümmungslinie der anderen Schar senkrecht steht, so folgt der interessante Satz:

294. *„Legt man durch die drei Punkte, in welchen eine Kugel drei Kreise, die zwei Punkte gemein haben, berührt, einen Kreis, so schneidet dieser letztere jeden der drei Kreise unter rechtem Winkel."*

Ebenso einfach gelangt man zu den folgenden Erzeugungsweisen:

295. „Alle Kreise, welche durch zwei beliebige Punkte gehen und einen Kreis, dessen Ebene auf der Verbindungsgeraden der beiden Punkte senkrecht steht, rechtwinklig schneiden, erzeugen eine Dupin'sche Cyclide, zu deren Krümmungslinien die obgenannten Kreise zählen."

und:

296. „Alle Kreise, welche zwei feste Ebenen berühren und einen festen Kreis, dessen Ebene durch die Schnittgerade der beiden Ebenen geht, unter rechten Winkeln schneiden, erzeugen eine Cyclide, deren Krümmungslinien diese Kreise sind."

Ferner:

297. „Alle Kreise, welche drei feste Kreise, die zwei Punkte gemein haben, rechtwinklig schneiden, erzeugen eine Dupin'sche Cyclide."

§. 325.

Seien wieder S_1, S_2, S_3 drei Leitkugeln der Cyclide, welche sich in den Punkten δ_1 und δ_2 schneiden mögen. Die Verbindungsgerade $\delta_1 \delta_2$ ist sodann die Potenzachse dieser drei Kugeln.

Ist Σ eine beliebige erzeugende Kugel, welche die Kugeln S_1, S_2, S_3 beziehungsweise in den Punkten a_1, a_2 und a_3 berührt und denkt man sich in den Punkten a_1, a_2, a_3 die Tangentialeben der Kugel Σ, also auch der drei Kugeln S_1, S_2, S_3 construiert, so schneiden sich diese drei Berührebenen in einem Punkte σ, welcher nothwendig auf der Potenzgeraden $\delta_1 \delta_2$ liegen muss, da derselbe der Potenzpunkt der vier Kugeln S_1, S_2, S_3, Σ ist. Dieser Punkt ist aber gleichzeitig auch der Scheitel des der Kugel Σ, also auch der der Cyclide, längs des Kreises $(a_1 a_2 a_3)$ umschriebenen Kegels. Dies ergibt den Satz:

298. „Die Scheitel aller Kegel, welche einer Cyclide längs den Kreisen der einen Schar umschrieben sind, liegen auf der Verbindungsgeraden der Knotenpunkte der anderen Schar und umgekehrt."

§. 326.

Die Kugeln der Schar Σ werden von zwei festen Ebenen berührt, welche durch die Verbindungsgerade der Knotenpunkte der anderen Schar gehen. Nun haben wir aber gefunden, dass die Scheitel jener

Kegel, welche längs den Krümmungskreisen der Schar Σ der Cyclide umschrieben sind, auf der eben genannten Verbindungsgeraden liegen; es werden daher auch diese von den beiden Ebenen berührt werden müssen. Wir erhalten somit den Satz:

299. „Die der Dupin'schen Cyclide aus den Punkten jener Geraden, welche die zwei Knotenpunkte der einen Schar von Kreisen verbindet, umschriebenen Kegelflächen sind gerade Kreiskegel, welche sämmtlich von zwei festen Ebenen berührt werden und die Cyclide selbst in den Kreisen der anderen Schar berühren.“

§. 327.

Die Cyclide besitzt, wie dem vorstehenden Satze leicht zu entnehmen ist, zwei umschriebene gerade Kreiscylinder, deren Achsen und Erzeugenden zu den Verbindungsgeraden der beiden Paare von Knotenpunkten parallel sind. Da diese beiden Geraden zu einander rechtwinklig sind und auch zu den betreffenden Symmetrieebenen der Fläche (Satz 286) senkrecht stehen, so ist einleuchtend, dass, wenn man die beiden Symmetrieebenen als Projectionsebenen annimmt, die beiden Contouren der Cyclide auf diesen Projectionsebenen Kreise sein werden, welche gleichzeitig die Schnitte der Cyclide mit den beiden Projectionsebenen darstellen.

Ferner gibt es in jedem Systeme zwei Kegel, welche in Ebenen, und zwar in die beiden Ebenen jeder Kugelschar degenerieren, welche die sämmtlichen Kugeln der anderen Schar berühren.

§. 328.

Da sich durch Inversion eine Curve n-ter Ordnung im allgemeinen in eine Curve $2n$-ter Ordnung verwandelt, so ist leicht zu zeigen, dass die Cyclide eine Fläche vierter Ordnung sei.

Denken wir uns nämlich die Cyclide durch inverse Transformation in einen Rotationskegel verwandelt und durch das Inversionscentrum eine beliebige Ebene gelegt, welche diesen Kegel selbstverständlich nach einen Kegelschnitt schneidet, so entspricht diesem letzteren in derselben Ebene invers eine Curve vierter Ordnung, welche im Inversionscentrum einen Doppelpunkt besitzt und den Schnitt dieser Ebene mit der Cyclide darstellt.

Oder man denkt sich durch das Inversionscentrum eine beliebige Gerade g gezogen. Dieselbe hat im Inversionscentrum mit der Fläche

zwei Punkte gemein, da das Centrum mit einem conischen Punkte der Cyclide coincidiert. Ferner trifft diese Gerade die Kegelfläche in zwei Punkten, welchen invers die beiden weiteren Schnittpunkte der Cyclide mit der Geraden g entsprechen. Außer diesen vier Punkten hat die Gerade mit der Fläche keine Punkte gemein; es ist daher die besprochene Fläche eine Fläche vierter Ordnung, und mithin besteht der Satz:

300. „Die Dupin'sche Cyclide ist eine Fläche vierter Ordnung.“ [3])

Dritter Abschnitt.

Die Rotationsflächen zweiten Grades.

XVIII. Capitel.

§. 329.

In Früherem (Band II) wurde bereits der Nachweis erbracht, dass, wenn zwei von den drei Hauptachsen einer Fläche zweiten Grades gleich lang sind, der durch diese Achsen bestimmte Hauptschnitt der Fläche ein Kreis sei, während die beiden anderen Hauptschnitte zwei congruente Kegelschnitte sind.

Unterziehen wir nun diesen Fall einer eingehenderen Betrachtung. Die drei Hauptachsen einer Fläche zweiten Grades seien a, b, c. Setzen wir diesfalls voraus, dass die beiden Hauptachsen b und c einander gleich wären und die Länge b besäßen, während die dritte Hauptachse als die von den genannten Achsen verschiedene, durch a repräsentiert werden mag.

Infolge dieser Annahme ist der durch die beiden gleichen Achsen $b = c$ bestimmte Hauptschnitt der Fläche ein Kreis K, dessen Ebene zu der dritten Achse a senkrecht steht. Jede durch die Achse a gelegte Ebene schneidet diesen Kreis K in zwei Punkten, welche Endpunkte eines Kreisdurchmessers sind. Die Achse a und je einer dieser letztbezeichneten Durchmesser bestimmen die Achsen des Schnittes, in welchem die genannte, durch a gelegte Ebene die Fläche zweiten Grades schneidet.

Berücksichsigt man, dass alle Durchmesser eines Kreises unter einander gleich sind, dass also alle Kegelschnitte, in welchen die durch die Achse a gehenden Ebenen die Fläche schneiden, diese

Achse *a* gemein, die zweiten Achsen aber sämmtlich gleich haben, so folgt ohne weiters, dass diese Fläche durch Umdrehung irgend eines Kegelschnittes um eine seiner Achsen entstanden gedacht werden kann. Zwei in diese Kategorie gehörende Flächen und zwar das windschiefe Umdrehungshyperboloid, welches man durch Rotation einer Hyperbel um ihre imaginäre Achse, oder durch Drehung einer Geraden um eine feste, die erstere nicht schneidende Gerade erzeugen kann, und die Kugel, welche durch Umdrehung eines Kreises um einen seiner Durchmesser entsteht, haben wir bereits kennen gelernt.

Jede solche Fläche zweiten Grades, welche durch Umdrehung eines Kegelschnittes um eine seiner Achsen entsteht, nennt man eine „Umdrehungsfläche", „Drehfläche", „Rotationsfläche" oder „Revolutionsfläche" zweiten Grades.

Was diese Flächen betrifft, so kann man fünf verschiedene Arten derselben unterscheiden, und zwar:

a) Das bifocale oder überhöhte Ellipsoid, welches durch Umdrehung einer Ellipse um ihre große Achse entsteht.

b) Das sphärofocale oder abgeplattete Ellipsoid, oder auch Sphäroid, welches durch Rotation einer Ellipse um deren kleine Achse entsteht.

c) Das Rotationsparaboloid, welches eine Parabel bei der Umdrehung um ihre Achse erzeugt.

d) Das einmantelige, einfache oder windschiefe Hyperboloid, erzeugt durch Rotation einer Hyperbel um ihre imaginäre Achse, und endlich:

e) Das zweitheilige oder zweimantelige Rotationshyperboloid, welches durch eine um ihre reelle Achse rotierende Hyperbel erzeugt wird.

§. 330.

Gemeinschaftliche, charakteristische Eigenschaften der Flächen zweiten Grades.

Bevor wir darauf übergehen, uns mit jeder dieser Flächen einzeln zu beschäftigen, dürfte es ebenso zweckmäßig als nothwendig erscheinen, einige denselben, infolge ihrer Erzeugung als Umdrehungsflächen, anhaftende gemeinsame charakteristische Eigenschaften aufzusuchen.

Der Kürze wegen, wollen wir zunächst gewisse Bezeichnungen einführen. Den rotierenden Kegelschnitt bezeichnen wir, einerlei in was immer für einer Lage sich derselbe während der Drehung befindet, stets mit K; den Kreis, welchen die zweite Achse bei der Umdrehung beschreibt, wollen wir immer C heißen; ferner werden wir die Rotationsachse mit Z und eine beliebige durch dieselbe gehende Ebene, mit E_z, e_z, B_z, H_z etc. bezeichnen.

Jeder beliebige Punkt des Kegelschnittes K beschreibt bei der Umdrehung um Z einen Kreis, dessen Ebene zur Ebene des Kreises C parallel ist, also zur Rotationsachse Z senkrecht steht, dessen Mittelpunkt der Schnitt dieser Ebene mit der Achse Z, oder mit anderen Worten, der Fußpunkt des von dem obgenannten rotierenden Punkte auf die Achse Z gefällten Perpendikels ist, und dessen Radius durch die jeweilige Länge dieses Perpendikels bestimmt wird.

Es gilt daher allgemein für die Rotationsflächen der Satz:

301. „Jede Rotationsfläche zweiten Grades wird von einer zur Drehachse senkrechten Ebene in einem Kreise geschnitten, dessen Mittelpunkt auf der Drehachse liegt.“

§. 331.

Alle auf diese Weise erhaltenen Kreisschnitte nennt man die „Parallelkreise“ der Rotationsfläche. Der Kreis C, welchem unter den genannten Kreisen im allgemeinen der größte Radius (beim windschiefen Umdrehungshyperboloid der kleinste) entspricht, wird häufig auch als „Äquator“ der Rotationsfläche bezeichnet.

Geht die schneidende Ebene durch einen der Endpunkte dei Rotationsachse, während sie auf derselben senkrecht steht, so reduciert sich deren Schnittkreis mit der Fläche auf diesen Endpunkt; die schneidende Ebene wird also zur Berührungsebene.

Gleichzeitig erhalten wir auch den wichtigen, aus der Erzeugungsart der Flächen „als Umdrehungsflächen“ direct folgenden Satz:

302. „Die Ebenen, welche durch die Drehachse einer Rotationsfläche zweiten Grades gehen, schneiden diese stets in congruenten Kegelschnitten.“

Besagte Ebenen, welche bei allen Umdrehungsflächen durch die Drehachse derselben gehen, pflegt man die „Meridianebenen“ und die in denselben liegenden congruenten Schnitte der Fläche, die „Meridiane der Umdrehungsfläche“ zu nennen.

§. 332.

Da jedes Paar aufeinander senkrecht stehender Durchmesser eines Kreises als dessen Achsen betrachtet werden können, so ist klar, dass die Drehachse Z einer Umdrehungsfläche im Vereine mit zwei beliebigen rechtwinkligen Durchmessern D_1 und D_2 des Äquatorialkreises C, stets als drei Achsen der Fläche aufgefasst werden können.

Der Durchmesser D_1 ist sodann der Haupt- oder Meridianebene (D_2, Z) conjugiert, und der der Rotationsfläche längs des zugehörigen Meridians umgeschriebene Cylinder hat daher den Durchmesser D_1 (nach Satz 435, Band II) zur Achse, oder was auf dasselbe hinausläuft, der der Rotationsfläche längs eines Meridians umschriebene Cylinder hat diesen Meridian zum senkrechten Querschnitt.

Aus dieser Eigenschaft und der Congruenz sämmtlicher Meridiane folgt sofort auch die Congruenz aller der Rotationsfläche, längs der Meridiane, umschriebenen Cylinder. Mithin gilt der Satz:

303. „Sämmtliche einer Revolutionsfläche zweiten Grades längs ihrer Meridiane umschriebenen Cylinder sind untereinander und deren senkrechte Querschnitte den Meridianen congruent.“

Denkt man sich den einen dieser Cylinder mit der Rotationsachse in starrer Verbindung, und letzteren um diese herumgedreht, so wird derselbe in jeder Lage die Rotationsfläche längs eines Meridianes berühren. Hiernach ergibt sich die nachstehende Entstehungsart:

304. „Dreht sich ein beliebiger Cylinder zweiten Grades um eine der Achsen seines normalen Querschnittes, so umhüllt derselbe eine Rotationsfläche zweiten Grades, deren Meridiane mit dem genannten Querschnitte congruent sind.“

§. 333.

Da die Rotationsachse einer Umdrehungsfläche zweiten Grades zur Ebene des Äquators, sowie zu jeder zu derselben parallelen Ebene conjugiert ist, folgt (als Specialfall eines allgemeineren Satzes 444, Band II), dass der einer Rotationsfläche von einem beliebigen Punkte der Rotationsachse aus umschriebene Kegel ein Rotationskegel ist, dass dessen Berührungscurve ein Parallelkreis und dass seine Achse mit der Rotationsachse identisch sei.

Zu gleichem Resultate gelangen wir übrigens auch unmittelbar durch nachstehende einfache Betrachtung.

Vor allem Anderen berücksichtigen wir, dass jede Gerade, welche eine auf einer beliebigen Fläche liegende Curve in einem Punkte berührt, auch eine Tangente der Fläche in diesem Punkte dar-

stelle, und ferner beachten wir, dass der einer Fläche aus einem Punkte außerhalb umschriebene Kegel von denjenigen Tangenten der Fläche gebildet werde, welche durch diesen Punkt gehen.

Denken wir uns nun einen beliebigen Punkt S auf der Rotationsachse angenommen, und von demselben an irgend einen beliebigen Meridiankegelschnitt k die Tangente t gelegt, deren Berührungspunkt a sein möge.

Dreht man den Kegelschnitt k sowohl, als auch die Tangente t um die Rotationsachse Z, so erzeugt der erstere die Rotationsfläche selbst, die Tangente t hingegen einen Kegel, dessen Erzeugenden die Meridiane, also auch die Fläche selbst berühren. Letzterer wird demgemäß den der Fläche aus dem Punkte S umschriebenen Kegel repräsentieren. Der Berührungspunkt a beschreibt hierbei einen Kreis, welcher gleichzeitig die Berührungscurve des Kegels darstellt. Der Kegel selbst ist, da derselbe durch Umdrehung einer Geraden entsteht, ein Rotationskegel. Mithin der Satz:

305. „Jeder einer Rotationsfläche zweiten Grades aus einem Punkte ihrer Rotationsachse umschriebene Kegel ist ein Rotationskegel, dessen Achse mit jener der Fläche zusammenfällt, und welcher die letztere in einem Parallelkreise berührt.“

Rückt der Kegelscheitel auf der Rotationsachse in unendliche Entfernung, so übergeht der umschriebene Kegel in einen umschriebenen Cylinder, welcher die Rotationsfläche längs des Äquatorialkreises berührt.

§. 334.

Da eine Tangentialebene einer krummen Fläche in einem ihrer Punkte vollkommen bestimmt ist, sobald man zwei Tangenten der Fläche im betreffenden Berührungspunkte kennt, so wird es offenbar in dem Falle, als wir es mit Rotationsflächen zu thun haben, am einfachsten sein, behufs Bestimmung der Tangentialebene in einem ihrer Punkte, die Tangenten des durch diesen Punkt gehenden Parallelkreises und Meridianes zu verwenden.

Sei demnach Z die Rotationsachse, a ein beliebiger Punkt der Rotationsfläche, K_a der durch denselben gehende Meridian, c_a der durch den nämlichen Punkt gehende Parallelkreis und o der auf der Rotationsachse Z liegende Mittelpunkt des letzteren.

Die Tangente t_k des Meridians K_a im Punkte a schneidet die Rotationsachse, da beide Geraden in der Ebene des Meridians K_a liegen, in einem Punkte S.

Die Tangente t_c des Parallelkreises c im Punkte a steht senkrecht zu dem Radius ao. Da dieselbe aber in der Parallelkreisebene liegt und diese zur Rotationsachse, also auch zu der Ebene des Meridianes K_a senkrecht steht, so wird offenbar die besagte Parallelkreistangente auch zu der Ebene des Meridianes K_a senkrecht stehen müssen.

Die Berührungsebene der Rotationsfläche im Punkte a wird mithin, da sie durch die beiden Tangenten t_k und t_c bestimmt ist, ebenfalls auf der Ebene des Meridianes K_a senkrecht stehen. Daher der Satz:

306. „*Die Berührungsebene einer Rotationsfläche steht stets senkrecht auf jener Meridianebene, welche durch ihren Berührungspunkt geht.*"

§. 335.

Die Normale einer Fläche in einem ihrer Punkte ist jene Gerade, welche durch diesen Punkt senkrecht zu der betreffenden Berührebene gezogen wird. Da nun auf Grund des vorstehenden Satzes die Berührebene auf der Meridianebene selbst senkrecht steht, so ist einleuchtend, dass die Normale der Rotationsfläche in dem Punkte a, in der diesem Punkte entsprechenden Meridianebene liegen müsse. Nachdem aber in der letzteren auch die Rotationsachse liegt, so ist selbstverständlich, dass die jeweilige Normale der Rotationsfläche in dem betreffenden Punkte a die Rotationsachse Z in einem Punkte schneiden müsse. Da das Gleiche von jedem anderen Punkte der Rotationsfläche gilt, so besteht der Satz:

307. „*Sämmtliche Normalen einer Rotationsfläche schneiden die Rotationsachse der Fläche.*"

Die Normale einer Fläche in einem Punkte a steht senkrecht auf allen durch diesen Punkt gezogenen Curven der Fläche. Dies beachtend, können wir den eben aufgestellten Satz auch in folgender Form aussprechen:

308. „*Die Normale einer Rotationsfläche in einem ihrer Punkte ist gleichzeitig die Normale des durch diesen Punkt gehenden Meridians.*"

§. 336.

Nehmen wir einen beliebigen Meridian K an; n_a sei die Normale desselben im Punkte a, also auch, mit Zugrundelegung des eben ausgesprochenen Satzes, die Normale der Rotationsfläche in dem nämlichen Punkte a. Diese Normale möge die Rotationsachse im Punkte N_a schneiden.

Denkt man sich den Meridian K in starrer Verbindung mit der Normale n_a um die Rotationsachse Z gedreht, so erzeugt derselbe eine Rotationsfläche. Die Normale hingegen, welche in jeder Lage während der Rotation zu dem betreffenden Meridian, also auch zur Fläche selbst normal bleibt, erzeugt einen Rotationskegel mit dem Scheitel N_a, während ihr Fußpunkt a auf der Fläche einen Parallelkreis c_a beschreibt. Mithin der Satz:

309. „Die Normalen einer Rotationsfläche in den Punkten eines und desselben Parallelkreises sind Erzeugenden eines Rotationskegels, dessen Achse mit der Rotationsachse identisch ist.“

Den Kegel (N_a, c_a) pflegt man den „Normalenkegel“ der Rotationsfläche längs des Parallelkreises c_a zu nennen.

§. 337.

Denkt man sich aus dem Punkte N_a, als Mittelpunkt, eine Kugel beschrieben, welche durch den zugehörigen Parallelkreis c_a geht, deren Radius somit der Länge $a N_a$ der Normalen gleich kömmt, so ist klar, dass diese Kugel die Rotationsfläche längs des Parallelkreises c_a berühren muss, da deren Berührebene in einem beliebigen Punkte a dieses Parallelkreises zu dem zugehörigen Radius $a N_a$ senkrecht steht. Die besagte Ebene ist mithin auch die Tangentialebene der Rotationsfläche in dem nämlichen Punkte a. Wir erhalten mithin den Satz:

310. „Längs eines jeden Parallelkreises lässt sich einer Rotationsfläche eine Kugel einschreiben. Der Mittelpunkt dieser Kugel ist der Scheitel des zu dem Parallelkreise gehörenden Normalenkegels der Rotationsfläche.“

§. 338.

Da die Normale der Rotationsfläche in jedem Punkte derselben in der Meridianebene dieses Punktes liegt, so erfüllen die Normalen einer Rotationsfläche in allen Punkten eines und desselben Meridians eine Ebene, d. i. die Ebene dieses Meridians.

Nachdem also sowohl die Normalenflächen einer Rotationsfläche längs der Parallelkreise, als auch längs der Meridiane aufwickelbare Flächen sind (die ersteren sind [nach Satz 310] Rotationskegel, die letzteren, wie wir eben gesehen haben, sind Meridianebenen), so bilden diese Curven die beiden Systeme von Krümmungslinien der Rotationsfläche. Daher der Satz:

311. „Die Parallelkreise einer Rotationsfläche bilden das eine System, die Meridiane das zweite System von Krümmungslinien dieser Fläche.“

§. 339.

Noch sei der folgenden zwei Erzeugungsweisen der Rotationsflächen Erwähnung gethan, welche aus den Sätzen 301) und 310) unmittelbar folgen:

312. „Bewegt sich ein veränderlicher Kreis derart, dass sein Mittelpunkt beständig auf einer Geraden, seine Ebene aber senkrecht zu dieser Geraden bleibt, und ein Punkt seiner Peripherie stets eine gegebene feste Curve schneidet, so erzeugt derselbe eine Rotationsfläche.“

Und:

313. „Bewegt sich eine Kugel so, dass ihr Mittelpunkt stetig auf einer Geraden fortrückt, während ihr Radius sich stetig verändert, so umhüllt dieselbe eine Rotationsfläche.“

Die sämmtlichen hier entwickelten Sätze gelten überhaupt für jede Art von Rotationsflächen, die Meridiane derselben mögen was immer für Curven sein. Bezeichnete Sätze wurden hier vorausgeschickt, resp. abgeleitet und festgestellt, weil uns dieselben in der Folge bei der speciellen Untersuchung der Rotationsflächen zweiten Grades von Nutzen sein werden.

Hiermit übergehen wir auf die Entwicklung der besonderen Eigenschaften der fünf Arten von Rotationsflächen zweiten Grades.

§. 340.

A. Das bifocale oder überhöhte Ellipsoid.

Die meisten Eigenschaften dieser Fläche, sowie überhaupt aller Umdrehungsflächen zweiten Grades, werden sich aus jenen ihres Meridiankegelschnittes ergeben.

Das bifocale Ellipsoid entsteht durch Umdrehung einer Ellipse um ihre große Achse. Die Endpunkte der kleinen Achse beschreiben den Äquatorialkreis.

Nehmen wir, der Einfachheit wegen, die horizontale Projectionsebene parallel zu der Ebene ε_v (Taf. XIV, Fig. 71) des Äquatorialkreises (C, C') an, wählen diese Projectionsebene also so, dass der letztere, auf diese orthogonal projiciert, in wahrer Größe dargestellt erscheint.

Auf dem Ellipsoid selbst denken wir uns einen beliebigen Punkt a angenommen, und überdies die verticale Projectionsebene so gewählt,

dass sie eine zu der Meridianebene η_h dieses Punktes parallele Lage annimmt. Der letztere wird sodann durch (a, a') dargestellt erscheinen. Die diesen Punkt enthaltende Meridianellipse (E, E') erscheint, zufolge dieser Annahme, in der verticalen Projection in wahrer Größe und Gestalt. Die Drehungsachse (Z, Z') stellt sich sonach diesfalls als eine horizontalprojicierende Gerade dar.

Nach dieser Vorbereitung wollen wir eine der wichtigsten Eigenschaften des Umdrehungsellipsoides ableiten.

Schreiben wir dem Ellipsoide eine Kugel (K_0, K'_0) längs des Äquators (C, C') ein. Diese Kugel hat als Radius jenen des Äquators, d. i. die kleine Halbachse der Meridianellipse (E, E'). Besagte Kugel wird von der Meridianebene η_v in einem größten Kreise K_0 geschnitten, welcher die Meridianellipse in den Endpunkten A und B der kleinen Achse berührt, gleichzeitig aber mit der Ellipse concentrisch ist.

Wie aus der Theorie der Kegelschnitte bekannt, ist dieser Kreis K_0 mit der Ellipse E affin. Hierbei repräsentiert die kleine Achse AB die Affinitätsachse. Die Affinitätsstrahlen stehen auf dieser Achse senkrecht, und der Affinitätsmodul, d. h. das Verhältnis der Abstände entsprechender Punkte beider Curven E und K_0 von der Affinitätsachse ist dem Verhältnisse der beiden Achsen der Meridianellipse gleich.

Zieht man von einem beliebigen Punkte a der Ellipse E eine Senkrechte $a\alpha$ zu der Achse AB, so wird letztere in einem Punkte α und der Kreis K_0 in einem Punkte a_0 geschnitten und es ist:

$$a\alpha : a_0\alpha = \text{constant} = z : r,$$

wenn z die Länge der großen Halbachse der Ellipse und r den Radius des Kreises K_0 repräsentiert.

Nun ist aber, wie bereits bei der Darstellung des Ellipsoides angenommen wurde, (a, a') ein beliebiger Punkt der Fläche. Der Punkt (a_0, a') des Kreises (K_0, K'_0) liegt auf der Kugel (K, K'), und ist der Durchstoßpunkt derselben mit der durch (a, a') gehenden, zur Äquatorebene senkrechten Geraden. Es wird demnach die Beziehung

$$a\alpha : a_0\alpha = z : r$$

für jeden beliebigen Punkt (a, a') des Ellipsoides und den zugehörenden Punkt (a_0, a') der eingeschriebenen Kugel (K, K') gelten.

Aus der Constanz dieses Verhältnisses ist leicht zu entnehmen, dass die Kugel und das Ellipsoid zwei affine Gebilde sind, deren Affinitätsebene die Äquatorialebene ε_v des Ellipsoides ist; die Affinitätsstrahlen sind zur Affinitätsebene senkrecht, und

der **Affinitätsmodul** ist durch das Achsenverhältnis der Meridianellipse dargestellt.

Wir erhalten daher den wichtigen Satz:

314. „Die einem bifocalen Ellipsoide längs des Äquatorialkreises eingeschriebene Kugel ist mit der Fläche des Ellipsoides orthogonal affin verwandt. Die Affinitätsebene ist die Äquatorialebene und der Affinitätsmodul ist dem Achsenverhältnisse der Meridianellipse gleich.“

Auf der Anwendung dieses Satzes beruhen die meisten Vereinfachungen in der Construction der Schnitte, sowie jener der Tangentialebenen des Rotationsellipsoides, wie wir in der Folge häufig genug Gelegenheit finden werden, uns zu überzeugen.

§. 341.

Aus diesem Satze ergibt sich, wenn wir die bereits bekannten Gesetze der räumlichen Affinität berücksichtigen, unmittelbar der nachstehende.

Da nämlich die Tangentialebene einer Fläche durch affine Transformation in die Tangentialebene der transformierten Fläche übergeht, und weiters einander entsprechende Ebenen sich in einer Geraden der Affinitätsebene schneiden, so findet man den Satz:

315. „Wird einem Rotationsellipsoide eine Kugel längs des Äquatorialkreises eingeschrieben, und legt man durch eine beliebige Gerade der Äquatorialebene eine Tangentialebene an das Ellipsoid sowohl, als auch an die eingeschriebene Kugel, so liegen die Berührungspunkte beider in einer und derselben zur Äquatorialebene senkrechten Geraden.“

Ebenso leicht ist der nachstehende Satz aus den bekannten allgemeinen Gesetzen der **affinen Transformation** abzuleiten:

316. „Wird einem bifocalen Ellipsoide eine Kugel längs des Äquatorialkreises eingeschrieben und schneidet eine beliebige Gerade g das Ellipsoid in zwei Punkten, so werden die Senkrechten von diesen beiden Punkten auf die Äquatorebene die eingeschriebene Kugel in vier Punkten derart treffen, dass zwei von den vier möglichen Verbindungsgeraden dieser Punkte die Äquatorialebene in dem nämlichen Punkte schneiden, wie die Gerade g.“

§. 342.

Wie wir aus der Theorie der Kegelschnitte wissen, sind überhaupt zwei Ellipsen, welche eine gemeinschaftliche Achse (der Rich-

tung und Länge nach) besitzen, in Bezug auf die obgenannte Achse als Affinitätsachse und das Verhältnis der beiden anderen ungleich langen Achsen als Affinitätsmodul, affin.

Sind demnach zwei Ellipsen, welche dieselbe kleine Achse haben, gegeben, und dreht man diese Ellipsen um ihre große Achse, so erhält man zwei bifocale Ellipsoide, welche sich längs des Äquatorialkreises berühren.

Diese beiden Ellipsoide sind affin, da es ihre entsprechenden Meridiane sind. Die Äquatorialebene ist die Affinitätsebene, die Affinität ist eine orthogonale, und der Affinitätsmodul ist dem Verhältnisse der beiden anderen, in der Rotationsachse vereinigten Ellipsenachsen, gleich. Dies liefert den Satz:

317. „Berühren sich zwei bifocale Rotationsellipsoide längs des Äquatorialkreises, so sind dieselben immer orthogonal affin verwandt; die Affinitätsebene ist die Äquatorialebene beider Flächen und das Verhältnis der in der Rotationsachse vereinigten Ellipsenachsen repräsentiert den Affinitätsmodul."

Wie unschwer zu erkennen, ist der Satz 314) nur ein specieller Fall des vorstehenden allgemeineren Satzes.

§. 343.

Eine andere Reihe von Sätzen ergibt sich durch Übertragung der Brennpunktseigenschaften einer Ellipse auf die Rotationsfläche.

Dreht sich nämlich die Ellipse E (Taf. XIV, Fig. 71) um ihre große Achse, so bleiben sämmtliche Punkte der letzteren, also auch die beiden Brennpunkte F_1 und F_2 der Meridianellipse unverändert.

Hieraus folgt unmittelbar, dass alle Meridianellipsen des bifocalen Umdrehungsellipsoides die nämlichen Brennpunkte besitzen. Die letzteren werden die „Brennpunkte" des Ellipsoides genannt. Infolge der Existenz dieser beiden Brennpunkte heißt das Ellipsoid ein „bifocales".

Denken wir uns nun einen beliebigen Punkt a des Ellipsoides angenommen und mit den beiden Brennpunkten F_1 und F_2 verbunden. Die beiden Radienvectoren $F_1 a$ und $F_2 a$ liegen in der Meridianebene des Punktes a und sind demnach auch Focalradien des durch a gehenden Meridianes. Als solche ist die Summe ihrer Längen gleich der Länge der Rotationsachse. Da dasselbe von jedem anderen Punkte des Ellipsoides gilt, so erhält man den Satz:

318. „Verbindet man einen beliebigen Punkt eines bifocalen Ellipsoides mit den beiden Brennpunkten der Fläche, so ist die Längensumme derselben gleich der Länge der Rotations- (Brennpunkts-) Achse des Ellipsoides.“

Durch Umkehrung des vorstehenden Satzes findet man den folgenden:

319. „Der geometrische Ort aller Punkte im Raume, die von zwei festen Punkten Abstände besitzen, deren Summe einer gegebenen Strecke gleich kömmt, ist ein bifocales Umdrehungsellipsoid, dessen Rotationsachse durch die Verbindungsgerade der beiden festen Punkte der Lage nach und durch die gegebene Strecke der Länge nach bestimmt ist.“

§. 344.

Denken wir uns zwei Kugeln S und s, wovon die eine s, innerhalb der andern S liegen soll. Es frägt sich um den Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche die beiden Kugeln S und s berühren.

Sei m der Mittelpunkt einer solchen Kugel, ϱ ihr Radius, während O und o die Mittelpunkte, R und r die Radien der beiden gegebenen Kugeln S und s vorstellen mögen.

Die Kugel (m, ϱ) berührt die Kugel s von außen; es ist daher

$$m\,o = r + \varrho;$$

die Kugel S hingegen werde von innen berührt; es wird somit

$$m\,O = R - \varrho$$

sein.

Hieraus findet man sofort:

$$m\,O + m\,o = R + r$$

d. h. der veränderliche Mittelpunkt m besitzt von den beiden festen Mittelpunkten O und o Abstände, deren Summe der Summe der Radien der gegebenen Kugeln gleich ist. Somit erhalten wir den Satz:

320. „Der Ort des Mittelpunktes einer veränderlichen Kugel, welche in jeder Lage zwei gegebene Kugeln (wovon die eine innerhalb der anderen liegt) berührt, ist ein bifocales Ellipsoid. — Die Mittelpunkte der beiden gegebenen Kugeln sind die Brennpunkte des Ellipsoides; die Verbindungsgerade der letzteren ist die Rotationsachse, deren Länge der Summe der Radien beider Kugeln gleich ist.“

Hiernach ist unschwer zu erkennen, dass, wenn bei einer Dupinschen Cyclide zwei Leitkugeln von der dritten umschlossen werden, der Ort der Mittelpunkte der umhüllenden Kugeln die Schnittcurve zweier Rotationsellipsoide, d. h. eine Curve vierter Ordnung sei.

§. 345.

Sei S eine beliebige Kugel, M der Mittelpunkt derselben und R deren Radius. Im Inneren dieser Kugel sei irgend ein Punkt N gegeben. Es ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kugeln festzustellen, welche durch einen bestimmten Punkt N gehen und die Kugel S berühren.

Vorausgesetzt, es sei Σ eine derartige Kugel, o deren Mittelpunkt und ϱ ihr Radius. Dieselbe berühre die gegebene Kugel S im Punkte α. Die drei Punkte M, o und α liegen bekanntlich auf einer und derselben Geraden.

Hiernach ist $M\alpha = R = Mo + \varrho$ oder $R - \varrho = Mo$.

Ferner ist, da die Kugel Σ durch N geht, $No = \varrho$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$Mo + No = R - \varrho + \varrho = R$$

d. h. die Summe der Abstände des Kugelmittelpunktes o von dem Mittelpunkte M der gegebenen Kugel und von dem gegebenen Punkte N ist constant, u. z. gleich dem Radius der gegebenen Kugel. Es besteht mithin der Satz:

321. „Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche durch einen gegebenen Punkt im Innern einer gegebenen Kugel gehen und die letztere berühren, ist ein bifocales Rotationsellipsoid, dessen Rotationsachse die Verbindungsgerade des gegebenen Punktes mit dem Mittelpunkte der gegebenen Kugel ist, und dessen Brennpunkte diese beiden Punkte sind. Die Länge der Rotationsachse ist gleich dem Radius der gegebenen Kugel.“

§. 346.

Denken wir uns in einem beliebigen Punkte a eines bifocalen Ellipsoides die Berührebene construiert; dieselbe steht (nach Satz 306) auf der Ebene des durch a (Taf. XIV, Fig. 71) gehenden Meridianes senkrecht und enthält die Tangente t dieses Meridianes im Punkte a.

Verbindet man die beiden Brennpunkte des Ellipsoides mit dem Berührungspunkte a, so erhält man bekanntlich zwei gegen die Tangente t gleichgeneigte Geraden. Diese Geraden liegen nun aber in der zur Berührungsebene senkrechten Meridianebene; daher, als natürliche Folge, die Tangente t deren orthogonalen Projectionen auf die Berührebene in sich vereinigt. Hieraus erhellt aber sofort, dass die beiden Geraden $F_1 a$ und $F_2 a$ auch mit der Berührungsebene in a gleiche Winkel bilden, oder kurz, dass a der Glanzpunkt in der Berührebene für die beiden Punkte F_1 und F_2 sei. Mithin:

322. „Wird eine beliebige Tangentialebene an ein bifocales Umdrehungsellipsoid gelegt, so ist der entsprechende Berührungspunkt der Glanzpunkt der Ebene für die beiden Brennpunkte des Ellipsoides.“

§. 347.

Beschreiben wir über der Rotationsachse eines bifocalen Ellipsoides, als Durchmesser, eine Kugel. Sei ferner T_a die Tangentialebene des Ellipsoides in einem beliebigen Punkte a und K_a der durch a gehende Meridian.

Die Ebene dieses Meridians steht auf der Berührebene T_a senkrecht und schneidet dieselbe in einer Geraden t_a, welche nichts anderes, als die Tangente des Meridians K_a im Punkte a darstellt. Die oben genannte Kugel wird ferner durch diese Meridianebene in einem Kreise C_a geschnitten, der die große Achse des Meridians (Rotationsachse) zum Durchmesser hat.

Fällen wir von den Brennpunkten F_1 und F_2 der Meridianellipse die Senkrechten $F_1\alpha_1$ und $F_2\alpha_2$ auf die Ebene T_a. Die Fußpunkte dieser Senkrechten seien α_1 und α_2. Da die Geraden $F_1\alpha_1$ und $F_2\alpha_2$ in der Ebene des Meridianes K_a liegen, so sind deren Fußpunkte α_1 und α_2 Punkte der Tangente t_a des Meridianes, u. z. repräsentieren dieselben die Fußpunkte der von den Brennpunkten F_1 und F_2 auf die Ellipsentangente t_a gefällten Perpendikel.

Diese Fußpunkte liegen aber bekanntlich auf dem Kreise C_a, welcher über der großen Achse der Meridianellipse K_a als Durchmesser beschrieben wird; es sind dieselben daher auch Punkte jener Kugel, von welcher C_a ein größter Kreis ist. Es gilt somit der Satz:

323. „Die Fußpunkte der Perpendikel, die von den Brennpunkten eines bifocalen Ellipsoides auf die Tangentialebenen des letzteren gefällt werden, liegen auf jener Kugel, welche über der Rotationsachse als Durchmesser beschrieben wird.“

§. 348.

Ist E irgend eine Ellipse, F ein Brennpunkt derselben und D die Polare von F, d. h. die dem Brennpunkte F entsprechende Directrix, so hat, wie bekannt, die Ellipse die Eigenschaft, dass die Entfernungen irgend eines Punktes derselben von dem Brennpunkt F und von der Directrix D in einem constanten Verhältnisse (kleiner als 1) stehen.

Denken wir uns die Ellipse E um ihre große Achse gedreht, so erzeugt dieselbe ein bifocales Ellipsoid, und die Directrix D, da sie

zur Rotationsachse senkrecht steht, eine zu der letzteren senkrechte Ebene, welche offenbar die Polarebene des Brennpunktes F in Bezug auf das Ellipsoid darstellt.

Fällt man von einem beliebigen Punkte a des Ellipsoides eine Senkrechte σ_1 auf die obgenannte Ebene, welche wir als die dem Brennpunkte F entsprechende „Directrixebene" bezeichnen wollen, und verbinden wir a mit dem Brennpunkte F durch die Gerade σ_2, so liegen σ_1 und σ_2 in der Meridianebene des Punktes a. Es ist hiernach für die Meridianellipse das Verhältnis: $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ constant.

Da aber alle Meridiane congruent sind und alle die gleiche Lage gegen die Directrixebene haben, so gilt dieses constante Verhältnis nicht nur für alle Punkte eines Meridians, sondern überhaupt für alle Punkte des Ellipsoides. Mithin besteht der Satz:

324. „Das Verhältnis der Abstände der Punkte eines bifocalen Rotationsellipsoides von einem Brennpunkte desselben und von der ihm entsprechenden Directrixebene (Polarebene des Brennpunktes) ist constant und kleiner als die Einheit."

Durch Umkehrung dieses Satzes gelangen wir zu nachstehendem Resultate:

325. „Der geometrische Ort aller Punkte im Raume, die von einem festen Punkte und von einer festen Ebene Abstände besitzen, deren Verhältnis constant und kleiner als die Einheit ist, ist ein bifocales Rotationsellipsoid. Die Rotationsachse desselben ist die Normale von dem festen Punkte auf die feste Ebene, der feste Punkt ist ein Brennpunkt und die feste Ebene ist die ihm entsprechende Directrixebene des Ellipsoides."

§. 349.

Denken wir uns weiters einem bifocalen Rotationsellipsoide einen beliebigen Kegel umschrieben; S (Taf. XIV, Fig. 72) sei dessen Scheitel.

Da jede Meridianebene eine Ebene orthogonaler Symmetrie für das Ellipsoid repräsentiert, so wird insbesondere die durch den Kegelscheitel S gehende Meridianebene auch eine Ebene orthogonaler Symmetrie für den aus S dem Ellipsoide umschriebenen Kegel sein.

Die letztbezeichnete Ebene, welche wir unmittelbar als Projectionsebene wählen, schneidet das Ellipsoid in einer Meridianellipse E und den aus S umschriebenen Kegel in zwei Erzeugenden, welche diesfalls als die von S aus an E gezogenen Tangenten Sa und Sb dargestellt erscheinen.

Der Schnitt dieses Kegels mit der Äquatorebene ε_v ist ein Kegelschnitt K. Die Punkte a und b, in welchen diese Ebene ε_v die vorgenannten Kegelerzeugenden Sa und Sb trifft, sind als eine unmittelbare Folge der früher angegebenen Symmetrie, zwei Scheitel dieses Kegelschnittes K.

Ziehen wir ferner noch jene Geraden, welche den Kegelscheitel S mit den Endpunkten A und B der Rotationsachse verbinden. Diese Geraden liegen gleichfalls in der Ebene der Meridianellipse E, und treffen daher die Achse ab des Kegelschnittes K, in zwei Punkten F_1 und F_2, von welchen sich ohne besondere Schwierigkeit nachweisen lässt, dass sie die Brennpunkte des Kegelschnittes K sind.

Auf Grund des Vorausgeschickten (Satz 314) ist bekannt, dass ein bifocales Ellipsoid und die demselben, längs des Äquatorialkreises, eingeschriebene Kugel orthogonal affin sind in Bezug auf die Äquatorebene, als Affinitätsebene. Der Modul der Affinität ist dem Verhältnisse der beiden Achsen der Meridianellipse gleich.

Denken wir uns diesfalls das Ellipsoid in die eben erwähnte Kugel affin transformiert, und vollführen wir dasselbe gleichzeitig auch bezüglich des aus S umschriebenen Kegels.

Nachdem einer Tangente des Ellipsoides affin eine Tangente der Kugel entspricht, so wird dem Kegel, welcher aus dem Scheitel S dem Ellipsoide umschrieben ist, jener Kegel affin entsprechen, welcher der Kugel aus dem dem Punkte S affin entsprechenden Punkt S_0 umschrieben ist. Da sich weiters je zwei affin entsprechende Geraden in einem und demselben Punkte der Affinitätsebene schneiden, so ist einleuchtend, dass die beiden affinen Kegel den in der Affinitätsebene liegenden Kegelschnitt K gemein haben müssen.

Berücksichtigen wir ferner, dass den Endpunkten A und B der Rotationsachse des Ellipsoides jene beiden Punkte A_0 und B_0 entsprechen, in welchen die affine Kugel die Rotationsachse schneidet, so entsprechen sich auch die Geradenpaare SA und S_0A_0; SB und S_0B_0, und müssen sich dieselben daher wieder in denselben zwei Punkten F_1 und F_2 der Affinitätsebene schneiden.

Sehen wir nun nach, was durch die vollzogene Transformation erreicht wurde. Wir erhielten einen geraden Kreiskegel, mit dem Scheitel S_0, welcher einer gewissen Kugel umschrieben ist. Diesen Kreiskegel haben wir durch eine Ebene ε_v nach einem Kegelschnitt K geschnitten, sodann die Endpunkte A_0 und B_0 des zu dieser Ebene senkrechten Durchmessers der eingeschriebenen Kugel mit dem Kegelscheitel S_0 verbunden, und schließlich die Schnittpunkte F_1 und F_2 dieser Verbindungsgeraden mit der schneidenden Ebene ε_v bestimmt.

Hieraus folgt mit Zugrundelegung des Dandelin'schen Satzes (Satz 507, Band II) unmittelbar, dass die Punkte F_1 und F_2 die Brennpunkte des Kegelschnittes K seien.

Nachdem aber der Kegelschnitt K auch jenem Kegel angehört, welcher dem Ellipsoide aus dem Scheitel S umschrieben ist, und die Punkte F_1 und F_2 auf jenen Geraden liegen, welche den Kegelscheitel mit den Endpunkten A und B der Rotationsachse des Ellipsoides verbinden; nachdem ferner, weil parallele Ebenen einen Kegel stets in ähnlichen Kegelschnitten schneiden, deren Brennpunkte sämmtlich auf zwei der Lage der schneidenden Ebenen entsprechenden, durch den Kegelscheitel gehenden Geraden liegen — wird jede zur Ebene ε_0 parallele, kurz jede zur Rotationsachse senkrechte Ebene den aus S dem Ellipsoide umschriebenen Kegel nach einem Kegelschnitt K' schneiden, und die beiden Geraden SA und SB in zwei Punkten F_1' und F_2' treffen, welche wieder die Brennpunkte des Kegelschnittes K' repräsentieren werden. Wir gelangen demnach zu dem Satze:

326. „Wird einem bifocalen Rotationsellipsoide aus einem beliebigen Punkte außerhalb ein Kegel umschrieben und werden die Endpunkte der Rotationsachse mit dem Kegelscheitel durch zwei Geraden verbunden, so schneidet jede zur Rotationsachse senkrechte Ebene den Kegel in einem Kegelschnitte, dessen Brennpunkte die Treffpunkte der schneidenden Ebene mit den beiden vorgenannten Geraden sind.“

§. 350.

Eine weitere Eigenschaft des Rotationsellipsoides ergibt sich, wenn man den mit dem Dandelin'schen Satze verwandten Quetelet'schen Satz in geeigneter Weise benützt.

Mit Zugrundelegung dieser Sätze sind nämlich die Brennpunkte eines Kegelschnittes die Mittelpunkte zweier unendlich kleinen Kreise, welche mit dem Kegelschnitte eine doppelte Berührung eingehen.

Denken wir uns einem bifocalen Rotationsellipsoide längs eines Parallelkreises C_1 (Taf. XIV, Fig. 73), eine Kugel S_1 eingeschrieben, und legen wir an diese Kugel eine beliebige Berührebene T, deren Berührungspunkt f_1 sein mag. Der Berührungshalbmesser, indem wir o als den Mittelpunkt der Kugel S_1 annehmen, ist of_1. Ferner sei K derjenige Kegelschnitt, in welchem das Ellipsoid von der Ebene T geschnitten wird.

Auf Grund des angezogenen Quetelet'schen Satzes kann nun leicht gezeigt werden, dass der Berührungspunkt f_1 der Kugel S_1 mit der Ebene T ein Brennpunkt des Kegelschnittes K sei.

Führen wir zu diesem Zwecke eine Ebene T' parallel zur Ebene T derart, dass sie den Parallelkreis c_1, in welchem die Kugel S_1 das Ellipsoid berührt, in den Punkten α_1 und α_2 treffe. Diese Ebene T' wird sodann das Ellipsoid in einem Kegelschnitte K_1 und die Kugel S_1 in einem Kreise γ_1 schneiden. Die so erhaltenen Schnittcurven werden sich in den beiden Punkten α_1 und α_2 berühren; denn dieselben besitzen in diesen Punkten gemeinschaftliche Tangenten. Die Schnittgeraden der Ebene T' gehen also mit den Berührebenen des Ellipsoides und der Kugel in den Punkten α_1 und α_2 oder mit anderen Worten, der Kreis γ_1 geht mit dem Kegelschnitte K_1 eine doppelte Berührung ein.

Denken wir uns weiters die Ebene T' parallel zu sich selbst in der Weise verschoben, dass sie sich der ursprünglichen Ebene T unaufhörlich nähert. Dabei werden sich die beiden Curven K_1 und γ_1 selbstverständlich ändern, ohne dass dieselben jedoch aufhören, sich in zwei Punkten, den jeweiligen Schnittpunkten α_1 und α_2 von T' mit dem Parallelkreise c_1 zu berühren.

Das Gesagte gilt selbst auch dann noch, wenn die Punkte α_1 und α_2 bei fortgesetzter Verschiebung der Ebene T' imaginär werden, der Kreis γ_1 also innerhalb des entsprechenden Kegelschnittes zu liegen kommt. Die doppelte Berührung ist eben in diesem Falle eine imaginäre.

Übergeht endlich die Ebene T' in die Grenzlage T, so übergeht gleichzeitig der Kegelschnitt K_1 in den Kegelschnitt K und der Kreis γ_1 in den Berührungspunkt f_1, d. h. in einen unendlich kleinen Kreis f_1, welcher mit dem Kegelschnitte K ebenfalls eine (imaginäre) doppelte Berührung eingeht und mithin, nach dem Quetelet-schen Satze, den einen Brennpunkt des Kegelschnittes K darstellt.

Es lässt sich endlich dem Ellipsoide noch eine zweite Kugel S_2 einschreiben, die gleichfalls die Ebene T berührt. Der entsprechende Berührungspunkt f_2 ist sodann der zweite Brennpunkt des Kegelschnittes K. Mithin der Satz:

327. „Die Brennpunkte eines ebenen Querschnittes des bifocalen Rotationsellipsoides sind die Berührungspunkte der schneidenden Ebene mit jenen zwei dieselben tangierenden Kugeln, deren jede auch das Ellipsoid nach je einem Parallelkreise berührt."

Dieser Satz hat, wie unschwer zu erkennen, eine merkwürdige Analogie mit dem vorerwähnten Dandelin'schen Satze.

§. 351.

Wird ein beliebiges bifocales Rotationsellipsoid durch irgend eine Ebene P (Taf. XIV, Fig. 74) in einem Kegelschnitte K getroffen und

projiciert man diesen Kegelschnitt aus einem der beiden Scheitel des Ellipsoides (unter Scheitel die Endpunkte der Rotationsachse verstanden) durch einen Kegel, so hat dieser letztere eine besondere Eigenschaft.

Transformieren wir, um diese Eigenschaft feststellen zu können, das Ellipsoid wieder affin in jene Kugel S_0, welcher der Äquatorialkreis als größter Kreis entspricht, so übergeht die Ebene P in eine Ebene P_0 und der Kegelschnitt K, in welchem die Ebene P das Ellipsoid schneidet in jenen Kreis, in welchem die Ebene P_0 die affine Kugel S_0 begegnet.

Ferner entspricht dem Scheitel A des Ellipsoides der Endpunkt A_0 des zur Affinitätsebene ε_e senkrechten Kugeldurchmessers, mithin dem Kegel (A, K) der Kegel (A_0, K_0). Diese beiden affinen Kegel schneiden sich nothwendig in einer und derselben in der Affinitätsebene liegenden Curve γ.

Es handelt sich nun darum, den Charakter dieser sich selbstentsprechenden Curve γ beider Kegel zu finden.

Bringen wir zu diesem Behufe den Satz 189) in Anwendung, nach welchem die zweiten Kreisschnittsebenen eines Kegels, dessen Scheitel in einem Kugelpunkte liegt und irgend einen auf der Kugel liegenden Kreis enthält, zu der Berührebene der Kugel in dem Kegelscheitel parallel sind, so ergibt sich im vorliegenden Falle unmittelbar, dass der Kegel (A_0, K_0), außer von den zu P_0 parallelen Ebenen, auch noch von jenen Ebenen in Kreisen geschnitten wird, welche zur Berührungsebene der Kugel im Punkte A_0, also zur Äquatorialebene parallel sind.

Es wird mithin auch die Schnittcurve γ des Kegels (A_0, K_0) mit der Äquatorebene ein Kreis sein. Da aber dieser Kreis γ auch dem Kegel (A, K), welcher dem Kegel (A_0, K_0) affin entspricht, angehört, so folgt der merkwürdige Satz:

328. „Nimmt man einen Scheitel eines bifocalen Rotationsellipsoides als Kegelscheitel an und einen beliebigen Kegelschnitt auf dem Ellipsoide als Leitcurve des Kegels, so wird letzterer von allen zur Rotationsachse senkrechten Ebenen in Kreisen geschnitten.“

XIX. Capitel.

Das sphäroidale oder abgeplattete Rotationsellipsoid oder das Sphäroid.

§. 352.

Diese Umdrehungsfläche entsteht durch Rotation einer Ellipse um ihre kleine Achse. Besagte Fläche kann, wie sogleich gezeigt werden soll, ebenfalls affin in eine Kugel transformiert werden.

Denken wir uns eine beliebige Ellipse E (Taf. XIV, Fig. 75) und beschreiben wir über der großen Achse CD derselben als Durchmesser einen Kreis E_0, so wird dieser die Ellipse E in den beiden Punkten C und D berühren. Die beiden genannten Curven E und E_0 sind orthogonal affin, die Achse CD ist die Affinitätsachse und der Affinitätsmodul ist dem Achsenverhältnisse der Ellipse E gleich.

Denkt man sich nun sowohl die Ellipse, als auch den Kreis E_0 um die kleine Achse AB der ersteren gedreht, so erzeugt die Ellipse E ein Sphäroid und der Kreis E_0 eine dem Sphäroid längs des Äquatorialkreises umschriebene Kugel.

Da sämmtliche durch die Achse gehenden, also zur Äquatorebene senkrechten Ebenen das Sphäroid und die Kugel in Ellipsen, beziehungsweise Kreisen schneiden, die affin verwandt sind, so gilt das Gleiche auch für das Sphäroid und die Kugel. Die Affinitätsebene ist die Äquatorebene und der Affinitätsmodul wird durch das Achsenverhältnis der Meridianellipse bestimmt. Es gilt daher der Satz:

329. „Jedes Sphäroid ist orthogonal affin mit derjenigen Kugel, welche demselben längs des Äquatorialkreises umschrieben ist; die Äquatorialebene ist diesfalls die Affinitätsebene und das Achsenverhältnis der Meridianellipse repräsentiert den Modul der Affinität."

§. 353.

Nachdem dieser Satz ebenso für das bifocale Ellipsoid wie für das Sphäroid gilt (nur mit dem Unterschiede, dass dort die affine Kugel nicht um- sondern eingeschrieben ist), so werden für das Sphäroid auch all diejenigen Sätze gelten, die aus dem vorstehenden Satze abgeleitet werden können. Es sind dies die Sätze 326) und 328), welche, sobald man das bifocale und das abgeplattete Ellipsoid allgemein oder gemeinschaftlich als „Umdrehungsellipsoide" auffasst und ebenso bezeichnet, folgendermaßen ausgesprochen werden können:

330. „Wird aus irgend einem Punkte im Raume als Scheitel einem beliebigen Rotationsellipsoide ein Kegel umschrieben und verbindet man den Kegelscheitel mit den Endpunkten der Rotationsachse durch zwei Geraden, so schneidet jede zur Rotationsachse senkrechte Ebene diesen Kegel in einem Kegelschnitt, dessen Brennpunkte die Durchstoßpunkte der oben genannten zwei Geraden mit der schneidenden Ebene sind.“

Der zweite obangezogene Satz 328) lautet nun allgemein:

331. „Betrachtet man bei einem beliebigen Umdrehungsellipsoide den einen oder anderen Scheitel (Endpunkt der Rotationsachse) als Scheitel eines Kegels, welcher durch einen beliebigen Kegelschnitt auf dem Ellipsoide gelegt werden kann, so wird dieser Kegel von allen zur Rotationsachse senkrechten Ebenen in Kreisen geschnitten.“

§. 354.

Während bei einem bifocalen Ellipsoide die Brennpunkte der Meridianellipse ihre Lage bei der Rotation nicht änderten, da die Brennpunktsachse als Rotationsachse diente, wird die Sachlage bei dem Sphäroid eine andere sein.

Die beiden Brennpunkte f_1 und f_2 der Meridianellipse liegen in diesem Falle nicht auf der Rotationsachse, beschreiben daher bei ihrer diesfallsigen Drehung einen in der Äquatorebene liegenden, mit dem Äquatorialkreise concentrischen Kreis, dessen Radius die lineare Excentricität der Meridianellipse ist. Diesen Kreis nennen wir den „Focalkreis“ des Sphäroides.

Die Endpunkte eines Durchmessers dieses Kreises sind offenbar die Brennpunkte derjenigen Meridianellipse, welche diesen Durchmesser zur Achse hat, oder was dasselbe ist, deren Meridianebene durch den besagten Durchmesser geht.

Die Brennpunkte eines beliebigen Meridians sind also die Schnittpunkte der Meridianebene mit dem Focalkreise. Wir pflegen dieselben „die der zugehörigen Meridianebene conjugierten Brennpunkte“ zu nennen.

Denken wir uns nun einen beliebigen Punkt a auf dem Sphäroide angenommen. Die durch denselben gehende Meridianebene schneidet das Sphäroid in der durch a gehenden Meridianellipse und den Focalkreis des Sphäroides in den Brennpunkten f_1 und f_2 dieser Meridianellipse.

Die Summe der Entfernungen des Punktes a von diesen Punkten f_1 und f_2 ist sodann gleich der großen Achse der Meridian-

ellipse, oder was dasselbe ist, gleich dem Durchmesser des Sphäroidäquators. Besagte Summe ist mithin für jeden Punkt des Sphäroides dieselbe. Dies Resultat gibt, mit Rücksicht auf die oben angegebene Bezeichnung, den Satz:

332. „Die Summe der Entfernungen eines beliebigen Punktes des Sphäroides von den Brennpunkten, welche der durch diesen Punkt gehenden Meridianebene conjugiert sind, ist constant, und zwar gleich dem Durchmesser des Äquatorialkreises des Sphäroides.“

§. 355.

Vorstehendem Satze können wir noch eine andere einfachere Gestalt geben.

Behufs Erreichung besagten Zweckes stellen wir folgende einfache Betrachtung an. Sei K (Taf. XIV, Fig. 76) ein beliebiger Kreis, A ein Punkt im Raume und a dessen Projection auf die Kreisebene E. Ziehen wir den durch a gehenden Kreisdurchmesser, dessen Endpunkte m und n sein mögen, so ist leicht einzusehen, dass Am und An die kleinste, beziehungsweise größte Entfernung des Punktes A von den Punkten des Kreisumfanges sei.

Ist nämlich p ein beliebiger Punkt des Kreises, so wird es nicht schwer sein, zu zeigen, dass immer

$$Am < Ap < An$$

ist; denn offenbar ist

$$am < ap < an, \text{ also auch } am^2 < ap^2 < an^2$$

und mithin

$$am^2 + Aa^2 < ap^2 + Aa^2 < an^2 + Aa^2$$

oder, was dasselbe ist,

$$Am^2 < Ap^2 < An^2 \text{ und folglich}$$

$$Am < Ap < An.$$

Diese Strecken Am und An wollen wir beziehungsweise als „Minimal- und Maximal-Distanz“ eines Punktes A von dem Kreise K bezeichnen.

Dieselben liegen stets in derjenigen zur Kreisebene senkrechten Ebene, welche sowohl den Punkt A, als auch den Mittelpunkt o des Kreises K enthält. Wir können sonach den Satz 332) auch in der folgenden einfacheren Form aussprechen:

333. „Die Summe der Maximal- und Minimaldistanz eines beliebigen Punktes des Sphäroides von dem Focalkreise ist constant und gleich dem Durchmesser des Äquatorialkreises.“

Dieser Satz lässt sich auch umkehren und daher in nachstehender Form zum Ausdrucke bringen:

334. „Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Summe der Maximal- und Minimaldistanz von einem gegebenen Kreise constant ist, ist ein Sphäroid, dessen Focalkreis der gegebene Kreis und dessen Äquator ein Kreis von einem jener constanten Strecke gleichen Durchmesser ist.“

§. 356.

Die Berührungsebene eines Sphäroides in einem Punkte a sei T_a. Verbindet man a mit den der Meridianebene (durch a) conjugierten Brennpunkten f_1 und f_2, so liegen die Verbindungsgeraden $f_1 a$ und $f_2 a$ in der Meridianebene, und schließen mit der Tangente t_a der Meridianellipse im Punkte a gleiche Winkel ein.

Nachdem aber die Meridianebene auf der Tangentialebene T_a senkrecht steht und dieselbe in der genannten Tangente t_a schneidet, so folgt, dass die Geraden $f_1 a$ und $f_2 a$ auch mit der Tangentialebene T_a gleiche Winkel einschließen.

Da überdies die genannten Geraden in der zur Tangentialebene senkrechten Meridianebene liegen, so ist klar, dass der Punkt a der Glanzpunkt der Ebene T_a für die Punkte f_1 und f_2 ist. Wir gelangen sonach zu dem Satze:

335. „Wird an ein Sphäroid in einem Punkte eine Berührebene gelegt, so ist der Berührungspunkt gleichzeitig der Glanzpunkt der Ebene für jene beiden Brennpunkte, welche der Meridianebene des Berührungspunktes conjugiert sind.“

§. 357.

Sei wieder T_a eine beliebige Tangentialebene des Sphäroides; a der Berührungspunkt derselben und K_a die durch den Berührungspunkt a gehende Meridianellipse.

Die Ebene dieses Meridians schneidet den Focalkreis in den Brennpunkten f_1 und f_2 der Ellipse K_a, die Tangentialebene T_a dagegen in der Tangente t_a der Meridianellipse K_a im Punkte a, und die dem Sphäroide längs des Äquators umschriebene Kugel ϱ in einem größten Kreise E_0, welcher die Meridianellipse K_a in den Endpunkten ihrer großen Achse berührt.

Zieht man nun von f_1 und f_2 die Perpendikel auf die Gerade t_a, so liegen die Fußpunkte derselben bekanntlich auf dem eben genannten Kreise E_0, also auch auf der Kugel S.

Da aber weiters die besagten Normalen in der Meridianebene des Berührungspunktes a liegen und diese Ebene senkrecht zur Tangentialebene T_a ist, so sind dieselben auch Perpendikel dieser Tangentialebene und es gehören somit die früher genannten Fußpunkte auf t_a auch der Ebene T_a an.

Hiernach ist ersichtlich, dass die Fußpunkte der Normalen, welche von den der Meridianebene K_a^s conjugierten Brennpunkten f_1 und f_2 auf die Tangentialebene T_a gefällt werden, auf jener Kugel, welche dem Sphäroide längs des Äquators umschrieben wird, liegen müssen. Daher der Satz:

336. „Wird an ein Sphäroid eine beliebige Tangentialebene gelegt und fällt man von jenen Brennpunkten, welche der Meridianebene des Berührungspunktes conjugiert sind, Perpendikel auf diese Tangentialebene, so liegen die Fußpunkte derselben auf jener Kugel, welche dem Sphäroide längs des Äquatorialkreises umschrieben ist.“

Auf ähnliche Weise könnten nunmehr eine große Zahl namentlich metrischer Eigenschaften der Ellipse, auf die beiden Ellipsoide übertragen werden, doch dürfte es, da deren Entwicklung keinerlei Schwierigkeit bietet, überflüssig sein, dieselben speciell zu erörtern. Eine Reihe von Eigenschaften, die beiden eben besprochenen Flächen zweiten Grades betreffend, werden wir noch an späterer Stelle kennen lernen.

XX. Capitel.

Das Rotations-Paraboloid.

§. 358.

Diese Umdrehungsfläche zweiten Grades wird von einer Parabel erzeugt, welche um ihre Achse rotiert.

Der Brennpunkt der Meridianparabel liegt auf der Rotationsachse und bleibt mithin während der Rotation unveränderlich. Derselbe ist gleichzeitig der Brennpunkt aller Meridianparabeln, und wird daher auch der „Brennpunkt des Rotationsparaboloides“ genannt.

Denken wir uns eine beliebige Parabel P; A sei deren Achse; F deren Brennpunkt und d die Polare des Brennpunktes, d. h. die Directrix der Parabel. Jeder Punkt a der Parabel hat bekanntlich die

Eigenschaft, dass seine Distanz von dem Brennpunkte jener von der Directrix gleich ist.

Wird nun die Parabel P um die Achse A gedreht, so erzeugt dieselbe ein Rotationsparaboloid; die Directrix d erzeugt, da sie zur Rotationsachse A senkrecht steht, eine Ebene, die selbst wieder zur Rotationsachse normal ist und die „Directrixebene" des Rotationsparaboloides heißen mag.

Stellt a einen ganz willkürlich gewählten Punkt des Paraboloides dar, so ist unschwer nachzuweisen, dass dessen Abstand von dem Brennpunkte F des Paraboloides dem Abstande $a\,\delta$ von der Directrixebene gleich ist.

Legen wir nämlich durch den Punkt a die Meridianebene, so enthält diese die beiden genannten Abstände, und schneidet das Paraboloid in einer Meridianparabel, deren Brennpunkt F ist und deren Directrix sich als die Schnittgerade d der Directrixebene D mit der Meridianebene ergibt. Für diese Parabel, also auch für das Paraboloid selbst, ist der Abstand $a\,\delta = a\,F$.

Das Gleiche gilt für jeden beliebigen Punkt a des Paraboloides und mithin gilt der Satz:

337. „*Jeder Punkt des Rotationsparaboloides hat den nämlichen Abstand von dem Brennpunkte des Paraboloides wie von der Directrixebene desselben.*"

Aus diesem Satze folgt unmittelbar, durch einfache Umkehrung, der nachstehende Satz:

338. „*Der geometrische Ort aller Punkte, welche von einer gegebenen Ebene und von einem gegebenen festen Punkte gleiche Abstände besitzen, ist ein Rotationsparaboloid, dessen Rotationsachse die Senkrechte von dem festen Punkte auf die feste Ebene, dessen Brennpunkt der feste Punkt und dessen Directrixebene die feste Ebene ist.*"

§. 359.

Der vorbezeichnete geometrische Ort lässt noch eine anderweitige Deutung zu.

Ist nämlich D eine feste Ebene, F ein fester Punkt und stellt S eine Kugel vor, welche die Ebene D in einem Punkte δ berührt und durch den Punkt F geht, so sind, wenn wir den Kugelmittelpunkt mit M bezeichnen, die Strecken $M\,F$ und $M\,\delta$ als Kugelradien einander gleich. Die Strecke $M\,\delta$ repräsentiert aber überdies noch, da sie den Berührungsradius der Ebene D mit der Kugel S darstellt, den Abstand des Kugelmittelpunktes M von dieser Ebene.

Denken wir uns nun die oberwähnte Kugel veränderlich, und berücksichtigen wir den vorstehenden Satz, so ergibt sich direct der folgende:

339. „*Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche eine gegebene feste Ebene berühren und durch einen gegebenen Punkt gehen, ist ein Rotationsparaboloid, dessen Drehachse die Normale von dem gegebenen Punkte auf die feste Ebene, dessen Brennpunkt der feste Punkt und dessen Directrixebene die gegebene Ebene ist.*"

§. 360.

Dreht sich eine Parabel um ihre Achse und wird ihre Scheiteltangente t_A gleichzeitig mitgedreht, so erzeugt diese letztere bei der Drehung die Tangentialebene T_A des Paraboloides im Scheitel A desselben.

Jede Meridianebene wird somit die Fläche in einer Parabel und die Ebene T_A in der zugehörigen Scheiteltangente t_A schneiden.

Die Berührebene des Rotationsparaboloides in einem beliebigen Punkte a desselben sei T_a. Fällen wir von dem Brennpunkte F des Paraboloides eine Senkrechte $F\alpha$ auf die eben erwähnte Tangentialebene und sei α deren Fußpunkt. Legen wir ferner durch den Punkt a die Meridianebene, so schneidet dieselbe einerseits die Tangentialebene T_a in der der Meridianparabel im Punkte a entsprechenden Tangente t_a und andererseits die Scheiteltangentialebene T_A in der Scheiteltangente t_A der Meridianparabel.

Nachdem aber das Perpendikel $F\alpha$ auf der Ebene T_a auch zugleich das Perpendikel auf die in dieser Ebene liegende Tangente t_a ist, und nachdem, gemäß eines bekannten Satzes, der Fußpunkt α dieses Perpendikels in der Scheiteltangente t_A, also auch in der Scheiteltangentialebene T_A liegt, so folgt der Satz:

340. „*Zieht man von dem Brennpunkte eines Rotationsparaboloides beliebige Geraden, und legt in jenen Punkten, in welchen sie die Scheiteltangentialebene schneiden, auf dieselben senkrechte Ebenen, so sind diese letzteren stets Tangentialebenen des Paraboloides.*"

Oder auch in folgender Form:

341. „*Bewegt sich ein Strahl um einen gegebenen Punkt im Raume, und legt man jedesmal in dem Punkte, in welchem derselbe eine gegebene feste Ebene trifft, eine zu ihm senkrechte Ebene, so umhüllt diese letztere ein Rotationsparaboloid. Der gegebene Punkt ist der Brennpunkt, die gegebene Ebene die Scheiteltangentialebene, und die Senkrechte von dem gegebenen Punkte zur gegebenen Ebene die Rotationsachse des Paraboloides.*"

§. 361.

Da die Parabel, als Grenzfall einer Ellipse mit unendlich großer Achse angesehen werden kann, so kann auch das Rotationsparaboloid als Grenzfall eines Rotationsellipsoides betrachtet werden, oder mit anderen Worten: es erscheint zulässig das Rotationsparaboloid als ein Rotationsellipsoid aufzufassen, dessen eine Scheitel in unendliche Entfernung fällt.

Auf Grund dieser Anschauung lässt sich auch der Satz 328) auf das Paraboloid übertragen.

Ist nämlich K ein beliebiger ebener Schnitt des Rotationsparaboloides, und legt man durch denselben einen Cylinder parallel zur Rotationsachse, d. h. einen Kegel, dessen Scheitel der unendlich ferne zweite Scheitel des Paraboloides ist, so wird, nach dem obangezogenen Satze, dieser Cylinder von den zur Rotationsachse senkrechten Ebenen in Kreisen geschnitten.

Da aber die Erzeugenden des Cylinders, als parallel zur Rotationsachse, auf diesen Kreisschnittsebenen selbst senkrecht stehen, so folgt, dass dieser Cylinder ein gerader Kreiscylinder oder ein Rotationscylinder sein müsse.

Dieses Ergebnis führt zu dem merkwürdigen Satze:

342. „Jeder Cylinder, welcher durch einen beliebigen ebenen Schnitt eines Rotationsparaboloides parallel zur Rotationsachse geführt wird, ist ein gerader Kreiscylinder.“

Oder auch in folgender Form:

343. „Die orthogonale Projection eines beliebigen ebenen Schnittes eines Rotationsparaboloides auf eine zur Rotationsachse senkrechte Ebene ist stets ein Kreis.“

§. 362.

Auf gleiche Weise lässt sich bei der Annahme, dass das Rotationsparaboloid als Grenzfall eines Rotationsellipsoides aufgefasst werden kann, der Satz 326) auf die vorliegende Fläche übertragen.

Wir ziehen es jedoch vor, denselben in einer anderen Weise direct abzuleiten.

Sei K_0 (Taf. XIV, Fig. 77) ein Kreis, den wir collinear in eine Parabel K verwandeln wollen. Die einzige Bedingung hiefür ist bekanntlich die, dass die Gegenachse G_a den Kreis K_0 in einem Punkte B_0 berühre.

Die Collineationsachse wählen wir als eine beliebige, zur Gegenachse G_a parallele Gerade C_a, und das Collineationscentrum C auf

jenem Durchmesser Z des Kreises K_0, welcher auf den Achsen G_a und C_a senkrecht steht.

Unter diesen Voraussetzungen transformiert sich der Kreis K_0 collinear bekanntlich in eine Parabel K, deren Achse Z das Collineationscentrum enthält und deren Scheitel A dem einen Endpunkte A_0 des zur Collineationsachse C_a senkrechten Kreisdurchmessers entspricht. Das Collinearbild des zweiten Endpunktes B_0 ist der unendlich ferne Punkt B_∞ der Parabel K.

Denken wir uns den Kreis K_0, die Parabel K und die beiden Achsen G_a und C_a um die Gerade Z gedreht, so erzeugt der Kreis K_0 eine Kugel S_0, die Parabel K ein Rotationsparaboloid, während die beiden Geraden G_a und C_a, da dieselben zur Drehachse Z senkrecht stehen, zwei Ebenen G_e und C_e beschreiben. Das Collineationscentrum C, sowie die Punkte A_0, B_0, A_1 und B_∞ bleiben bei der Drehung um Z selbstverständlich ungeändert, da sie auf der Drehachse Z liegen.

Nimmt man nun C als Collineationscentrum, die Ebenen G_e und C_e beziehungsweise als Gegenebene und Collineationsebene an, so ist unschwer einzusehen, dass die Kugel S_0 und das Rotationsparaboloid S collineare Flächen sind. Denn trifft irgend ein Strahl g aus C die Kugel S_0 in einem Punkte p_0 und das Paraboloid S in einem Punkte p, so sind dieselben in Bezug auf die Ebene C_e als Collineationsebene und die Ebene G_e als Gegenebene collinear.

Legt man nämlich durch den Strahl g und die Rotationsachse Z eine Ebene, so schneidet diese S_0, S_1, C_e, G_e in K'_0, K', C'_a und G'_a so, dass beziehungsweise K'_0 und K' einen Kreis und eine Parabel darstellen, die in Bezug auf C'_a und G'_a als Collineations- und Gegenachse collinear sind. Offenbar sind sodann p_0 und p als Punkte von K'_0 und K' ebenfalls collinear.

Die Tangentialebene $T_A{}^0$ der Kugel S_0 im Punkte A_0 ist zur Collineationsebene C_e parallel; es wird mithin die ihr entsprechende Tangentialebene T_A ebenfalls zur Collineationsebene parallel, oder zur Rotationsachse Z senkrecht sein. Hieraus folgt aber, dass deren Berührungspunkt A der Scheitel des Paraboloides S sein müsse.

Da endlich der Kreis K_0 und die Parabel K zwei gemeinschaftliche, durch das Collineationscentrum C gehende, und gegen die Rotationsachse Z symmetrische Tangenten besitzen, die bei der Umdrehung einen Kreiskegel erzeugen, welcher die Kugel und das Rotationsparaboloid berührt, so gelangen wir zu folgendem Satze:

344. „Ein Rotationsparaboloid kann stets als die collineare Fläche einer Kugel betrachtet werden, wenn man als Collineationscentrum einen beliebigen Punkt der Rotationsachse, und als Kugel

eine solche wählt, welche dem aus diesem Punkte dem Paraboloide umschriebenen Rotationskegel eingeschrieben ist, und endlich als Gegenebene eine von den beiden zur Rotationsachse senkrechten Berührebenen der Kugel annimmt."

§. 363.

Denken wir uns weiters einen beliebigen Punkt Σ im Raume. Der dem Rotationsparaboloide S (Taf. XIV, Fig. 77) aus diesem Punkte Σ umschriebene Kegel schneide die Collineationsebene C_e in einem Kegelschnitte γ. Ferner schneide die Gerade, welche den Kegelscheitel Σ mit dem Scheitel A des Rotationsparaboloides verbindet, die Collineationsebene C_e in f_1 und endlich möge jene Gerade, welche von Σ aus nach dem zweiten unendlich fernen Scheitel B_∞, d. h. parallel zur Rotationsachse Z, also senkrecht zur Collineationsebene C_e geführt wird, diese letztere im Punkte f_2 treffen.

Es kann nunmehr leicht nachgewiesen werden, dass f_1 und f_2 die Brennpunkte des Kegelschnittes γ seien.

Dem Punkte Σ entspricht collinear ein Punkt Σ_0, und dem aus Σ dem Paraboloide S umschriebenen Kegel entspricht der aus Σ_0 der Kugel S_0 umschriebene Kegel, welcher die Collineationsebene C_e in dem nämlichen Kegelschnitte γ wie der erstgenannte Kegel schneiden muss. Ferner entsprechen den beiden Geraden ΣA und ΣB_∞ die beiden Geraden $\Sigma_0 A_0$ und $\Sigma_0 B_0$. Selbstverständlich müssen die letzteren, ebenso wie die ersteren, die Collineationsebene C_e in den gleichnamigen Punkten f_1 und f_2 treffen.

Wir haben hiernach in γ den ebenen Schnitt eines der Kugel S_0 aus dem Punkte Σ_0 umschriebenen Kegels, und in f_1 und f_2 die Schnittpunkte der Ebene C_e des Kegelschnittes γ mit jenen beiden Geraden ΣA_0 und ΣB_0, welche den Kegelscheitel Σ_0 mit den Endpunkten A_0 und B_0 des zu jener Ebene C_e senkrechten Kugeldurchmessers verbinden.

Auf Grund des Dandelin'schen Satzes (Band II, Satz 507) sind sonach f_1 und f_2 die Brennpunkte des Kegelschnittes γ.

Nachdem einerseits der Kegelschnitt γ auch dem aus Σ dem Rotationsparaboloide umschriebenen Kegel angehört und andererseits parallele Schnitte eines Kegels ähnlich Kegelschnitte sind, welche sämmtlich ihre Brennpunkte auf zwei durch den Kegelscheitel gehenden Geraden haben, so erhalten wir den Satz:

345. „*Wird einem Rotationsparaboloide von einem beliebigen Punkte außerhalb ein Kegel umschrieben und der Kegelscheitel mit dem Scheitel des Paraboloides verbunden; zieht man weiters durch*

den Kegelscheitel eine Parallele zur Rotationsachse, so sind die Brennpunkte jener Kegelschnitte, in welchen der Kegel von zur Rotationsachse senkrechten Ebenen geschnitten wird, die Schnittpunkte der schneidenden Ebene mit den beiden obgenannten Geraden.“

§. 364.

Berücksichtigt man, dass der Kegel Σ von einer Ebene C_e in einem Kegelschnitte γ getroffen wird, dessen eine Brennpunkt f_2 auf der Senkrechten aus dem Kegelscheitel Σ auf die schneidende Ebene C_e liegt, so ist, nach der in §. 490, Band II) aufgestellten Definition, die Gerade Σf_2 eine „Focallinie“ des Kegels, und wir erhalten mithin den Satz:

346. „Wird einem Rotationsparaboloide aus einem beliebigen Punkte im Raume ein Kegel umschrieben, so ist die Gerade, welche durch den Kegelscheitel parallel zur Rotationsachse gezogen wird, stets eine Focalgerade des umschriebenen Kegels.“

§. 365.

Ebenso leicht lässt sich nachweisen, dass die zweite Focalgerade des aus einem Punkte Σ (Taf. XIV, Fig. 78) dem Paraboloide umschriebenen Kegels die Verbindungsgerade des Kegelscheitels Σ mit dem Brennpunkte des Paraboloides sei.

Denken wir uns zu diesem Behufe das Rotationsparaboloid durch jene Meridianebene geschnitten, welche den Kegelscheitel Σ, also auch die zur Rotationsachse parallele Focalgerade Σf_2 enthält.

Da besagte Ebene gleichzeitig eine Hauptebene (Symmetrieebene) des umschriebenen Kegels ist, so muss sie auch die zweite Focalgerade enthalten.

Diese Meridianebene schneidet einerseits das Rotationsparaboloid in einer Meridianparabel K, deren Brennpunkt F auch jener des Paraboloides ist, und andererseits den Kegel in zwei Erzeugenden $\Sigma\alpha$ und $\Sigma\beta$, welche gleichzeitig Tangenten der Meridianparabel K sind. Offenbar muss die gesuchte zweite Focalgerade Σf_1 mit der Erzeugenden $\Sigma\beta$ den nämlichen Winkel einschließen, wie die erste Focalgerade Σf_2 mit der Erzeugenden $\Sigma\alpha$.

Denken wir uns die Scheiteltangente t gezogen, welche einerseits senkrecht auf Σf_2 steht, und andererseits die Parabeltangenten $\Sigma\alpha$ und $\Sigma\beta$ in α und β schneidet, so sind nach einem bekannten Satze die Winkel $F\alpha\Sigma$ und $F\beta\Sigma$ rechte Winkel. Da ferner auch der Winkel $(\Sigma f_2, \alpha\beta)$ ein rechter ist, so muss der Winkel $f_2\Sigma\beta$ dem Winkel $F\beta\alpha$ gleich sein.

Denkt man sich endlich durch die vier Punkte F, Σ, α, β einen Kreis gelegt, was, infolge der rechten Winkel bei α und β, stets möglich ist, so sind $F\beta\alpha$ und $F\Sigma\alpha$ als Peripheriewinkel über der Sehne $F\alpha$ einander gleich, und es ist daher auch

$$\sphericalangle \beta\Sigma f_2 = \sphericalangle F\Sigma\alpha,$$

woraus unmittelbar folgt, dass ΣF die zweite Focalgerade des Kegels sei. Daher der Satz:

347. „Von den Focalgeraden eines beliebigen einem Rotationsparaboloide umschriebenen Kegels ist die eine parallel zur Rotationsachse, während die zweite durch den Brennpunkt des Paraboloides geht.“

§. 366.

Der in 342) ausgesprochene Satz lässt sich durch die vorher festgestellte collineare Verwandtschaft eines Rotationsparaboloides S mit einer Kugel S_0 ebenfalls sehr leicht beweisen.

Denken wir uns zu diesem Behufe einen beliebigen Schnitt K_1 des Rotationsparaboloides bestimmt. Demselben wird ein ebener Schnitt $K_1{}^0$ der Kugel S_0, also ein Kreis entsprechen. Wird ferner durch den ersten Kegelschnitt K_1 ein Cylinder parallel zur Achse Z, oder mit anderen Worten ein Kegel, dessen Scheitel der unendlich ferne Punkt B_∞ ist, gelegt, so wird diesem Cylinder collinear derjenige Kegel entsprechen, welcher durch den Kreis $K_1{}^0$ geht und den Kugelpunkt B_0 zum Scheitel hat; ferner muss dieser Kegel die Collineationsebene C_e in derselben Curve c wie der Cylinder schneiden.

Nach Satz 189) ist aber die zweite (zur Ebene des Kreises $K_1{}^0$ nicht parallele) Schar von Kreisschnittsebenen des Kegels $(B_0, K_1{}^0)$ diejenige, welche zur Berührebene G_e der Kugel S_0 im Punkte B_0 parallel ist. Zu dieser Berührebene G_e ist aber, der Voraussetzung gemäß, die Collineationsebene C_e parallel; es wird mithin der Kegelschnitt c, in welchem der Kegel $(B_0, K_1{}^0)$ und auch der ihm collineare Cylinder (B_∞, K) die Collineationsebene C_e schneidet, insbesondere ein Kreis sein.

Nachdem weiters die Erzeugenden des Cylinders (B_∞, K) zu dessen Kreisschnittsebene C_e senkrecht stehen, so ist derselbe ein gerader Kreis- oder Rotationscylinder.

Hiemit ist der Satz 342), welcher dortselbst als Specialfall des Satzes 328) unter der Voraussetzung aufgestellt wurde, dass das Paraboloid als Grenzfall des Ellipsoides betrachtet wird, jetzt in aller Strenge bewiesen.

XXI. Capitel.

Die Rotationshyperboloide.

§. 367.

a) Das einfache Rotationshyperboloid.

Übergehen wir hiermit auf jene Flächen, welche durch Umdrehung einer Hyperbel um eine ihrer Achsen entstehen. Es wird sich diesfalls eine Verschiedenartigkeit dieser Flächengattung zeigen, je nachdem als „Drehungsachse" die imaginäre oder die reelle Achse der Hyperbel angenommen wird.

Durch Rotation einer Hyperbel um ihre imaginäre Achse entsteht eine Umdrehungsfläche, welche wir bereits unter dem Namen des eintheiligen (windschiefen) Umdrenungshyperboloides, oder des einmanteligen Rotationshyperboloides kennen lernten.

An der betreffenden Stelle wurden bereits zahlreiche Eigenschaften dieser Fläche als „windschiefe Fläche" abgeleitet, so dass wir dieselbe gegenwärtig übergehen können.

Nur eines soll hier noch bemerkt werden. Da das einmantelige Umdrehungshyperboloid als windschiefe Fläche eine unendliche Zahl von geraden Linien besitzt, so ist einleuchtend, dass die besagte Fläche unter keiner Bedingung aus der Kugel, nachdem diese keine Geraden enthält, collinear oder affin abgeleitet werden kann.

Wir übergehen daher direct auf die Besprechung der zweiten Art des Rotationshyperboloides.

§. 368.

b) Das zweimantelige, zweitheilige oder bifocale Rotationshyperboloid.

Diese Fläche wird durch eine Hyperbel erzeugt, welche um ihre reelle Achse rotiert.

Da in der bezeichneten Achse die Brennpunkte der rotierenden Hyperbel liegen, so bleiben diese selbstverständlich ihrer Lage nach ungeändert. Es ist demnach einleuchtend, dass sämmtliche durch die Rotationsachse gehenden Ebenen das zweimantelige Rotationshyperboloid in congruenten Hyperbeln schneiden werden, welche dieselben beiden festen Punkte der Rotationsachse zu Brennpunkten haben. Dies der Grund, weshalb die letzteren auch die „Brennpunkte des Rotationshyperboloides" genannt werden,

und die Fläche selbst als das „bifocale Hyperboloid" bezeichnet wird.

Denken wir uns auf einem solchen bifocalen Hyperboloide einen beliebigen Punkt a angenommen. Die durch diesen Punkt gehende Meridianebene schneidet das Hyperboloid in einer Hyperbel K_a, welche einerseits den Punkt a enthält, und andererseits die Brennpunkte F_1 und F_2 des Hyperboloides gleichfalls zu Brennpunkten hat.

Hiernach ist auch, wie wir wissen, die Differenz der Strecken $F_1 a$ und $F_2 a$ constant, und zwar gleich der Länge der reellen Achse (Rotationsachse) der Meridianhyperbel. Da aber sämmtliche Meridianhyperbeln diese reelle Achse gemein haben, so ist diese Differenz überhaupt für alle Punkte des Hyperboloides constant, und jener Achsenlänge gleich. Wir erhalten mithin den Satz:

348. „Die Differenz der Entfernungen eines auf einem bifocalen Hyperboloide gelegenen Punktes von den beiden Brennpunkten des letzteren ist constant, und zwar gleich der Länge der Rotationsachse."

Durch Umkehrung gelangen wir direct zu folgendem Satze:

349. „Der geometrische Ort aller Punkte, welche von zwei festen Punkten Abstände besitzen, deren Differenz constant ist, ist ein bifocales Hyperboloid; die beiden festen Punkte sind die Brennpunkte und die Strecke, welcher jene constante Differenz gleichkömmt, repräsentiert die Länge der Rotationsachse des Hyperboloides."

§. 369.

Stellen wir uns zwei beliebige, außerhalb einander liegende Kugeln S_1 und S_2 vor; die Mittelpunkte derselben seien M_1 und M_2 und deren Radien seien durch R_1 und R_2 bezeichnet.

Sollen die beiden Kugeln außerhalb einander liegen, so muss die Entfernung $M_1 M_2$ ihrer Mittelpunkte selbstverständlich größer, als die Summe ihrer Radien R_1 und R_2 sein.

Fragen wir nun um den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche diese zwei Kugeln S_1 und S_2 berühren.

Sei Σ eine solche Kugel, O ihr Mittelpunkt und ϱ ihr Radius. Wenn diese Kugel Σ die Kugel S_1 berühren soll, so muss bekanntlich die Entfernung ihres Mittelpunktes O von dem Mittelpunkte M_1 gleich der Summe der Radien R_1 und ϱ dieser Kugeln sein; es wird also:

$$M_1 O = R_1 + \varrho.$$

Soll die Kugel Σ auch die Kugel S_2 berühren, so findet man in gleicher Weise:

$$M_2 O = R_2 + \varrho.$$

Diese beiden Beziehungen ergeben aber sofort durch Subtraction die folgende:

$$M_1 O - M_2 O = R_1 - R_2.$$

Berücksichtigt man, dass die Größe $R_1 - R_2$ als Radiendifferenz der beiden gegebenen Kugeln S_1 und S_2 eine constante Strecke repräsentiert, so ergibt sich (nach Satz 349) sofort, dass der Mittelpunkt O der veränderlichen Kugel ein bifocales Hyperboloid beschreibt, dessen Brennpunkte die Punkte M_1 und M_2 sind und dessen Rotationsachse die Länge $R_1 - R_2$ besitzt. Daher der Satz:

350. „Der geometrische Ort des Mittelpunktes einer veränderlichen Kugel, welche in jeder Lage zwei gegebene feste Kugeln berührt, ist ein bifocales Rotationshyperboloid, dessen Brennpunkte die Mittelpunkte der beiden gegebenen Kugeln sind. Die Länge der Rotationsachse ist gleich der Differenz der Radien der beiden gegebenen Kugeln.“

§. 370.

Setzen wir voraus, dass die Kugel S_2 immer kleiner und kleiner werde, ohne dass deren Mittelpunkt M_2 eine Veränderung seiner Lage erfahre.

Reduciert sich die besagte Kugel endlich auf einen Punkt M_2, so wird der Radius R_2 gleich Null und für die Bedingung, dass die veränderliche Kugel Σ die Kugel S_2 berühre, erwächst somit die Bedingung, dass dieselbe durch den Punkt M_2 gehe, dass also $M_2 O = \varrho$ sei. Dann ist $M_1 O - M_2 O = R_1$, also wieder constant. Es ergibt sich demnach der specielle Satz:

351. „Der geometrische Ort des Mittelpunktes einer veränderlichen Kugel, welche in jeder Lage durch einen gegebenen Punkt gehen und eine gegebene Kugel berühren soll, ist ein bifocales Rotationshyperboloid, dessen Brennpunkte der gegebene Punkt und der Mittelpunkt der gegebenen Kugel sind. Die Länge der Rotationsachse ist dem Radius der gegebenen Kugel gleich.“

§. 371.

Sei K eine beliebige Hyperbel, F_1 ein Brennpunkt derselben und d dessen Polare, d. h. die dem Brennpunkte F_1 entsprechende Directrix der Hyperbel.

Jeder Punkt a der Hyperbel hat die Eigenschaft, dass dessen Entfernung vom Brennpunkte F_1 zu seiner Entfernung $a\alpha$ von der

entsprechenden Directrix d in einem constanten Verhältnisse stehe, welches größer als die Einheit ist. Es ist also:

$$\frac{aF_1}{a\alpha} = k; \quad k > 1.$$

Denken wir uns weiters die Hyperbel K sowohl, als auch ihre Directrix d um die reelle Achse gedreht, so erzeugt die erstere ein bifocales Hyperboloid, die letztere aber, nachdem sie zur Drehungsachse normal ist, eine auf der letzteren senkrecht stehende Ebene D, welche wir die dem Brennpunkte F_1 entsprechende „Directrixebene" des Hyperboloides nennen wollen.

Dieser Erzeugungsweise entsprechend, wird die Meridianebene E_z, welche wir durch einen beliebigen Punkt a des Hyperboloides legen, das letztere in einer Meridianhyperbel K_a, welche durch a geht und den Brennpunkt F_1 des Hyperboloides ebenfalls zum Brennpunkte hat, schneiden, während die Directrixebene D in einer Geraden d geschnitten wird, welche nichts anderes als die Directrix der Meridianhyperbel K_a für den Brennpunkt F_1 darstellt.

Fällt man von dem Punkte a eine Senkrechte $a\alpha$ auf die Directrixebene D, so muss dieselbe, da sie in der Meridianebene E_z liegt, auch senkrecht zu der Geraden d sein. Der Fußpunkt α muss daher in dieser Geraden liegen, oder mit anderen Worten, der Abstand $a\alpha$ des Punktes a von der Directrixebene D ist gleichzeitig dessen Abstand von der Directrix d.

Da aber der Punkt a auf der Meridianhyperbel K_a liegt, so ist

$$\frac{F_1 a}{a\alpha} = k = \text{constant}.$$

Nachdem ferner alle Meridianhyperbeln unter einander congruent sind, so folgt, dass für jede derselben der nämliche Verhältniswert k (> 1), also überhaupt für alle Punkte des Hyperboloides gilt. Dies gibt den Satz:

352. „Die Abstände eines beliebigen Punktes des bifocalen Rotationshyperboloides von einem Brennpunkte desselben und von der diesem Brennpunkte entsprechenden Directrixebene (Polarebene dieses Brennpunktes in Bezug auf das Hyperboloid) stehen in einem constanten Verhältnisse, welches größer als die Einheit ist."

Dieses Verhältnis wird, wie bei den Kegelschnitten die „numerische Excentricität" des Hyperboloides genannt.

Durch Umkehrung des vorstehenden Satzes folgt unmittelbar der nachstehende:

353. „Der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstände von einem festen Punkte und von einer festen Ebene in einem constanten Verhältnisse (größer als die Einheit) stehen, ist ein bifocales Hyperboloid. — Der feste Punkt ist ein Brennpunkt, die feste Ebene ist die entsprechende Directrixebene, das constante Verhältnis ist die numerische Excentricität und die Senkrechte vom festen Punkte auf die feste Ebene ist die Rotationsachse des Hyperboloides.“

§. 372.

Um zu einer weiteren Eigenschaft des bifocalen Hyperboloides zu gelangen, wollen wir vorerst noch einen auf die Hyperbel selbst bezughabenden Satz nachweisen.

Sei AB (Taf. XIV, Fig. 79) die reelle Achse einer Hyperbel, F_1 und F_2 die Brennpunkte derselben und a ein beliebiger Punkt der Hyperbel. Dann ist bekanntlich

$$aF_2 - aF_1 = AB.$$

Die Tangente t der Hyperbel im Punkte a halbiert, wie wir wissen, den Winkel $F_2 a F_1$.

Ziehen wir demnach von F_1 auf diese Tangente t das Perpendikel $F_1 m$ und verlängern wir dasselbe über m hinaus, bis zum Schnitte f mit $F_2 a$, so ist das Dreieck $F_1 a f$ gleichschenklig. Es wird also $F_1 m = mf$ und weiters $af = aF_1$, mithin $fF_2 = AB$ sein.

Verbindet man den Mittelpunkt O der Hyperbel mit dem Punkte m, so entstehen die ähnlichen Dreiecke $F_1 m O$ und $F_1 f F_2$, aus welchen sich, da $F_1 m = \frac{1}{2} F_1 f$ ist, auch $Om = \frac{1}{2} F_2 f = \frac{1}{2} AB$ ergibt.

Hieraus folgt, dass der Fußpunkt m des Perpendikels von einem Brennpunkte F_1 auf eine Tangente t der Hyperbel auf jenem Kreise K liegen müsse, welcher über der reellen Achse als Durchmesser beschrieben wird. Es ergibt sich somit der Satz:

354. „Der geometrische Ort der Fußpunkte der Perpendikel aus den Brennpunkten einer Hyperbel auf sämmtliche Tangenten der letzteren ist derjenige Kreis, welcher zum Durchmesser die reelle Achse der Hyperbel hat.“

§. 373.

Stellen wir uns vor, a (Taf. XIV, Fig. 79) sei ein beliebiger Punkt auf einem bifocalen Rotationshyperboloide und die vorerwähnte Hyperbel sei der Schnitt des Hyperboloides mit der durch a gehenden Meridianebene, so wird der Kreis K gleichzeitig den Schnitt

derselben Meridianebene mit der über der Rotationsachse als Durchmesser beschriebenen Kugel S darstellen.

Die Tangentialebene T_a des Hyperboloides im Punkte a steht senkrecht auf der Meridianebene dieses Punktes und enthält die Tangente t; es wird dieselbe mithin auch senkrecht stehen müssen auf der Geraden $F_1 m$.

Aus diesem Ergebnisse ist sonach zu ersehen, dass, wenn man auf eine beliebige Tangentialebene T_a des Hyperboloides von dem einen oder dem anderen Brennpunkte aus, eine Senkrechte zieht, der Fußpunkt m dieser Senkrechten auf jener Kugel S liegen müsse, welche über der Rotationsachse als Durchmesser beschrieben wird. Dies liefert demnach den Satz:

355. „Die Fußpunkte der Perpendikel von den Brennpunkten eines bifocalen Rotationshyperboloides auf dessen Tangentialebenen liegen auf jener Kugel, welche über der Rotationsachse als Durchmesser beschrieben wird.“

Erinnern wir uns bei dieser Gelegenheit an den analogen Satz 323) für das bifocale Ellipsoid, so erhalten wir folgende Entstehungs- oder Erzeugungsart des gleichnamigen Hyperboloides:

356. „Legt man durch die einzelnen Punkte einer gegebenen Kugel senkrechte Ebenen auf jene Geraden, welche diese Punkte mit einem festen, nicht auf der Kugel liegenden Punkte verbinden, so umhüllen diese Ebenen ein bifocales Ellipsoid oder Hyperboloid, je nachdem der gegebene Punkt innerhalb oder außerhalb der gegebenen Kugel liegt.

Derjenige Kugeldurchmesser, welcher durch den festen Punkt geht, repräsentiert die Rotationsachse, die Endpunkte desselben die Scheitel und der feste Punkt einen Brennpunkt dieses Ellipsoides oder Hyperboloides.“

§. 374.

Weitere Eigenschaften des bifocalen Rotationshyperboloides lassen sich auch höchst einfach aus den Eigenschaften der Meridianhyperbeln in Bezug auf ihre Asymptoten ableiten.

Sei K eine beliebige Hyperbel und seien σ_1, σ_2 deren Asymptoten. Werden die letzteren sammt der Hyperbel um die reelle Achse z der Hyperbel gedreht, so beschreiben dieselben, da sie gegen diese Achse symmetrisch liegen, einen und denselben geraden Kreiskegel. Besagter Kegel repräsentiert den, dem bifocalen Hyperboloide aus dessen Mittelpunkt umschriebenen Kegel. Die Berührungscurve ist der unendlich ferne reelle Kreis des Hyperboloides; denn jede Erzeugende des Kegels ist eine Tangente des

Hyperboloides mit unendlich fernem Berührungspunkte, da dieselbe gleichzeitig eine Asymptote derjenigen Meridianhyperbel darstellt, in welcher das Hyperboloid von der durch diese Erzeugende gelegten Meridianebene geschnitten wird.

Aus dem angeführten Grunde nennt man den in Rede stehenden Kegel den „Asymptotenkegel des bifocalen Hyperboloides".

Wir können daher den Satz aufstellen:

357. „*Jedes bifocale Hyperboloid besitzt einen reellen Asymptotenkegel; derselbe ist ein gerader Kreiskegel, dessen Scheitel der Mittelpunkt des Hyperboloides ist und die Achse des Hyperboloides als Achse besitzt. Derselbe Kegel berührt das Hyperboloid längs dessen unendlich fernen Kreises. Jede durch die Rotationsachse gehende Ebene schneidet den Asymptotenkegel in zwei Erzeugenden, welche die Asymptoten des durch diese Ebene erzeugten Meridianschnittes des Hyperboloides darstellen.*"

§. 375.

Wenn sich zwei Flächen in einem Punkte a berühren, d. h. in diesem Punkte eine und dieselbe Berührebene T_a besitzen, so wird jede durch den Punkt a gelegte Ebene E die beiden Flächen in zwei Curven schneiden, die sich ebenfalls in dem nämlichen Punkte a berühren.

Letzteres geht unmittelbar aus dem Umstande hervor, dass die beiden Curven in a von derselben Geraden, d. i. der Schnittlinie der Ebenen T_a und E, berührt werden.

Ist S ein bifocales Rotationshyperboloid, Σ dessen Asymptotenkegel, und legen wir durch den Mittelpunkt M der Fläche, welcher gleichzeitig der Scheitel des Asymptotenkegels ist, eine Ebene E, so schneidet dieselbe das Hyperboloid in einem Kegelschnitte K und den Asymptotenkegel Σ in zwei Erzeugenden σ_1 und σ_2.

Der unendlich ferne Kreis, längs welchem sich S und Σ berühren, wird offenbar von der Ebene E in zwei Punkten geschnitten, welche nur die unendlich fernen Punkte von σ_1 und σ_2 sein können. Der vorher gepflogenen Erörterung gemäß, müssen nun die beiden Geraden σ_1 und σ_2 den Kegelschnitt K in diesen beiden Punkten berühren, oder was dasselbe ist, die Geraden σ_1 und σ_2 sind die Asymptoten des Kegelschnittes K.

Das Gleiche gilt für alle möglichen Lagen der Ebene E, vorausgesetzt, dass der Asymptotenkegel von der Ebene E in reellen Erzeugenden σ_1 und σ_2 geschnitten wird. Wir erhalten mithin den Satz:

358. „*Jede Ebene, welche durch den Mittelpunkt eines bifocalen Hyperboloides geht und dessen Asymptotenkegel in reellen Erzeugenden schneidet, trifft das Hyperboloid in einem Kegelschnitte, dessen Asymptoten jene beiden Erzeugenden des Asymptotenkegels sind.*“

§. 376.

Aus dem vorstehenden Satze lässt sich, wenn man eine bekannte Eigenschaft der Hyperbel in Betracht zieht, leicht ein anderer ableiten.

Sei nämlich g eine beliebige Gerade, welche den Asymptotenkegel in den beiden Punkten α und β und das Hyperboloid in den Punkten a und b schneiden möge.

Legen wir durch diese obbezeichnete Gerade g und durch den Mittelpunkt M des Hyperboloides eine Ebene E, so schneidet dieselbe das Hyperboloid in einer Hyperbel K und den Asymptotenkegel in den Asymptoten σ_1 und σ_2 derselben. Die Punkte α und β sind offenbar gleichzeitig jene Punkte, in welchen die Gerade g die Asymptoten σ_1 und σ_2 trifft, während die Punkte a und b diejenigen sind, in welchen sie die Hyperbel K schneidet.

Nach einer bekannten Eigenschaft der Hyperbel sind die Stücke einer Geraden, welche zwischen der Hyperbel und ihren Asymptoten liegen, einander gleich. Es ist also $a\alpha = b\beta$. Da dies aber gleichzeitig auch die Stücke der Geraden g zwischen dem Hyperboloide und dessen Asymptotenkegel sind, so gelangen wir zu dem Satze:

359. „*Die Stücke jeder Geraden zwischen einem bifocalen Rotationshyperboloide und dessen Asymptotenkegel sind stets einander gleich.*“

Ist die Gerade g eine Tangente des Hyperboloides, so fallen die beiden Punkte a und b in ihrem Berührungspunkte a zusammen und es ist sodann $a\alpha = a\beta$ und folglich ergibt sich der Satz:

360. „*Das Stück jeder Tangente eines bifocalen Rotationshyperboloides, welches im Inneren des entsprechenden Asymptotenkegels liegt, wird von dem zugehörigen Berührungspunkte halbiert.*“

§. 377.

Denken wir uns an das bifocale Hyperboloid in irgend einem Punkte a eine Berührungsebene T_a gelegt, welche den Asymptotenkegel in einem Kegelschnitte K trifft, so findet man mit Zugrundelegung des vorstehenden Satzes, dass der Berührungspunkt a der Mittelpunkt des Kegelschnittes K sein müsse.

Denn, zieht man durch a in der Berührebene T_a eine beliebige Gerade g, welche den Kegelschnitt K in α und β treffen möge, so ist die letztere eine Tangente des Hyperboloides im Punkte a und es muss, dem vorstehenden Satze gemäß, $a\alpha = a\beta$ sein. Da das Gesagte aber von jeder anderen derartigen durch a gehenden Geraden g gilt, so sind alle diese Geraden g Durchmesser des Kegelschnittes und folglich ihr gemeinschaftlicher Punkt a der Mittelpunkt des Kegelschnittes K. Es ergibt sich demnach der Satz:

361. „Wird an ein bifocales Umdrehungshyperboloid in einem beliebigen Punkte desselben die Tangentialebene gelegt, so schneidet dieselbe den entsprechenden Asymptotenkegel in einem Kegelschnitte, dessen Mittelpunkt der genannte Berührungspunkt ist.“

Hervorgehoben muss hier werden, dass die Sätze 350) und 360) für ein windschiefes Hyperboloid (gleichgiltig ob dasselbe ein Umdrehungs- oder ein dreiachsiges Hyperboloid ist) wie auch der Satz 38) zeigt, gelten, dass aber der letztgefundene Satz nur eine charakteristische Eigenschaft des bifocalen (zweimanteligen) Hyperboloides sei, welche für ein windschiefes Hyperboloid keine Geltung hat.

§. 378.

Da zwei sich in einem Punkte berührende Flächen, wie schon früher erörtert wurde, von einer jeden durch den Berührungspunkt gehenden Ebene in zwei sich in demselben Punkte berührenden Curven geschnitten werden, so werden wir auch anstandslos zu dem nachstehenden Resultate geführt.

Gesetzt, ein Hyperboloid und dessen Asymptotenkegel würden durch eine Ebene E derart geschnitten, dass man als die Schnittcurve mit dem letzteren eine Hyperbel K' erhielte.

Die unendlich fernen Punkte dieser Hyperbel gehören dem unendlich fernen Kreise des Asymptotenkegels an und da sich beide Flächen längs dieses Kreises berühren, so folgt, dass die Ebene E auch das Hyperboloid in einer Hyperbel K schneiden müsse, welche die erstere Hyperbel K' in deren unendlich fernen Punkten berührt. Die beiden Hyperbeln besitzen hiernach die nämlichen Asymptoten. Dies Ergebnis führt zu dem Satze:

362. „Eine Ebene, welche den Asymptotenkegel eines bifocalen Rotationshyperboloides in einer Hyperbel schneidet, begegnet auch dem Hyperboloide in einer Hyperbel, welche mit der ersteren gemeinschaftliche Asymptoten und folglich auch denselben Mittelpunkt besitzt.“

§. 379.

Setzen wir weiter voraus, dass eine Ebene E den Asymptotenkegel in einer Parabel schneide.

Diesfalls wird das Hyperboloid von derselben Ebene in einem Kegelschnitte getroffen, welcher diese Parabel in ihrem unendlich fernen Punkte berührt und welcher demgemäß wieder eine Parabel sein muss, deren Achse mit jener der ersteren zusammenfällt. Es besteht hiernach der Satz:

363. „Schneidet eine Ebene den Asymptotenkegel eines bifocalen Rotationshyperboloides in einer Parabel, so schneidet dieselbe auch das Hyperboloid in einer Parabel, deren Achse mit jener der ersten zusammen fällt.“

§. 380.

Schneidet eine Ebene E den Asymptotenkegel in einer Ellipse, hat die schneidende Ebene also keinen reellen Punkt mit dem unendlich fernen Kreise des Hyperboloides gemein, so muss sie auch das Hyperboloid in einer Ellipse schneiden.

Diese beiden Ellipsen haben eine bemerkenswerte Eigenschaft, die wir in Folgendem ableiten resp. feststellen wollen.

Seien K und K' die beiden Ellipsen, in welchen das Hyperboloid, beziehungsweise der entsprechende Asymptotenkegel von einer Ebene E geschnitten wird, und sei M der Mittelpunkt von K.

Denken wir uns durch M in der Ebene E eine beliebige Gerade g gezogen. Dieselbe möge das Hyperboloid in den Punkten a und b und den Asymptotenkegel in α und β schneiden.

Nach Satz 359) ist sodann $a\alpha = b\beta$. Da aber M der Mittelpunkt von K ist, also g einen Durchmesser von K darstellt, so ist $Ma = Mb$. Hieraus folgt aber, dass auch $M\alpha = M\beta$ sei. Dasselbe gilt aber auch von jeder anderen durch M in der Ebene E gezogenen Geraden. Der Punkt M ist daher auch der Mittelpunkt von K'. Die beiden Kegelschnitte K und K' sind somit ähnlich gelegen. Man kann daher den Satz aufstellen:

364. „Ein bifocales Rotationshyperboloid und dessen Asymptotenkegel werden von einer beliebigen Ebene in concentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen, d. i. in homothetischen Kegelschnitten geschnitten.“

§. 381.

Denken wir uns einen beliebigen Kreis K_o (Taf. XV, Fig. 80). Denselben wollen wir collinear in eine Hyperbel K, jedoch unter einer besonderen Voraussetzung, transformieren.

Die Gerade G_a stelle die Gegenachse dar, welche nothwendig den Kreis K_o schneiden muss, wenn das Collinearbild desselben eine Hyperbel K werden soll.

Die Collineationsachse C_a wählen wir an beliebiger Stelle, jedoch selbstverständlich parallel zu G_a. Als Collineationscentrum C hingegen soll nicht mehr ein beliebiger Punkt angenommen werden, sondern wollen wir hiefür einen solchen wählen, welcher auf dem zur Gegen- und Collineationsachse G_a beziehungsweise C_a senkrechten Kreisdurchmesser Z liegt.

Hierdurch erreicht man offenbar, dass Z nicht nur eine Symmetrieachse für den Kreis K_o, sondern auch für die demselben collineare Hyperbel K wird. Jeder Strahl g des ebenen Strahlenbüschels mit dem Mittelpunkte C schneidet den Kreis K_o in zwei Punkten, welche zu jenen beiden Punkten, in welchen der nämliche Strahl g die Hyperbel K trifft, collinear sind.

Denken wir uns den Kreis K_o, die Hyperbel K, die Gegenachse G_a, die Collineationsachse C_a und das ebene Strahlenbüschel (C) um die Gerade Z gedreht, so erzeugt der Kreis K_o eine Kugel S_o; die Hyperbel K ein bifocales Rotationshyperboloid S; die zur Drehachse Z senkrechte Gerade G_a eine zu Z senkrechte Ebene G_e; die zu Z normale Gerade C_a eine zu Z senkrechte Ebene (C_e) und endlich das ebene Strahlenbüschel C, das räumliche Strahlenbüschel mit dem Centrum C.

Es ist nun klar, dass jeder beliebige Strahl g durch C die Kugel S_o in zwei Punkten treffen wird, welche zu den beiden Punkten, in welchen derselbe Strahl g das Hyperboloid schneidet, collinear sein werden, wenn man C als Collineationscentrum, G_e als Gegenebene und C_e als Collineationsebene betrachtet; denn der Strahl g wird einer gewissen Lage des gedrehten ebenen Systemes (C, K_a, K, G_a, C_a) und zwar jener angehören, welche die durch g und Z gelegte Ebene bestimmt.

Dasselbe gilt offenbar von jedem anderen Strahle des räumlichen Strahlenbündels C, woraus folgt, dass die Kugel S_o und das Hyperboloid S, in Bezug auf C als Collineationscentrum, G_e als Gegenebene und C_e als Collineationsebene, collinear verwandt sind.

Da hierbei das Collineationscentrum C nothwendig auf der Rotationsachse des Hyperboloides liegen muss, so erhalten wir den Satz:

365. „Jedes bifocale Rotationshyperboloid kann collinear in eine Kugel transformiert werden, wenn man als Collineationscentrum einen beliebigen Punkt der Rotationsachse wählt. Der Mittelpunkt dieser Kugel wird dann nothwendig ebenfalls auf der Rotationsachse liegen.“

§. 382.

Nehmen wir an, es sei Σ (Taf. XV, Fig. 80) ein beliebiger Punkt im Raume. Wir betrachten denselben als Scheitel eines dem Rotationshyperboloide S umschriebenen Kegels und setzen voraus, dieser Kegel möge die Collineationsebene (C_e') in einem Kegelschnitte γ schneiden. Ferner denken wir uns die Endpunkte A und B der Rotationsachse Z mit dem Scheitel Σ durch zwei Geraden verbunden, welche die Collineationsebene (C_e) in den beiden Punkten f_1 und f_2 treffen mögen.

Es wird keinerlei Schwierigkeit bieten, nachzuweisen, dass die Punkte f_1 und f_2 die Brennpunkte des Kegelschnittes γ seien.

Dem Kegel, welcher aus Σ dem Hyperboloide umschrieben ist, wird collinear ein Kegel entsprechen, welcher der Kugel S_0 umschrieben ist, u. z. wird der Scheitel dieses Kegels derjenige Punkt Σ_0 sein, welcher dem Punkte Σ collinear entspricht. Diese beiden Kegel schneiden selbstverständlich die Collineationsebene C_e in einem und demselben Kegelschnitte γ.

Da ferner den Endpunkten A und B der Rotationsachse Z des Hyperboloides collinear die Endpunkte A_0 und B_0, des zur Collineationsebene C_e senkrechten Kugeldurchmessers Z entsprechen, so entsprechen auch den beiden Geraden ΣA und ΣB die Geraden $\Sigma_0 A_0$ und $\Sigma_0 B_0$; es müssen mithin auch $\Sigma_0 A_0$ und $\Sigma_0 B_0$ durch die Punkte f_1 und f_2 der Collineationsebene C_e gehen.

Der Kegel, welcher der Kugel S_0 aus dem Punkte Σ_0 umschrieben ist, schneidet also die Collineationsebene C_e in einem Kegelschnitte γ, dessen Brennpunkte, nach dem D a n d e l i n'schen Satze (Band II, Satz 507) die beiden Punkte f_1 und f_2 sind, in welchen die Collineationsebene (C_e) von jenen Geraden geschnitten wird, welche den Kegelscheitel Σ_0 mit den Endpunkten A_0 und B_0 des zur Collineationsebene (C_e) senkrechten Kugeldurchmessers Z verbinden.

Nachdem aber der Kegelschnitt γ auch jenem Kegel angehört, welcher dem Rotationshyperboloide S aus dem Punkte Σ umschrieben ist, und die Brennpunkte f_1 und f_2 gleichzeitig die Schnittpunkte der Collineationsebene C_e mit den beiden Geraden sind, welche den Kegelscheitel Σ mit den Endpunkten A und B der Rotationsachse Z verbinden; nachdem endlich parallele Ebenen einen Kegel in ähnlichen Kegelschnitten schneiden, deren Brennpunkte auf zwei durch den Kegelscheitel gehenden, nur von der Stellung der schneidenden Ebenen abhängigen Geraden liegen, so folgt der Satz:

366. „*Wird einem bifocalen Rotationshyperboloide aus einem beliebigen Punkte im Raume ein Kegel umschrieben, so wird derselbe von einer beliebigen zur Rotationsachse senkrechten Ebene in einem Kegelschnitte getroffen, dessen Brennpunkte die Schnittpunkte dieser Ebene mit jenen beiden Geraden sind, welche den Kegelscheitel mit den Endpunkten der Rotationsachse verbinden.*“

§. 383.

Denken wir uns ferner das Hyperboloid S (Taf. XV, Fig. 80) durch eine beliebige Ebene nach einem Kegelschnitte K' geschnitten, und legen wir durch diesen Kegelschnitt einen Kegel, welcher zum Scheitel den einen der beiden Endpunkte der Rotationsachse Z, allenfalls den Endpunkt A hat, so wird dem Kegelschnitte K' irgend ein Kreis K'_0 auf der Kugel S_0 collinear entsprechen und ebenso dem Kegel (A, K') wieder ein Kegel entsprechen, welcher durch den Kreis K'_0 geht und dessen Scheitel der eine Endpunkt A_0, des zur Collineationsebene (C_e) senkrechten Kugeldurchmessers Z ist.

Beide Kegel schneiden selbstverständlich die Collineationsebene C_e abermals in dem nämlichen Kegelschnitte γ'.

Nach Satz 189) sind die zweiten zu K'_0 nicht parallelen Kreisschnitte des Kegels (A_0, K_0') in jenen Ebenen gelegen, welche zu der Berührebene der Kugel S_0 in dem Kegelscheitel A_0 parallel sind. Da aber diese Ebenen zu dem Durchmesser $A_0 B_0$ senkrecht stehen, so folgt unmittelbar, dass die Collineationsebene (C_e) diesen Ebenen mit angehört, dass also der vorgenannte Kegelschnitt γ' ein Kreis sein müsse. Dieser Kreis gehört aber auch dem Kegel (A, K') an, mithin folgt der Satz:

367. „*Legt man durch einen beliebigen ebenen Schnitt eines bifocalen Rotationshyperboloides einen Kegel, dessen Scheitel einer von den beiden Endpunkten der Rotationsachse ist, so wird dieser Kegel von den zur Rotationsachse senkrechten Ebenen stets in Kreisen geschnitten.*“

Nebenbei sei bemerkt, dass die beiden letztangeführten Sätze überhaupt für alle Rotationsflächen zweiten Grades, mit Ausnahme des windschiefen Rotationshyperboloides, ihre Giltigkeit haben.

Vierter Abschnitt.

Die dreiachsigen Flächen zweiten Grades.

XXII. Capitel.

Entwickelung von Eigenschaften, welche für die graphische Darstellung von Wichtigkeit sind.

§. 384.

Es wurden in dem vorher Besprochenen (Band II) bereits jene allgemeinen Eigenschaften entwickelt und festgestellt, welche eine Fläche zweiten Grades überhaupt besitzen muss, und sind wir unter anderem schließlich zu dem Resultate gelangt, dass denselben ein Tripel auf einander senkrecht stehender Achsen entspreche, welche entweder alle von unter einander verschiedener Länge sind, oder von welchen zwei einander gleich, oder von welchen endlich alle drei einander gleich sind.

Die Existenz der beiden letztgenannten Arten haben wir bereits sichergestellt. Es sind dies die Rotationsflächen zweiten Grades und die Kugel.

Es handelt sich demnach noch darum, nachzuweisen, dass es auch Flächen zweiten Grades gebe, welche drei ungleich lange Achsen besitzen. Eine derartige Fläche und zwar das windschiefe dreiachsige Hyperboloid haben wir bereits kennen gelernt.

Nunmehr wollen wir untersuchen, ob es auch dreiachsige Flächen zweiten Grades gebe, welche keine Geraden enthalten.

Zunächst ist klar, dass jede Fläche zweiten Grades, welche keine geraden Linien besitzt und von welcher sich herausstellt, dass sie weder eine Rotationsfläche noch eine Kugel sei, eine derartige Fläche repräsentieren müsse.

Denken wir uns demgemäß im Raume eine beliebige Kugel S_0. Wenn wir diese Kugel räumlich collinear transformieren, so muss die

abgeleitete Fläche S nothwendig vom zweiten Grade sein. Denn, da die Kugel S_0 von einer beliebigen Geraden g_0 in zwei Punkten geschnitten wird, und jedem Punkte collinear nur wieder ein einziger Punkt entspricht, so wird die der Geraden g_0 collinear entsprechende Gerade g mit der Fläche S nur zwei Punkte, d. i. jene gemein haben können, welche den beiden Punkten, die g_0 und S_0 gemeinschaftlich zukommen, collinear sind.

Wir wollen nun sehen, ob diese collineare Fläche zweiten Grades zu den bereits bekannten Flächen zählt, d. h. ob sie eine Rotationsfläche zweiten Grades oder eine Kugel sei, oder aber, ob sie nicht diesen Gattungen angehöre, d. h. ob sie eine dreiachsige Fläche zweiten Grades darstelle.

Dass die Fläche S keine geraden Linien enthält, ist schon an und für sich aus dem Grunde klar, weil die ihr collineare Kugel S_0 keine geradlinigen Erzeugenden besitzt.

Um somit auf unsere frühere Frage zurückzukommen, denken wir uns im Raume ein beliebiges Collineationscentrum C angenommen; ferner eine Collineationsebene C_e gewählt, jedoch so, dass sie auf der Geraden Cm_0, welche das Collineationscentrum mit dem Mittelpunkte m_0 der Kugel S_0 verbindet, nicht senkrecht stehe.

Weiters wählen wir eine beliebige zu C_e parallele Ebene G_e als Gegenebene, und zwar als jene Gegenebene, welche zu demselben Raumsysteme wie die Kugel S_0 gehört, der also in dem collinearen Raumsysteme (welches die Fläche S zweiten Grades enthält) die unendlich ferne Ebene entspricht.

Denken wir uns ferner den zur Collineationsebene C_e senkrechten Durchmesser Z_0 der Kugel S_0 gezogen; derselbe möge die Collineationsebene C_e in dem Punkte δ und die Gegenebene G_e in dem Punkte φ treffen. Da dieser Durchmesser, der Voraussetzung gemäß, das Collineationscentrum C nicht enthält, so wird die ihm collinear entsprechende Gerade Z offenbar gegen die Collineationsebene C_e geneigt sein müssen. Wir können dieselbe leicht bestimmen.

Die Gerade Z muss nämlich einerseits durch den Punkt δ gehen, in welchem Z_0 die Collineationsebene C_e schneidet. Da ferner der Schnittpunkt φ von Z_0 mit der Gegenebene G_e den Gegenpunkt dieser Geraden darstellt, und demselben der unendlich ferne Punkt φ_∞ des durch φ gehenden Collineationsstrahles $C\varphi$ entspricht, so ergibt sich Z als jene Gerade, welche durch δ parallel zu $C\varphi$ gezogen werden kann. Nachdem nun $C\varphi$ gegen die Collineationsebene geneigt ist, so muss es nothwendig auch Z sein.

Betrachten wir die Fläche S, welche sich durch die Collineation aus der Kugel S_0 ergibt, etwas näher.

Schneiden wir die Kugel S_0 durch eine beliebige Ebene E_0 nach einem Kreise K_0, so wird dem letzteren ein Kegelschnitt K auf der Fläche S entsprechen. Dieser Kegelschnitt wird, wie wir wissen, der Schnitt des Kegels (C, K_0), welcher den Kreis K_0 aus dem Collineationscentrum projiciert, mit derjenigen Ebene E sein, welche der Kreisebene E_0 collinear ist. Die beiden einander entsprechenden Ebenen E_0 und E schneiden sich bekanntlich in einer Geraden s auf der Collineationsebene.

Ist die Ebene E_0 zur Collineationsebene C_e parallel, so muss es auch die ihr entsprechende Ebene E sein.

Denken wir uns jetzt insbesondere die schneidende Ebene E_0, also auch die ihr entsprechende Ebene E parallel zur Collineationsebene C_e.

Die Ebene E_0 schneidet die Kugel S_0 in einem Kreise K_0, dessen Mittelpunkt o_0 auf dem Durchmesser Z_0 liegt, da letzterer zur Collineationsebene, also auch zur Ebene E_0 senkrecht steht. Diesem Kreise K_0 entspricht collinear der Schnitt K der Ebene E mit jenem Kegel, welcher den Kreis K_0 aus dem Collineationscentrum C projiciert.

Nachdem aber die Ebene E zur Ebene E_0 parallel läuft, muss der Schnitt K dem Schnitte K_0 ähnlich, also wieder ein Kreis sein. Der Mittelpunkt m dieses Kreises K muss ferner mit dem Mittelpunkte m_0 des Kreises K_0 auf derselben durch den Kegelscheitel C gehenden Geraden liegen, woraus folgt, dass sich die beiden Mittelpunkte m_0 und m collinear entsprechen, und dass demzufolge auch m auf der dem Durchmesser Z_0 collinearen Geraden Z liegen muss. Ein Gleiches gilt von jeder anderen, zur Collineationsebene parallelen Ebene E_0.

Aus diesen einfachen Betrachtungen ist zu ersehen, dass alle zur Collineationsebene C_e parallelen Ebenen E die Fläche S in Kreisen K schneiden, deren Mittelpunkte m sämmtlich auf der gegen die Collineationsebene C_e geneigten Geraden Z liegen müssen.

Hieraus ist aber unmittelbar zu entnehmen, dass einerseits Z der zu diesen Ebenen E conjugierte Durchmesser der Fläche S sei, und andererseits, dass diese Fläche keine Kugel sein könne, da bei der letzteren jeder Durchmesser derselben auf der Parallelschar der ihm conjugierten Ebenen senkrecht steht.

Die gefundene Fläche S kann aber auch keine Rotationsfläche zweiten Grades sein. Denn, vorausgesetzt, besagte Fläche wäre eine durch Rotation entstandene, so müsste dieselbe noch eine

zweite Schar von Kreisen c besitzen, deren Mittelpunkte auf einer zu dieser Schar normalen Geraden, der Rotationsachse, senkrecht stehen.

Nehmen wir demgemäß an, es sei c ein solcher Parallelkreis. Eine beliebige zur Collineationsebene C_e parallele Ebene E wird den Kreis c in zwei Punkten a und b treffen (man kann die Lage der Ebene E immer so wählen, dass a und b reell sind) und die Fläche S in einem Kreise K schneiden, welcher durch die beiden Punkte a und b geht. Durch zwei Kreise c und K, welche zwei Punkte a und b gemein haben, lässt sich aber stets eine Kugel Σ legen. Diese Kugel müsste nun, da ihr Mittelpunkt nothwendigerweise auf der Rotationsachse liegt, die Fläche S offenbar noch in einem zweiten Kreise c_1, der Schar der Parallelkreise, treffen. Besagte Kugel hätte also mit der Fläche S die drei Kreise K, c und c_1 gemein, was offenbar ganz unmöglich ist.

Hieraus folgt aber, dass die Fläche S keine Kreise besitzen kann, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, die zu den Kreisebenen senkrecht steht, dass sie also auch in keinem Falle eine Rotationsfläche sein könne.

Die Fläche S, welche der Kugel S_0 collinear ist, wird mithin eine dreiachsige Fläche zweiten Grades sein.

§. 385.

Aus der collinearen Beziehung und aus der Eigenschaft, dass die Fläche S von allen zur Collineationsebene parallelen Ebenen in Kreisen geschnitten wird, lassen sich verschiedene Schlussfolgerungen ziehen.

Nehmen wir wieder eine zur Collineationsebene parallele Ebene E an, welche die Fläche S in einem Kreise K schneiden möge. Durch diesen Kreis K und durch einen beliebigen Punkt p der Fläche S legen wir eine Kugel Σ. Diese Kugel Σ hat mit der Fläche S (nach Satz 448, Band II) noch eine zweite ebene Curve K_1 gemein, welche, der gemachten Voraussetzung entsprechend, durch den Punkt p gehen muss. Da aber bekanntlich eine ebene Curve auf einer Kugel nur ein Kreis sein kann, so muss dasselbe auch in Bezug auf die eben genannte Curve K_1 gelten; diese wird also ein Kreis sein.

Dieser Kreis K_1 kann aber keiner von jenen Kreisen K sein, welche in den zur Collineationsebene C_e parallelen Ebenen liegen. Denn durch zwei der letzteren Kreise K kann nie eine Kugel gelegt werden, da die Verbindungsgerade Z ihrer Mittelpunkte auf deren Ebenen nicht senkrecht steht. Die Ebene des Kreises K_1 muss daher nothwendig gegen die Collineationsebene geneigt sein.

Da die Fläche S vom zweiten Grade ist, so wird (nach Satz 443 b, Band II) jede zu K_1 parallele Ebene die Fläche auch in einem Kreise schneiden. Die Fläche S besitzt daher zwei verschiedene Scharen von Kreisschnittsebenen.

Man kann jedoch leicht zeigen, dass diese beiden Scharen von Kreisschnittsebenen die einzig möglichen sind, d. h. dass es keine dritte Lage von Ebenen geben könne, welche die Fläche S ebenfalls nach Kreisen schneiden würden.

Gesetzt, es wären K und K_1 zwei auf derselben Kugel Σ liegende Kreise der Fläche S und es würde c ein dritter Kreis auf S sein, welcher weder der Schar K, noch der Schar K_1 angehört. Dieser Kreis c möge den Kreis K in a und b, den Kreis K_1 dagegen, in a_1 und b_1 schneiden. Diese vier Punkte hat besagter Kreis demnach auch mit der Kugel Σ gemein und müsste mithin als solcher ganz auf derselben liegen. Nachdem aber der obbezeichnete Kreis gleichzeitig auch als ein Kreis auf S vorausgesetzt wurde, so folgt, dass die Kugel Σ mit der Fläche S die drei Kreise K, K_1 und c gemein hätte, welche Annahme diesfalls ganz und gar unzulässig ist.

Es kann daher ein Kreis von der Beschaffenheit des Kreises c auf der Fläche S nicht liegen und sind somit bloß die beiden vorher gefundenen Scharen von Kreisschnittsebenen, als die auf einer dreiachsigen Fläche zweiten Grades einzig möglichen zu bezeichnen.

Durch einen beliebigen Punkt der Fläche gehen nur zwei auf der Fläche liegende Kreise, wovon der eine der einen Schar, der andere dagegen der zweiten Schar angehört; dieselben werden als Schnitte der Fläche mit jenen beiden Ebenen erhalten, welche durch diesen Punkt parallel zu den Ebenen der beiden Scharen gelegt werden.

Zwei Kreise K und K_1, welche verschiedenen Scharen angehören, liegen immer auf einer Kugel; denn diese Kreise haben zwei Punkte, d. s. die Schnittpunkte der Fläche S mit der Schnittgeraden der beiden Ebenen von K und K_1 gemein. Zwei Kreise, welche einer Schar angehören, können aber, wie wir vorher nachgewiesen haben, nie auf einer Kugel liegen.

Wir können somit den Satz aufstellen:

368. „Jede dreiachsige Fläche zweiten Grades wird von zwei verschiedenen Scharen paralleler Ebenen in Kreisen geschnitten. Durch jeden Punkt der Fläche geht nur ein Kreis der einen und ein Kreis der anderen Schar. Zwei Kreise, welche verschiedenen Scharen an-

gehören, liegen stets auf einer Kugel. Durch zwei Kreise, welche derselben Schar angehören, kann keine Kugel gelegt werden."

§. 386.

Die zwei Ebenen beider Scharen von Kreisschnitten, welche gleichzeitig durch den Mittelpunkt der Fläche zweiten Grades gehen, also Diametralebenen derselben darstellen, werden insbesondere die „Kreisebenen" der Fläche zweiten Grades genannt.

Die beiden Durchmesser, welche diesen Ebenen conjugiert sind, schneiden die Fläche in vier Punkten $x_1, y_1; x_2, y_2$. Die Tangentialebenen der Fläche in diesen Punkten gehören, da sie zu den betreffenden Kreisebenen parallel sind (Satz 435, Band II), ebenfalls zu den Kreisschnittsebenen und ihre Berührungspunkte $x_1, y_1; x_2, y_2$ sind als die unendlich kleinen Kreisschnitte der Fläche zu betrachten.

Obbezeichnete vier Punkte werden die „Kreis-", „Nabel-" oder „Umbilical-" Punkte der Fläche zweiten Grades genannt.

Weitere Eigenschaften der Kreisschnitte etc. werden wir gelegentlich der Betrachtung der einzelnen Flächen kennen lernen und dort auch eingehender besprechen.

§. 387.

Die Collineation einer Fläche S zweiten Grades mit einer Kugel S_0 dient gleichzeitig auch als Merkmal oder Kennzeichen für die verschiedenen Arten der dreiachsigen Fläche zweiten Grades.

Setzen wir nämlich voraus, die Gegenebene G_e habe mit der Kugel S_0 keine reellen Punkte gemein. Diesfalls wird natürlich die Fläche S, welche der Kugel S_0 collinear ist, keine reellen unendlich fernen Punkte besitzen, sie wird eine in endlicher Entfernung liegende, vollkommen geschlossene Fläche darstellen, die von einer jeden, wie immer liegenden Ebene nur in geschlossenen Kegelschnitten, d. h. in Ellipsen, aber von keiner Ebene in einer Hyperbel oder Parabel geschnitten werden kann.

Diese Fläche wird deshalb das „dreiachsige Ellipsoid" genannt.

Setzen wir hingegen voraus, dass die Gegenebene G_e die Kugel S_0 in einem reellen Kreise $\varkappa$ schneide. Diesem Kreise wird

offenbar eine Curve zweiten Grades in unendlicher Entfernung collinear entsprechen, welche auch der Fläche S angehört.

Eine solche Fläche S, die sich ins Unendliche erstreckt, kann von Ebenen in allen drei Gattungen von Kegelschnitten geschnitten werden. Je nachdem nämlich irgend eine Ebene E_0 die Kugel S_0 in einem Kreise K_0 schneidet, welcher den Kreis $\varkappa$ in der Gegenebene G_e in keinen reellen Punkten, in zwei reellen und getrennten Punkten, oder endlich in zwei reellen und zusammenfallenden Punkten trifft, wird die der obgenannten Ebene E_0 collinear entsprechende Ebene E die Fläche S in einem Kegelschnitte K treffen, der entweder keine reellen, oder zwei getrennte reelle, oder endlich zwei zusammenfallende reelle unendlich ferne Punkte besitzt, also eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel darstellt.

Eine derartige Fläche zweiten Grades wird ein „elliptisches", „zweitheiliges dreiachsiges", oder auch „zweimanteliges dreiachsiges Hyperboloid" genannt.

§. 388.

Aus der Collineation mit der Kugel S_0 können noch einige wichtige Eigenschaften dieses Hyperboloides mit Leichtigkeit abgeleitet und festgestellt werden.

Sei S_0 die Kugel, welche von der Gegenebene G_e in dem reellen Kreise $\varkappa$ geschnitten wird, und sei ferner S das dieser Kugel collinear entsprechende elliptische Hyperboloid.

Die Kugel S_0 wird längs des Kreises $\varkappa$ von einem Kreiskegel Σ_0 berührt, dessen Scheitel M_0 der Pol der Gegenebene G_e in Bezug auf die Kugel S_0 ist.

Nachdem nun bekanntlich die harmonischen und folglich auch die polaren Eigenschaften geometrischer Gebilde durch collineare Transformation erhalten bleiben, so folgt unmittelbar, dass der dem Punkte M_0 collinear entsprechende Punkt M der Pol jener Ebene sein müsse, welche der Polarebene (Gegenebene) G_e collinear entspricht.

Besagte Ebene ist aber, der Voraussetzung gemäß, die unendlich ferne Ebene. Der dem Punkte M_0 collinear entsprechende Punkt M muss daher, als Pol der unendlich fernen Ebene in Bezug auf die Fläche S, den Mittelpunkt der Fläche darstellen.

Dem Kegel Σ_0, welcher der Kugel S_0 aus dem Punkte M_0, also längs des Kreises $\varkappa$, umschrieben ist, wird ein Kegel Σ entsprechen, welcher seinen Scheitel im Mittelpunkte M der Fläche S hat, und

die letztere in dem dem Kreise $\varkappa$ entsprechenden Kegelschnitte, d. h. in dem unendlich fernen Kegelschnitte berührt.

Dieser Kegel wird daher der „Asymptotenkegel" des elliptischen Hyperboloides genannt. Wir erhalten somit den Satz:

369. „Das elliptische Hyperboloid besitzt einen Asymptotenkegel, d. h. einen längs der unendlich fernen Curve der Fläche berührenden Kegel, welcher vom zweiten Grade ist und seinen Scheitel im Mittelpunkte der Fläche hat."

§. 389.

Eigenschaften des Asymptotenkegels für dreiachsige Flächen zweiten Grades.

Auf Grund unserer bisherigen Erörterungen werden sich nun unschwer einige wichtige Eigenschaften dieses Kegels ergeben.

Denken wir uns diesbezüglich durch den Scheitel M_0 des Kegels Σ_0 eine beliebige Ebene P_0 gelegt, welche die Kugel S_0 in einem Kreise K_0 schneiden möge.

Der Kegel Σ_0 wird von dieser Ebene P_0 offenbar in zwei Erzeugenden σ_0^1 und σ_0^2 geschnitten, welche den Kreis K_0 in jenen beiden Punkten α_0 und β_0 treffen, die gleichzeitig dem Kreise $\varkappa$ in der Ebene G_e angehören. Der Ebene P_0 wird sodann collinear eine durch den Mittelpunkt M des Hyperboloides gehende Ebene P entsprechen, welche diese Fläche in einem Kegelschnitte K schneiden wird, der dem Kreise K_0 collinear ist.

Den beiden Kegelerzeugenden σ_0^1 und σ_0^2 entsprechen die Erzeugenden σ_1 und σ_2, in welchen die Ebene P den Asymptotenkegel Σ des Hyperboloides schneidet. Nachdem aber σ_0^1 und σ_0^2 den Kegelschnitt K_0 in den Punkten α_0 und β_0 berühren, müssen auch die Geraden σ_1 und σ_2 mit dem Kegelschnitte K in den den Punkten α_0 und β_0 entsprechenden unendlich fernen Punkten α und β eine Berührung eingehen, werden also die Asymptoten des Kegelschnittes K darstellen. Hiermit folgt der Satz:

370. „Irgend eine durch den Mittelpunkt eines elliptischen Hyperboloides gehende Ebene schneidet diese Fläche in einem Kegelschnitte, dessen Asymptoten diejenigen Erzeugenden des Asymptotenkegels sind, welche in der schneidenden Ebene liegen."

Aus den gepflogenen Erörterungen ist gleichzeitig zu entnehmen, dass das elliptische Hyperboloid aus zwei gegen den Mittelpunkt symmetrisch gelegenen, sich ins Unendliche erstreckenden Flächenmänteln besteht, welche von den beiden

Mänteln des Asymptotenkegels umschlossen werden. Daher auch die Benennung der Fläche als „zweitheiliges oder zweimanteliges Hyperboloid" gerechtfertigt erscheint.

§. 390.

Sei g eine beliebige Gerade, welche das elliptische Hyperboloid in den beiden Punkten a und b, und den Asymptotenkegel desselben in den Punkten α und β schneiden möge.

Legen wir durch diese Gerade g und durch den Mittelpunkt M des Hyperboloides eine Ebene P, so schneidet diese das Hyperboloid in einer durch die Punkte a und b gehenden Hyperbel und den Asymptotenkegel in zwei durch α beziehungsweise β gehenden Erzeugenden, welche, dem vorstehenden Satze gemäß, die Asymptoten der Hyperbel K sein werden.

Nach einem bekannten, die Hyperbel betreffenden Satze sind die Stücke $a\alpha$ und $b\beta$ der Geraden g, welche zwischen dieser und ihren Asymptoten liegen, einander gleich. Wir erhalten demgemäß den Satz:

371. „Die Stücke einer beliebigen Geraden, welche zwischen einem elliptischen Hyperboloide und dessen Asymptotenkegel liegen, sind stets einander gleich."

§. 391.

Der eben aufgestellte Satz führt zu wichtigen Folgerungen. Denken wir uns nämlich eine beliebige Ebene P, welche das elliptische Hyperboloid in einem Kegelschnitte K, und den Asymptotenkegel in einem Kegelschnitte K' schneiden möge.

Der Mittelpunkt des erstgenannten Kegelschnittes (K) sei M. Ziehen wir durch M in der schneidenden Ebene P eine beliebige Gerade g, welche K in den Punkten a und b, den Kegelschnitt K' dagegen in den Punkten α und β schneiden möge, so ist einerseits $Ma = Mb$ und andererseits, nach dem vorstehenden Satze, $a\alpha = b\beta$, mithin auch:

$$M\alpha = M\beta.$$

Da dasselbe von jeder Geraden g, welche in der Ebene P durch den Punkt M gezogen wird, gilt, so folgt unmittelbar, dass M auch der Mittelpunkt des Kegelschnittes K' sei und dass mithin die beiden Kegelschnitte K und K' concentrisch, ähnlich und ähnlich gelegen sind, oder mit einem Worte: zwei „homothetische" Kegelschnitte darstellen.

Ist demnach der eine von ihnen eine Hyperbel, so ist es auch der andere, und werden überdies den beiden Hyperbeln dieselben Asymptoten zukommen. Ist einer der Kegelschnitte eine Parabel, so ist es auch der andere, und wird die letztere eine mit der ersteren coaxiale Parabel darstellen. Mithin besteht der Satz:

372. *„Eine beliebige Ebene schneidet ein elliptisches Hyperboloid und dessen Asymptotenkegel stets in homothetischen Kegelschnitten."*

§. 392.

Denkt man sich die Ebene P parallel zu sich selbst verschoben, so durchläuft der den Kegelschnitten K und K' gemeinschaftliche Mittelpunkt (nach Satz 434, Band II) eine Gerade, welche durch den Mittelpunkt des Hyperboloides geht und den der Schar paralleler Ebenen conjugierten Durchmesser darstellt.

Mit Zugrundelegung des Satzes 491, Band II) ist aber die nämliche Gerade auch der derselben Parallelschar schneidender Ebenen conjugierte Durchmesser des Asymptotenkegels.

Nachdem das Gleiche offenbar von jeder Lage der schneidenden Ebene P gilt, ist unschwer zu erkennen, dass das System der conjugierten Durchmesser des Asymptotenkegels mit jenem des Hyperboloides identisch ist, dass also insbesondere auch das elliptische Hyperboloid und dessen Asymptotenkegel dieselben Hauptachsen und dieselben Hauptebenen besitzen. Dieses Ergebnis liefert sofort den Satz:

373. *„Irgend drei conjugierte Durchmesser eines elliptischen Hyperboloides sind gleichzeitig auch drei conjugierte Durchmesser seines Asymptotenkegels. Insbesondere haben das Hyperboloid und dessen Asymptotenkegel gemeinschaftliche Hauptachsen und gemeinschaftliche Hauptebenen."*

§. 393.

Aus dem Satze 371) folgt noch ein leicht zu ermittelnder Specialsatz.

Ist nämlich g eine Tangente des Hyperboloides in einem Punkte a, so fallen selbstverständlich die beiden Schnittpunkte a und b der Geraden g mit der Fläche in diesem Berührungspunkte a zusammen. Bezeichneter Punkt a halbiert demgemäß (nach Satz 371) die Strecke der Geraden g innerhalb des Asymptotenkegels.

Berührt nun irgend eine Ebene T_a das Hyperboloid in einem Punkte a und schneidet dieselbe den Asymptotenkegel in einem Kegel-

schnitte K', so gilt das eben Gesagte von allen durch a in der Ebene T_a gezogenen Geraden g, d. h. der Berührungspunkt a ist der Mittelpunkt des Kegelschnittes K. Hiernach besteht der Satz:

374. „Jede Berührebene eines elliptischen Hyperboloides schneidet den demselben entsprechenden Asymptotenkegel in einem Kegelschnitte, dessen Mittelpunkt der Berührungspunkt dieser Ebene mit dem Hyperboloide ist.“

Berücksichtigt man übrigens, dass der Berührungspunkt als unendlich kleiner, auf einen Punkt reducierter Schnitt der Fläche mit einer Ebene betrachtet werden kann, so ist klar, dass der vorstehende Satz auch unmittelbar als eine bloße Folgerung aus dem Satze 372) betrachtet werden könne.

§. 394.

Setzen wir endlich den besonderen Fall voraus, dass die Kugel S_0 von der Gegenebene G_e in einem Punkte u_0 berührt werde und untersuchen wir den Charakter der derselben collinear entsprechenden Fläche S zweiten Grades.

Besagte Fläche wird von der unendlich fernen (der Gegenebene G_e collinear entsprechenden) Ebene in einem Punkte u berührt, welcher collinear dem Punkte u_0 entspricht und daher der unendlich ferne Punkt des Collineationsstrahles Cu_0 ist.

Denken wir uns weiters die Fläche S durch eine beliebige Ebene E nach einen Kegelschnitt K geschnitten. Dieser Kegelschnitt wird, bei allgemeiner Lage der Ebene E, stets eine Ellipse sein. Denn der Ebene E wird collinear eine Ebene E_0 entsprechen, welche nicht durch den Punkt u_0 geht und infolge dessen die Kugel S_0 in einem Kreise K_0 schneiden wird, welcher keine reellen Punkte mit der Gegenebene gemein hat. Die natürliche Folge hiervon ist, dass auch der diesem Kreise K_0 entsprechende Kegelschnitt keine reellen unendlich fernen Punkte besitzen und mithin eine Ellipse repräsentieren wird.

Hyperbeln können überhaupt auf der Fläche S nicht existieren, da diese von der unendlich fernen Ebene in einem Punkte berührt wird und daher keine getrennten reellen Punkte der Fläche in unendlicher Entfernung vorhanden sind.

Enthält endlich die schneidende Ebene P den unendlich fernen Punkt der Fläche S, d. h. ist dieselbe zu einer gewissen Geraden (beispielsweise etwa zu dem Collineationsstrahle Cu_0) parallel, so schneidet sie die Fläche S in einem Kegelschnitte K, der einen unendlich fernen Punkt u besitzt und in demselben von der Schnittgeraden der

Ebene F mit der unendlich fernen Ebene, d. i. von der unendlich fernen Geraden der schneidenden Ebene P berührt wird. Besagter Kegelschnitt K wird mithin eine Parabel sein.

Die so entstandene Fläche besteht demnach aus einem einzigen sich ins Unendliche erstreckenden Mantel und wird das „elliptische Paraboloid" genannt.

Dasselbe enthält im allgemeinen nur Ellipsen, im besonderen dagegen, d. h. in Ebenen, welche zu einer bestimmten Richtung parallel sind, Parabeln, nie aber Hyperbeln.

Die Ebene G_e berührt die Kugel S_0 in dem Punkte u_0; sie ist also auch die Polarebene dieses Punktes in Bezug auf die Kugel S_0.

Nachdem aber, wie bereits bekannt, Polarbeziehungen durch collineare Transformation nicht geändert werden, so wird auch der dem Punkte u_0 collinear entsprechende Punkt u der Pol derjenigen Ebene sein, welche der Gegenebene G_e collinear entspricht. Da aber die letzterwähnte Ebene die unendlich ferne Ebene ist, so muss der Punkt u gleichzeitig der Mittelpunkt des Paraboloides sein.

Das elliptische Paraboloid hat mithin einen unendlich fernen Mittelpunkt und ist daher keine centrische Fläche zweiten Grades.

Jede durch den obgenannten Mittelpunkt gehende Gerade, d. h. jede zu dem Collineationsstrahle Cu_0 parallele Gerade ist sodann ein Durchmesser der Fläche, und jede durch u gehende, also zu Cu_0 parallele Ebene ist eine Durchmesserebene des Paraboloides.

Jeder Durchmesser trifft die Fläche nur in einem, im Endlichen gelegenen Punkte, und jede Durchmesserebene schneidet, wie oben gezeigt wurde, das elliptische Paraboloid in einer Parabel.

Unter allen diesen parallelen Durchmessern des Paraboloides gibt es einen, welcher eine Achse der Fläche darstellt.

Dieser Durchmesser kann anstandslos aus der collinearen Kugel S_0 abgeleitet werden, wenn man berücksichtigt, dass die Tangentialebene in Endpunkte des Durchmessers auf demselben senkrecht stehen müsse.

Da nämlich alle Durchmesser zu einander und zum Collineationsstrahle Cu_0 parallel sind, so ist die Stellung der fraglichen Tangentialebene vollkommen bestimmt.

Denken wir uns durch das Collineationscentrum C eine Ebene τ senkrecht zum Strahle Cu_0 geführt. Diese Ebene möge die Gegen-

ebene G_e in der Geraden φ_0 treffen. Durch diese Gerade kann an die Kugel S_0, außer der Gegenebene G_e, noch eine zweite Berührebene T_0 gelegt werden, welche die Kugel S_0 im Punkte A_0 berühren und die Collineationsebene C_e in der zu φ_0 parallelen Geraden δ schneiden mag. Dieser Ebene T_0 wird collinear eine Ebene T entsprechen, welche durch die Gerade δ parallel zur Ebene τ geht, also senkrecht zu den Durchmessern des Paraboloides ist und das Paraboloid in dem Punkte A, welcher dem Punkte A_0 der Kugel S_0 entspricht, berührt.

Hieraus ist zu ersehen, dass der der Ebene T conjugierte Durchmesser Au auf derselben senkrecht steht und daher die im Endlichen liegende Hauptachse des Paraboloides darstellt.

Irgend eine zu Au senkrechte Ebene wird mithin das Paraboloid in einer Ellipse schneiden, deren Mittelpunkt auf der Achse Au liegt. Diese letztere bestimmt mit den Achsen der Schnittellipse zwei Ebenen, welche offenbar zwei Hauptebenen des Paraboloides repräsentieren.

Die unendlich fernen Geraden dieser Ebenen sind die beiden anderen Hauptachsen des Paraboloides und die unendlich ferne Ebene selbst, stellt die dritte Hauptebene dar. Der Punkt A, in welchem die Hauptachse das Paraboloid trifft, heißt der „Scheitel" des elliptischen Praboloides.

§. 395.

Parallel zu einer Ebene lässt sich an ein elliptisches Paraboloid nur eine im Endlichen liegende Berührebene legen.

Beachtet man nämlich, dass zwei parallele Ebenen sich in einer unendlich fernen Geraden schneiden, so ist einleuchtend, dass durch irgend eine unendlich ferne Gerade (also parallel zu irgend einer Ebene), außer der unendlich fernen Tangentialebene, nur noch eine Tangentialebene gelegt werden kann.

Ist jedoch die gegebene Ebene parallel zur Achse des Paraboloides, d. h. geht deren unendlich ferne Gerade durch den Berührungspunkt des Paraboloides mit der unendlich fernen Ebene, so fallen beide durch diese unendlich ferne Gerade gehenden Berührebenen mit der unendlich fernen Ebene zusammen; es gibt daher keine Berührebene des Paraboloides in endlicher Entfernung, welche zu der gegebenen Ebene, also auch zur Achse des Paraboloides, parallel wäre. Es besteht mithin der Satz:

375. „Parallel zu einer Ebene kann an das elliptische Paraboloid nur eine einzige Berührebene im Endlichen gelegt werden. Ist

insbesondere die gegebene Ebene parallel zur Achse des Paraboloides, so gibt es keine im Endlichen gelegene zu ihr parallele Berührebene der Fläche.“

§. 396.

Wir wollen nun noch einige auf die Kreisschnitte, die Hauptachsen und die Hauptebenen bezüglichen Eigenschaften entwickeln, welche für alle dreiachsigen Flächen zweiten Grades, mit Ausnahme der windschiefen Flächen, Geltung haben.

Sei S_0 eine Kugel, welche wir für ein beliebiges Collineationscentrum C, eine willkürliche Collineationsebene und Gegenebene C_e beziehungsweise G_e, in eine Fläche S zweiten Grades transformieren.

Dem zur Collineationsebene C_e senkrechten Kugeldurchmesser Z_0 entspricht derjenige Durchmesser Z der Fläche S, welcher den zu der Collineationsebene parallelen Kreisschnittsebenen conjugiert ist. Den Endpunkten A_0 und B_0 des Kugeldurchmessers Z_0 entsprechen mithin die Kreispunkte A und B auf Z.

Denken wir uns der Fläche S aus einem beliebigen Punkte Σ im Raume, einen Kegel umschrieben, welcher die Collineationsebene C_e in einem Kegelschnitte γ treffen möge.

Die beiden Geraden ΣA und ΣB schneiden die Collineationsebene C_e in zwei Punkten f_1 und f_2.

Diesem Kegel entspricht wieder ein Kegel, welcher der Kugel S_0 umschrieben ist, dessen Scheitel Σ_0 dem Punkte Σ collinear entspricht, und welcher die Collineationsebene C_e in dem nämlichen Kegelschnitte γ schneiden muss.

Den beiden Geraden ΣA und ΣB entsprechen jene Geraden, welche den Kegelscheitel Σ_0 mit den Endpunkten A_0 und B_0 des zur Collineationsebene senkrechten Kugeldurchmessers Z_0 verbinden. Besagte Geraden müssen die Collineationsebene C_e gleichfalls in denselben Punkten f_1 und f_2 treffen, in welchen die Collineationsebene C_e von den Geraden ΣA und ΣB getroffen wurde. Nach dem Dandelin'schen Satze sind die Punkte f_1 und f_2 die Brennpunkte des Kegelschnittes γ.

Denkt man sich den der Fläche S aus Σ umschriebenen Kegel durch irgend eine zur Collineationsebene C_e parallele Ebene geschnitten, so wird der sich so ergebende Schnitt mit dem Kegelschnitte γ ähnlich sein, und dessen Brennpunkte werden, ebenfalls aus Gründen der Ähnlichkeit, auf den beiden Geraden $f_1\Sigma$ und $f_2\Sigma$ oder ΣA und ΣB liegen müssen.

Diese Ergebnisse zusammengefasst, erhalten wir den Satz:

376. „*Wird einer beliebigen, nicht windschiefen dreiachsigen Fläche zweiten Grades aus einem beliebigen Punkte im Raume ein Kegel umschrieben, so schneidet eine beliebige, zu einer Kreisebene parallele Ebene diesen Kegel in einem Kegelschnitte, dessen Brennpunkte die Schnittpunkte der Kegelschnittsebene mit jenen beiden Geraden sind, welche den Kegelscheitel mit den der genannten Kreisebene conjugierten Kreispunkten verbinden.*“

Der eben angeführte Satz gilt offenbar für alle Gattungen der nicht windschiefen dreiachsigen Flächen zweiten Grades, da bei der Ableitung desselben keine besondere Voraussetzung über die Lage der Gegenebene G_e gemacht wurde.

§. 397.

Bezüglich des elliptischen Paraboloides ist noch Nachstehendes ergänzend hinzuzufügen.

Diese Fläche besitzt im Endlichen nur zwei Kreispunkte, da (nach Satz 375) zu einer beliebigen Ebene, also auch zu jeder der beiden Kreisebenen nur eine parallele Berührebene gelegt werden kann. Die jeweilig zweite Berührebene ist die unendlich ferne Ebene selbst; es sind daher zwei Kreispunkte im unendlich fernen Punkte des Paraboloides vereinigt.

In Anbetracht des vorstehenden Satzes tritt demnach in dem Falle, als wir das Paraboloid im Auge haben, an die Stelle der einen von den beiden vorgenannten Geraden ΣA und ΣB der durch den Kegelscheitel Σ gezogene Durchmesser des Paraboloides, während die andere den Kegelscheitel Σ mit dem Kreispunkte A des Paraboloides verbindet.

§. 398.

Sei wieder S_0 eine Kugel, S die ihr entsprechende Fläche zweiten Grades, $A_0 B_0$ der zur Collineationsebene C_e senkrechte Kugeldurchmesser, AB der demselben collinear entsprechende Durchmesser von S, welcher den zur Collineationsebene parallelen Kreisschnitten von S conjugiert ist. Es sind mithin A und B zwei Nabelpunkte der Fläche S.

Setzen wir weiters voraus, K sei ein beliebiger ebener Schnitt der Fläche S, welchem auf der Kugel S_0 der Kreis K_0 entsprechen möge.

Legen wir nun durch den Kegelschnitt K einen Kegel, dessen Scheitel einer der beiden Kreispunkte A und B, etwa der Punkt A ist. Dieser Kegel wird die Collineationsebene in einem gewissen Kegelschnitt γ schneiden, den wir näher untersuchen wollen.

Dem Kegel (A, K) wird collinear der Kegel (A_0, K_0) entsprechen, und muss dieser die Collineationsebene C_e in dem nämlichen Kegelschnitte γ, wie der Kegel (A, K) schneiden. Nachdem aber die Collineationsebene C_e zur Berührebene der Kugel in dem Punkte A_0, der Voraussetzung nach ($A_0 B_0$ steht senkrecht zu C_e), parallel ist, so folgt aus dem Satze 189), dass ihr Schnitt γ mit dem Kegel (A_0, K_0) ein Kreis sein müsse. Es wird daher auch der Kegel (A, K) von jeder zur Collineationsebene parallelen Ebene in einem Kreise geschnitten.

Da bei der vorstehenden Ableitung alle Betrachtungen unabhängig von der Lage der Gegenebene G_e geführt wurden, so ist es offenbar ganz gleichgiltig, ob die Fläche ein dreiachsiges Ellipsoid, Hyperboloid oder Paraboloid sei, und es gilt daher ganz allgemein für die eben genannten Flächen der Satz:

377. „Legt man durch einen beliebigen Kegelschnitt auf einer nicht windschiefen Fläche einen Kegel, der seinen Scheitel in einem Kreispunkte der Fläche hat, so wird dieser Kegel von allen Ebenen, welche zu der entsprechenden Kreisebene parallel sind, in Kreisen geschnitten."

§. 399.

Gleichzeitig sei an dieser Stelle noch beigefügt, warum die vorstehenden Sätze für die windschiefen Flächen zweiten Grades keine Geltung haben können.

Jede Berührungsebene einer windschiefen Fläche zweiten Grades schneidet diese letztgenannte Fläche bekanntlich in zwei durch den Berührungspunkt a gehenden Erzeugenden. Wäre a in der That ein Kreispunkt einer solchen Fläche, so müsste dieselbe von der betreffenden Tangentialebene in zwei durch a gehenden Erzeugenden geschnitten werden; es müsste aber auch jede zu dieser Tangentialebene parallele Ebene die Fläche in einem Kreise schneiden, was offenbar schon deswegen nicht möglich ist, da sich diesfalls als Schnitt eine Hyperbel ergibt, deren Asymptoten zu jenen zwei Erzeugenden parallel sind. Daher der Satz:

378. „Eine windschiefe Fläche zweiten Grades besitzt keine (reellen) Kreispunkte."

§. 400.

Sei F^2 eine beliebige Fläche zweiten Grades, H eine ihrer Hauptebenen und K_h der in derselben liegende Hauptschnitt.

Nehmen wir einen beliebigen Punkt a_1 auf der Fläche an und bestimmen wir seine Tangentialebene T'_a, welche die genannte Hauptebene H in einer Geraden g schneiden möge.

Da die Hauptebene H eine Ebene orthogonaler Symmetrie für die Fläche F^2 ist, so wird die durch die Gerade g gelegte zweite Berührebene T^2_a der Fläche mit der ersten Berührebene T^1_a, in Bezug auf die Hauptebene H, als Symmetrieebene, symmetrisch liegen, und ebenso wird ihr Berührungspunkt a_2 symmetrisch mit a_1 in Bezug auf H gelegen sein, d. h. die Gerade $a_1 a_2$ wird auf H senkrecht stehen.

Die Gerade $a_1 a_2$ ist aber (nach Satz 409, Band II) die Polare der Geraden g in Bezug auf die Fläche F^2; es wird daher (nach Satz 413, Band II) die Gerade g auch die Polare des Punktes α_1 (in welchem $a_1 a_2$ die Hauptebene H schneidet) in Bezug auf den Hauptschnitt K_h sein müssen.

Nachdem aber $a_1 a_2$ auf der Ebene H senkrecht steht, so stellt der Punkt α die orthogonale Projection des Punktes a_1 (oder a_2) auf diese Hauptebene dar. Dies ergibt den für die Construction wichtigen Satz:

379. „Die Trace einer Berührungsebene einer beliebigen Fläche zweiten Grades auf der Ebene eines ihrer drei Hauptschnitte ist die Polare der orthogonalen Projection des Berührungspunktes auf diese Hauptebene in Bezug auf den in derselben liegenden Hauptschnitt.“

In der vorstehenden Ableitung wurde durchwegs nur von den Polareigenschaften der Flächen zweiten Grades überhaupt Gebrauch gemacht, wodurch wir zu dem Schlusse berechtigt werden, dass der eben entwickelte Satz für alle Flächen zweiten Grades, einerlei ob windschief oder nicht, seine Giltigkeit behaupte.

§. 401.

Da bei einer Rotationsfläche zweiten Grades jede durch die Rotationsebene gehende Ebene, d. i. jede Meridianebene, als Hauptebene, und der entsprechende Meridiankegelschnitt als Hauptschnitt betrachtet werden darf, so folgt aus dem eben aufgestellten Satze sofort der nachstehende:

380. „Die Trace einer Berührebene einer Rotationsfläche zweiten Grades auf einer beliebigen Meridianebene ist die Polare der orthogonalen Projection des Berührungspunktes auf diese Meridianebene in Bezug auf den in ihr liegenden Meridiankegelschnitt.“

Endlich folgt noch speciell für die Kugel der Satz:

381. „Die Trace der Berührebene einer Kugel auf einer beliebigen Diametralebene derselben ist die Polare der orthogonalen Projection des Berührungspunktes auf diese Diametralebene in Bezug auf den in der letzteren liegenden größten Kugelkreis.“

§. 402.

Beziehung der Kreisebenen zu den Achsenebenen einer Fläche.

Die beiden Kreisebenen einer Fläche zweiten Grades stehen zu den Achsenebenen der Fläche in einer einfachen Beziehung, welche wir hier erörtern wollen.

Denken wir uns eine Fläche zweiten Grades durch eine Ebene E nach einem Kreise geschnitten. Da es bloß zwei Kreisscharen gibt, so ist einleuchtend, dass dieselben zu einer der drei Hauptachsen parallel sein müssen.

Denn es wird in Bezug auf irgend eine der drei Hauptebenen H_1, H_2, H_3, beispielsweise für H_1 als Symmetrieebene, der Ebene E eine symmetrische Ebene E' entsprechen, welche die vorliegende Fläche in einem mit dem ersten Kreise in Bezug auf H_1 symmetrischen Kreise schneiden wird.

Die beiden Ebenen E und E' schneiden sich in einer Geraden g der Ebene H_1, von welcher Geraden sich unschwer darthun lässt, dass sie zu einer der Hauptachsen der Fläche parallel läuft, oder was dasselbe ist, dass die beiden Ebenen E und E' auf einer Hauptebene senkrecht stehen müssen.

Wäre nämlich letzteres nicht der Fall, sondern wären die Ebenen E und E' gegen alle drei Hauptebenen geneigt, so würden sich, in Bezug auf die beiden Hauptebenen H_2 und H_3, noch vier verschiedene symmetrische Lagen von Kreisschnitten ergeben müssen, was offenbar unmöglich ist.

Die beiden Kreisebenen, d. s. die durch den Mittelpunkt der Fläche gehenden Kreisschnittsebenen, müssen daher eine Achse der Fläche enthalten und in Bezug auf die beiden durch diese Achse gehenden Hauptebenen, symmetrisch liegen. Außerdem findet man leicht, dass diese Achse die mittlere Achse sein müsse. Dieselbe repräsentiert nämlich einen Durchmesser des Kreises. Wäre es allenfalls die kleine Achse, so würde sich kein zweiter ihr gleicher Durchmesser der Fläche, also auch kein Durchmesser des Kreises ergeben. Wäre es dagegen, im Falle des Ellipsoides, die große Achse, so sind wieder umgekehrt alle anderen Durchmesser der Fläche kleiner und es wird sich somit abermals kein Kreis ergeben können. Wir gelangen demnach zu dem Satze:

382. „Die beiden Kreisebenen einer Fläche zweiten Grades gehen durch die mittlere Achse der Fläche und sind symmetrisch in Bezug auf die beiden durch diese Achse gehenden Hauptebenen der Fläche als Symmetrieebenen.“

Für das elliptische Paraboloid werden wir die Kreisschnitte in späterer Folge besonders betrachten.

§. 403.

Schließlich sei noch der nachstehende Satz bewiesen:

383. „Jede dreiachsige Fläche zweiten Grades kann — mit Ausnahme des hyperbolischen Paraboloides — orthogonal affin in eine Rotationsfläche zweiten Grades transformiert werden.

Setzen wir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, die gegebene Fläche als ein dreiachsiges Ellipsoid voraus.

Die große Achse $(EF, E'F')$ (Taf. XIV, Fig. 81) denken wir uns horizontalprojicierend, die kleine Achse $(CD, C'D')$ verticalprojicierend und folglich die mittlere Achse $(AB, A'B')$ parallel zur Grundlinie. Infolge dieser Annahme sind die drei Hauptebenen (AB, EF), (AB, CD), (CD, EF) beziehungsweise zu der verticalen- der horizontalen- und der Kreuzriss-Projectionsebene parallel.

Wählen wir eine von den drei Hauptebenen, etwa die zur verticalen Projectionsebene parallele Ebene ε_h, welche die Achsen AB und EF enthält, als Affinitätsebene.

Die Affinität sei eine orthogonale, d. h. die Affinitätsstrahlen mögen senkrecht auf der Affinitätsebene, also verticalprojicierend sein.

Als Modul der Affinität nehmen wir das Achsenverhältnis $\frac{AB}{CD}$ der in der horizontalen Hauptebene liegenden Ellipse (K, K') an.

Es ist einleuchtend, dass jede Ellipse, welche dasselbe Achsenverhältnis besitzt und mit ihrer großen Achse in der Ebene ε_h liegt, während ihre Ebene auf der letztgenannten Ebene senkrecht steht, affin in einen Kreis übergeht.

Dies gilt im vorliegenden Falle von allen Ellipsenschnitten der Fläche mit horizontalen Ebenen, da diese mit der Hauptellipse (K, K') ähnlich sind und ihre großen Achsen in der Ebene ε_h haben. Die besagte Fläche wird daher durch Transformation in eine Fläche überführt, deren zur Achse EF senkrechten Schnitte Kreise sind. Die Fläche wird also in eine Rotationsfläche übergehen.

Der Kegelschnitt $(ABEF)$ in der Hauptebene ε_h bleibt, da diese die Affinitätsebene repräsentiert, unverändert; derselbe stellt somit einen Meridian der Rotationsfläche dar.

Noch wäre die folgende, für durchzuführende Constructionen nicht unwichtige Bemerkung anzuschließen.

Ist auf der Fläche zweiten Grades irgend eine Curve gezeichnet, so übergeht dieselbe in eine Curve auf der Rotationsfläche, wenn sie auf gleiche Weise wie die Fläche selbst affin transformiert wird.

Die ursprüngliche und die transformierte Curve liegen sodann auf einem Cylinder, dessen Erzeugenden die Affinitätsstrahlen sind. Unter der Voraussetzung, dass die Affinitätsebene zur verticalen Projectionsebene parallel sei, sind diese Affinitätsstrahlen, mithin auch der Cylinder verticalprojicierend, woraus folgt, dass die ursprüngliche und die transformierte Curve dieselbe Verticalprojection besitzen.

Beachtet man, dass durch affine Transformation projectivische Eigenschaften der transformierten Gebilde erhalten bleiben, dass ferner parallele Gerade und Ebenen durch affine Transformation wieder in parallele Gerade und Ebenen, sowie endlich ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte wieder in solche übergehen, so ist mit Rücksicht auf Satz 383) einleuchtend, dass der größte Theil der vorher für die Rotationsflächen zweiten Grades entwickelten Eigenschaften und Sätze entweder unmittelbar oder doch nur mit einer entsprechenden Änderung des Wortlautes auch für die dreiachsigen Flächen zweiten Grades als giltig angenommen werden können.

So wird beispielsweise der Satz 343) in den folgenden übergehen:

383b. „Die orthogonale Projection eines beliebigen ebenen Schnittes eines elliptischen Paraboloides auf eine zur Achse senkrechte Ebene ist ähnlich und ähnlich gelegen mit dem in dieser Ebene liegenden Hauptschnitte.“

Im Satze 383) wurde hervorgehoben, dass ein hyperbolisches Paraboloid in keine Rotationsfläche affin verwandelt werden könne. Dies ist leicht einzusehen. Soll nämlich eine Fläche zweiten Grades in eine Rotationsfläche affin verwandelt werden können, so müssen auf derselben Ellipsen existieren, da nur diese in Kreise affin zu transformieren ermöglicht ist.

Das hyperbolische Paraboloid enthält jedoch keine Ellipsen, sondern nur Hyperbeln und Parabeln, und ist somit von einer derartigen affinen Transformation ausgeschlossen.

XXIII. Capitel.

Constructionen und graphische Aufgaben die Flächen zweiten Grades betreffend.

§. 404.

Wir beginnen auch diesfalls mit dem Einfachsten, um, auf dieses gestützt, das Umständlichere resp. Schwierigere mit umso größerer Leichtigkeit und Sicherheit zur Lösung und Durchführung bringen zu können.

50. Aufgabe. Eine Kugel ist durch ihren Radius und durch die orthogonalen Projectionen ihres Mittelpunktes gegeben; es ist die besagte Fläche darzustellen, d. h. ihre verticale und horizontale Contour zu construieren; ferner ist die eine Projection eines Punktes auf der Kugel gegeben und die zweite Projection dieses Punktes zu bestimmen.

Die verticale Contour der Kugel ist der Schnitt der verticalen Projectionsebene mit dem der Kugel umschriebenen verticalprojicierenden Cylinder. Jeder der Kugel umschriebene Cylinder ist aber (nach Satz 131) ein Rotationscylinder, dessen Achse durch den Kugelmittelpunkt geht und dessen senkrechter Querschnitt einem größten Kugelkreise congruent ist.

Da der Cylinder im vorliegenden Falle verticalprojicierend ist, so wird dessen Schnitt mit der verticalen Projectionsebene, d. i. die gesuchte Contour, unmittelbar ein solcher Kreis sein. Der Mittelpunkt des besagten Kreises ist der verticale Durchstoßpunkt der Cylinderachse, also identisch mit der orthogonalen Projection O (Taf. XIV, Fig. 82) des Kugelmittelpunktes, und da der oberwähnte Kreis einem größten Kugelkreise congruent sein soll, so wird als der verlangte Kreis K derjenige erhalten, welcher aus O als Mittelpunkt mit dem gegebenen Kugelradius beschrieben wird.

Beachten wir ferner, dass der der Kugel umschriebene verticalprojicierende Cylinder die letztere in einem größten Kugelkreise berührt, dessen Ebene die durch den Kugelmittelpunkt gehende zu den Cylindererzeugenden senkrechte, also zur verticalen Projectionsebene parallele Ebene ε_h ist, so ist unschwer einzusehen, dass die verticale Contour gleichzeitig die Projection dieses Kugelkreises ist. Die horizontale Projection K' dieses Kreises (K, K') fällt in die Gerade ε_h als Trace der vorerwähnten Ebene.

In gleicher Weise ergibt sich die horizontale Contour der Kugel als der Kreis K'_1, welcher aus dem Punkte O' als Mittelpunkt mit

dem Kugelradius beschrieben wird. Dieser Kreis K'_1 ist gleichzeitig die horizontale Projection des zur horizontalen Projectionsebene parallelen Kugelkreises, dessen verticale Projection K_1 in die durch O parallel zur Grundlinie gezogene Gerade η_v fällt.

Ist weiters a die verticale Projection irgend eines Punktes auf der Kugel und soll die horizontale Projection desselben bestimmt werden, so kann man auf zweifache Weise vorgehen.

Wir denken uns durch diesen Kugelpunkt a eine zur horizontalen Projectionsebene parallele Ebene e gelegt; die verticale Trace dieser Ebene ist die Gerade e_v, welche durch a parallel zur Grundlinie gezogen wird. Diese Ebene e schneidet die Kugel in einem durch den Punkt a gehenden Kreis (K_2, K'_2), dessen horizontale Projection K'_2 in wahrer Größe erscheinen wird. Der Mittelpunkt (o, o') dieses Kreises ist der Fußpunkt des vom Kugelmittelpunkte (O, O') auf die Ebene e_v gefällten Perpendikels. Die horizontale Projection o' desselben fällt daher mit der horizontalen Projection O' des Kugelmittelpunktes zusammen.

Der gesuchte Kreis (K_2, K'_2) schneidet ferner den größten Kugelkreis (K, K') in zwei Punkten (α, α'); (β, β'), deren horizontale Projectionen α' und β' in der Geraden ε_h liegen. Durch diese Punkte α' und β' muss offenbar die horizontale Projection K'_2 des gesuchten Kreises gehen. Wie leicht einzusehen, ist dessen Durchmesser der Sehne $\alpha\beta$ gleich, welcher Umstand selbstverständlich die diesbezügliche Construction nur noch erleichtert.

Die horizontale Projection a' des gesuchten Punktes muss einerseits auf diesem Kreise K'_2 liegen, andererseits sich aber auch auf der durch a zur Grundlinie senkrecht gezogenen Geraden vorfinden. Diese Gerade schneidet den Kreis K'_2 in den zwei Punkten a' und a'_1; es können demnach sowohl a und a', als auch a und a'_1 als die beiden Projectionen eines Punktes auf der Kugel angesehen werden.

Die horizontale Projection a', resp. a'_1 des Punktes a kann auch folgendermaßen abgeleitet werden.

Wir zeichnen einen Kreis K_3, welcher O zum Mittelpunkte hat und durch den Punkt a geht. Dieser Kreis ist offenbar die verticale Projection jenes Kreises, in welchem die durch den Punkt a gelegte, zur verticalen Projectionsebene parallele Ebene die Kugel schneidet. Die Lage dieser Ebene bestimmt sich höchst einfach, wenn man einen ihrer Punkte kennt. Ein solcher Punkt ist bereits der Punkt γ, in welchem der Kreis K_3 den größten Kugelkreis (K_1, K'_1) trifft. Diesem Punkte entsprechen zwei Horizontalprojectionen γ' und γ'_1, also auch

zwei Lagen der gesuchten Ebenen. Da die letzteren zur verticalen Projectionsebene parallel sein sollen, so sind ihre Horizontaltracen die beziehungsweise durch γ' und γ'_1 zu der Grundlinie xx parallel geführten Geraden p_h und r_h. Die gesuchten Horizontalprojectionen a' und a'_1 ergeben sich nun unmittelbar im Schnitte dieser Tracen mit der durch a senkrecht zur Grundlinie gezogenen Geraden.

§. 405.

51. Aufgabe. **Es ist der Schnitt einer durch den Mittelpunkt und Radius gegebenen Kugel mit einer gegebenen Ebene zu construieren, d. h. es sind die conjugierten Durchmesser oder die Achsen der verticalen und horizontalen Projection dieses Schnittes (Kreises) zu ermitteln.**

Seien (O, O') (Taf. XV, Fig. 83) die beiden Projectionen des Kugelmittelpunktes, K die verticale und K'_1 die horizontale Contour der gegebenen Kugel; $E_v E_h$ stelle die schneidende Ebene dar.

Der Schnitt dieser Ebene E mit der Kugel ist ein Kreis. Zunächst ist einleuchtend, dass, weil die Kugel symmetrisch in Bezug auf jede ihrer Durchmesserebenen ist, auch ihr Schnitt mit der Ebene $E_v E_h$ symmetrisch sein wird in Bezug auf jede zu der schneidenden Ebene senkrechten Durchmesserebene der Kugel.

Unter allen diesen Durchmesserebenen gibt es zwei, welche sich graphisch am leichtesten darstellen lassen; es sind dies die beiden projicierenden Durchmesserebenen. Wir wählen im vorliegenden Falle die horizontalprojicierende, zur Ebene $E_v E_h$ senkrechte Durchmesserebene P. Die Horizontaltrace P_h derselben geht durch O' und steht senkrecht auf E_h. Diese Ebene ist, wie bereits gesagt wurde, eine Symmetrieebene des Schnittkreises der Kugel mit der Ebene $E_v E_h$; ihre Schnittgerade (l, l') mit der Ebene $E_v E_h$ wird demgemäß einen Durchmesser des gesuchten Schnittes darstellen.

Besagter Durchschnitt (l, l') wird am einfachsten folgendermaßen bestimmt. Ein Punkt dieses Schnittes ist unmittelbar der Schnittpunkt (δ, δ') der beiden Tracen E_h und P_h. Ein weiterer Punkt desselben wird offenbar der Schnittpunkt (σ, σ') des horizontalprojicierenden Kugeldurchmessers mit der Ebene $E_v E_h$ sein.

Ist auf diese Weise der Durchmesser (l, l') des Schnittkreises, als Verbindungsgerade der beiden Punkte (δ, δ') und (σ, σ') oder als Verbindungslinie von (δ, δ') mit (v, v') gefunden, so wird es sich nur noch darum handeln, die Endpunkte (a, a') und (b, b') desselben festzustellen. Die genannten Punkte sind keine anderen, als die Schnitt-

punkte der Geraden (l, l') mit der Kugel (K, K'_1). Die Ebene P_h, welche die Gerade (l, l') enthält, schneidet die Kugel in einem größten Kreise (K_2, K'_2), welcher (l, l') in den beiden gesuchten Punkten begegnen wird.

Um die bezeichneten Punkte graphisch zu bestimmen, drehen wir die Ebene P_h sammt der Geraden (l, l') und dem genannten größten Kreise (K_2, K'_2) um die Gerade $(O\sigma, O'\sigma')$ in eine zur Bildebene parallele Lage. Hierbei ergibt sich, nach vollbrachter Drehung, als die Verticalprojection des Kreises (K_2, K'_2) der Kreis K, welcher die verticale Contour der Kugel darstellt. Der Punkt (σ, σ') der Geraden (l, l') bleibt bei der Drehung ungeändert, während der Punkt (δ, δ') in die Lage (δ_0, δ'_0), mithin die Gerade (l, l') in die Lage (l_0, l'_0) gelangt, wobei l_0 die Verbindungsgerade der beiden Punkte σ und δ_0 repräsentiert. Die Gerade l_0 schneidet den Kreis K, resp. K^0_2 in zwei Punkten a_0 und b_0, welche in die Gerade (l, l') zurückgedreht, die Endpunkte (a, a') und (b, b') des gesuchten Kreisdurchmessers ergeben. Der Halbierungspunkt (m, m') der Strecke $(ab, a'b')$ ist der Mittelpunkt des Schnittkreises.

Ebenso einfach wird sich ein zweiter Durchmesser des Schnittkreises finden lassen. Wir werden diesfalls den zum Durchmesser (l, l') senkrechten Kreisdurchmesser bestimmen. Berücksichtigen wir hierbei, dass der Durchmesser (l, l') zur Horizontaltrace E_h senkrecht steht, so folgt ohne weiters, dass der auf demselben senkrechte Kreisdurchmesser (g, g') zur Horizontaltrace E_h parallel sein müsse. Die verticale Projection g des bezeichneten Durchmessers ist demnach die durch m gehende, zur Grundlinie parallele Gerade, während dessen horizontale Projection die Gerade g' ist, welche durch m' parallel zur Horizontaltrace E_h gezogen werden kann.

Die Endpunkte dieses Durchmessers (g, g') kann man wieder als die Schnittpunkte desselben mit der Kugel folgendermaßen bestimmen. Die durch (g, g') gelegte horizontale Ebene μ_v schneidet nämlich die Kugel, wie bereits in der vorhergehenden Aufgabe gezeigt wurde, in einem Kreise (K_3, K'_3), dessen Durchmesser gleich der Sehne $\alpha\beta$ ist, welche die Gerade g oder μ_v auf der verticalen Contour K bestimmt, während dessen horizontale Projection K'_3 mit deren horizontalen Contour K'_1 concentrisch ist. Dieser Kreis (K_3, K'_3) schneidet die Gerade (g, g') in den beiden gesuchten Punkten (c, c') und (d, d').

Der Schnittkreis der Ebene $E_v E_h$ mit der gegebenen Kugel ist sonach dargestellt durch die Projectionen zweier auf einander senkrecht stehender Kreisdurchmesser $(ab, a'b')$ und $(cd, c'd')$. Nachdem wir aber bereits wissen, dass die Parallelprojectionen rechtwink-

liger Durchmesser eines Kreises stets conjugierte Durchmesser jener Ellipse sind, als welche sich dieser Kreis projiciert, so werden als natürliche Folge ab und cd zwei conjugierte Durchmesser der verticalen Projection des Schnittkreises und $a'b'$, $c'd'$, welche gleichzeitig auf einander senkrecht stehen, die Achsen jener Ellipse darstellen, als welche sich der Schnittkreis horizontal projiciert.

Zu bemerken wäre hierbei noch, dass, weil die Verbindungsgerade des Kugelmittelpunktes (O, O') mit dem Mittelpunkte (m, m') des Schnittkreises auf der Ebene $E_v E_h$ des letzteren senkrecht steht, auch Om senkrecht auf E_v und $O'm'$ senkrecht auf E_h sein müsse, was diesfalls bei der verticalen Projection gleichzeitig als Constructionscontrole dienen kann.

§. 406.

52a. Aufgabe. **Es sind die Schnittpunkte einer Geraden mit einer gegebenen Kugel zu construieren.**

a) Erste (allgemeine) Methode durch Umlegung der Geraden um ihre Projection.

Sei (K, K'_1) (Taf. XV, Fig. 84) die gegebene Kugel und (l, l') die gegebene Gerade.

Denken wir uns durch die Gerade (l, l') eine horizontalprojicierende Ebene P gelegt, deren Horizontaltrace P_h natürlich mit der Horizontalprojection l' zusammenfällt. Letztgenannte Ebene schneidet die Kugel in einem Kreise K_2, welcher die Gerade (l, l') in den zu bestimmenden Punkten treffen wird. Der Mittelpunkt (m, m') dieses Kreises (K_2, K'_2) liegt auf der durch den Kugelmittelpunkt (O, O') zur Ebene P_h senkrecht gezogenen Geraden und hat daher von der Horizontalebene den nämlichen Abstand ϱ, wie der zugehörige Kugelmittelpunkt (O, O').

Der Durchmesser des Kreises (K_2, K'_2) ist, wie bekannt, jener Sehne $\alpha'\beta'$ gleich, welche l' auf der horizontalen Contour K'_1 bestimmt. Legt man daher den Kreis K_2 um l' oder P_h nach K^0_2 in die Horizontalebene um, so gelangt der Mittelpunkt (m, m') nach m_0, wobei $m_0 m' = nO = \varrho$ ist und auf l' senkrecht steht. Der Radius des umgelegten Schnittkreises K^0_2 ist durch $\alpha' m' = \beta' m'$ dargestellt. Bringt man nun auch die Gerade (l, l') durch Umlegung um ihre Horizontalprojection l' nach l_0, so ergeben sich die gesuchten Punkte in der Umlegung als Schnittpunkte a_0 und b_0 der Geraden l_0 mit dem Kreise K^0_2, welche, entsprechend zurückgeführt, in (a, a') und (b, b') dargestellt erscheinen.

§. 407.

52b. Dieselbe Aufgabe. Zweite (besondere) Methode.

Die gegebene Kugel sei wieder (K, K'_1) (Taf. XV, Fig. 85); die gegebene Gerade sei (l, l'). Führen wir durch die Gerade (l, l') eine verticalprojicierende Ebene P_v, so wird die Kugel in einem Kreise geschnitten.

Legen wir durch diesen Kreis einen Kegel, dessen Scheitel der Endpunkt (A, A') des zur horizontalen Projectionsebene senkrechten Kugeldurchmessers ist, so schneidet dieser Kegel die horizontale Projectionsebene (nach Satz 189) in einem Kreise (K_2, K'_2), welcher folgendermaßen leicht zu bestimmen ist.

Die Punkte m und n, in welchen l die verticale Contour K schneidet, geben mit A verbunden die verticalen Contour- oder Umrisserzeugenden des Kegels; dieselben treffen die horizontale Projectionsebene in den beiden Punkten (μ, μ') und (ν, ν'), welche bereits einen Durchmesser des gesuchten Kreises bestimmen. Es ist einleuchtend, dass die Schnittpunkte des Kegels (A_1, K_2) mit der Geraden (l, l') identisch sein müssen mit den Schnittpunkten der Geraden (l, l') und der gegebenen Kugel, da dieselben auf dem, den beiden Flächen gemeinschaftlichen Kreise mn liegen.

Hiernach sind bloß die Schnittpunkte von (l, l') mit dem Kegel $(A, A'; K_2)$ auf die bekannte Weise zu ermitteln. Zu diesem Zwecke bestimmen wir die horizontale Trace λ' der durch den Kegelscheitel (A, A') und die Gerade (l, l') gelegten Ebene. Besagte Trace geht offenbar durch die Horizontalspur (h, h') von (l, l') und durch die Horizontalspur (π, π') irgend eines von (A, A') ausgehenden, die Gerade (l, l') in einem Punkte (p, p') schneidenden Strahles.

Die Ebene (A, λ') trifft den Kegel (A, K_2) in zwei Erzeugenden $A'\alpha'$ und $A'\beta'$, welche die Gerade (l, l') in den beiden Punkten (a, a') und (b, b') treffen. Die so erhaltenen Punkte sind die Schnittpunkte der Geraden (l, l') mit dem Kegel (A, K_2), also auch jene, der Geraden (l, l') mit der gegebenen Kugel.

§. 408.

52c. Aufgabe. Die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Kugel sind unter der besonderen Voraussetzung zu bestimmen, dass die Gerade einen der beiden projicierenden Kugeldurchmesser schneidet.

Sei (K, K'_1) (Taf. XV, Fig. 86) die gegebene Kugel und (l, l') die gegebene Gerade, von welcher wir voraussetzen wollen, dass sie

den horizontalprojicierenden Kugeldurchmesser (Z, Z') in einem Punkte (σ, σ') schneiden möge.

Legen wir durch die Gerade (l, l') eine horizontalprojicierende Ebene P_h, so ist diese, der gemachten Voraussetzung gemäß, gleichzeitig eine Diametralebene der Kugel, und wird infolge dessen die letztere in einem größten Kugelkreise schneiden, dessen Horizontalprojection K'_2 mit der Geraden l' zusammenfällt. Dieser größte Kugelkreis wird offenbar die Gerade (l, l') in den gesuchten Punkten treffen.

Denken wir uns, um diese Punkte mit Bequemlichkeit zu construieren, die obgenannte projicierende Ebene P um den Kugeldurchmesser (Z, Z') in eine zur verticalen Projectionsebene parallele Lage gedreht, so wird die Verticalprojection des gleichzeitig mit gedrehten Kreises K_2 mit dem Contourkreise K zusammenfallen.

Der Punkt (σ, σ') der Geraden (l, l') bleibt als Punkt der Drehungsachse (Z, Z') ungeändert, während der Punkt (δ, δ'), d. i. die Horizontalspur von (l, l'), auf Grund einer bekannten Fundamentalconstruction, nach (δ_0, δ'_0) gelangt. Die Gerade $\delta_0 \sigma$ oder l_0 stellt sodann die Verticalprojection der gedrehten Geraden l dar. Dieselbe trifft den gedrehten größten Kugelkreis $K^0_2 = K$ in zwei Punkten a_0 und b_0, welche in die Gerade (l, l') zurückgeführt, die gesuchten Punkte (a, a') und (b, b') ergeben.

In gleicher Weise könnte man auch dann verfahren, wenn die Gerade (l, l') den verticalprojicierenden Kugeldurchmesser schneiden, oder wenn dieselbe speciell durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, also selbst einen Kugeldurchmesser repräsentieren würde.

§. 409.

53. Aufgabe. **An eine gegebene Kugel ist in einem ihrer Punkte eine Tangentialebene zu legen.**

Die gegebene Kugel (Taf. XV, Fig. 87) sei (K, K'_1) und (O, O') der Mittelpunkt derselben. Die Verticalprojection des auf der Kugel gegebenen Punktes sei a; die Horizontalprojection a' kann nach einer der beiden (in Aufgabe 50) angegebenen Methoden bestimmt werden.

Die Berührungsebene $B_v B_h$ der Kugel in dem Punkte (a, a') steht (nach Satz 124) senkrecht zu dem Kugeldurchmesser, welcher durch den Punkt (a, a') geht, d. h. senkrecht zu jener Geraden (s, s'), welche (a, a') mit dem Kugelmittelpunkte (O, O') verbindet. Vorstehende Aufgabe ist somit auf die bekannte Fundamentalaufgabe zurückgeführt: Auf eine Gerade (s, s') in einem ihrer Punkte (a, a') eine senkrechte Ebene B zu führen.

Die Tracen dieser Ebene B_v und B_h stehen senkrecht zu den betreffenden Projectionen s und s' der Geraden. Ein Punkt (v, v') der

Verticaltrace B_v oder ein solcher der Horizontaltrace B_h kann auf bekannte Weise gefunden werden.

Nebenbei sei bemerkt, dass man die beiden durch (a, a') gezogenen Geraden (s, s') und (t, t') auch als die durch den betreffenden Punkt geführten Tangenten an die Kugel oder beziehungsweise an zwei durch (a, a') gehende auf der Kugel verzeichnete Schnittcurven betrachten und $B_v B_h$ als die durch diese beiden Tangenten bestimmte Berührebene ansehen könne.

§. 410.

54. Aufgabe. **Durch eine gegebene Gerade sind die möglichen Berührungsebenen an eine gegebene Kugel zu legen und sind die Berührungspunkte dieser Ebenen zu ermitteln.**

Sei (K, K'_1) (Taf. XV, Fig. 88) die gegebene Kugel, (O, O') deren Mittelpunkt, und (l, l') die gegebene Gerade.

Denken wir uns der Kugel, parallel zu der gegebenen Geraden (l, l'), einen Cylinder umschrieben, so werden die durch (l, l') an diesen Cylinder gelegten Tangierungsebenen auch die Kugel in zwei Punkten der entsprechenden Berührungscurve berühren, und mithin gleichzeitig die gesuchten Berührebenen an die Kugel vorstellen.

Mit Zugrundelegung des Satzes 131) ist aber die Berührungscurve einer Kugel mit einem derselben umschriebenen Cylinder jener größte Kreis, in welchem die zu den Cylindererzeugenden, also auch zur gegebenen Geraden (l, l') senkrechte Diametralebene, die Kugel schneidet.

Diesen größten Kreis kann man als Leitlinie für den Cylinder betrachten, und durch die Gerade (l, l') an denselben die beiden möglichen Berührebenen legen.

Dies geschieht einfach in folgender Weise. Man bestimmt den Durchstoßpunkt der Geraden (l, l') mit der Ebene des Berührungskreises und führt von demselben an den Berührungskreis die beiden diesfalls möglichen Tangenten. Jede der beiden Tangenten bestimmt mit der gegebenen Geraden eine Berührungsebene des Cylinders und sonach auch die der gegebenen Kugel. Der Berührungspunkt derselben mit der Kugel ist der Berührungspunkt der entsprechenden Tangente mit dem Berührungskreise.

Man hat demnach, um das eben Angedeutete graphisch durchzuführen, zunächst durch den Mittelpunkt (O, O') der Kugel eine Ebene $D_v D_h$ senkrecht zu der gegebenen Geraden (l, l') zu legen. Diese Ebene schneidet einerseits die Gerade (l, l') in einem auf bekannte Weise ermittelten Punkte (s, s'), und andererseits die Kugel in

jenem größten Kreise (K_2, K'_2), welcher die Berührungscurve der Kugel mit dem parallel zu der Geraden (l, l') umschriebenen Cylinder repräsentiert.

Um an diesen Kreis von (s, s') aus mit Leichtigkeit Tangenten ziehen zu können, legen wir sowohl den Punkt (s, s'), als auch den größten Kreis um die eine Trace, etwa um die Horizontaltrace D_h in die Horizontalebene um. Hierbei gelangt der Punkt (s, s') nach s_0, und der umgelegte Kreis K_2 nach K^0_2. Die von s_0 aus an K^0_2 gezogenen Tangenten t^0_1 und t^0_2 berühren den Kreis K^0_2 beziehungsweise in den Punkten a^0_1 und a^0_2.

Die Projectionen (a_1, a'_1) und (a_2, a'_2) dieser beiden vorgenannten der Ebene $D_v D_h$ angehörenden Punkte, welche aus a^0_1 und a^0_2 abgeleitet wurden, stellen somit nach der vorausgeschickten Entwicklung die Berührungspunkte der Kugel mit jenen beiden durch (l, l') gehenden Ebenen dar. Diese letzteren könnte man nun dadurch bestimmen, dass man von den beiden eben aufgefundenen Berührungspunkten (a_1, a'_1) und (a_2, a'_2) Gebrauch macht. Kürzer jedoch gelangt man folgendermaßen zum Ziele.

Die beiden Tangenten t^0_1 und t^0_2 treffen die Horizontaltrace D_h in zwei Punkten δ_1 und δ_2; durch diese Punkte müssen offenbar die Tangenten im Raume gehen, d. h. δ_1 und δ_2 repräsentieren die horizontalen Durchstoßpunkte der Tangenten des Kugelkreises (K_2, K'_2) in den Punkten (a_1, a'_1) und (a_2, a'_2).

Da nun die besagten Tangenten auch in den gesuchten Berührungsebenen B_1 und B_2 liegen müssen, so ergeben sich die Horizontaltracen B^1_h und B^2_h der letzteren, als die Verbindungsgeraden der Punkte δ_1 und δ_2 mit dem Horizontaldurchstoßpunkte h' der Geraden (l, l'). Die Verticaltracen B^1_v und B^2_v gehen durch den Verticaldurchstoßpunkt v von (l, l').

§. 411.

55. Aufgabe. **An eine gegebene Kugel sind die beiden zu einer gegebenen Ebene parallelen Tangentialebenen zu legen und deren Berührungspunkte zu ermitteln.**

Die gegebene Kugel sei (K, K'_1) (Taf. XV, Fig. 89), (O, O') sei deren Mittelpunkt; die gegebene Ebene E sei durch ihre Tracen E_v, E_h dargestellt.

Derjenige Durchmesser der Kugel, welcher nach dem Berührungspunkte der Kugel mit einer Ebene gezogen wird, steht, wie bereits bekannt, auf dieser Ebene, also auch auf jeder zu ihr parallelen Ebene senkrecht.

Ziehen wir demgemäß durch den Kugelmittelpunkt (O, O') die Gerade (s, s') senkrecht zu der gegebenen Ebene $E_v E_h$, so repräsentiert diese den Kugeldurchmesser, dessen Endpunkte die Berührungspunkte der zu suchenden Tangentialebenen sein werden.

Um die besagten Punkte, beziehungsweise Ebenen zu erhalten, denken wir uns durch (s, s') eine horizontalprojicierende Ebene P_h gelegt; dieselbe schneidet die Kugel in einem größten Kreise K'_2, welcher um P_h in die horizontale Projectionsebene umgelegt, in K^0_2 dargestellt erscheint. Legt man gleichzeitig auch den Kugeldurchmesser (s, s') (am einfachsten mit Zuhilfenahme seiner Horizontalspur h') nach s_0 in die horizontale Projectionsebene um, so erhalten wir daselbst dessen Endpunkte a_0 und b_0 im Schnitte mit dem umgelegten Kreise K^0_2. Diese Punkte a_0 und b_0 zurückgeführt, geben die Projectionen (a, a') und (b, b') der Berührungspunkte der gesuchten Ebenen, welch' letztere man nunmehr als die durch (a, a') und (b, b') zur Ebene $E_v E_h$ geführten Parallelebenen erhalten könnte.

Rascher jedoch gelangt man zum Ziele, wenn man in der Umlegung direct die Tangenten von K^0_2 in a_0 und b_0 zieht, und deren Schnitte δ_1 und δ_2 mit der Trace P_h feststellt. Diese Punkte sind die Horizontaldurchstoßpunkte der in der Ebene P_h an den größten Kreis (K_2, K'_2) in den Punkten (a, a') und (b, b') gezogenen Tangenten. Nachdem diese letzteren nothwendig in den gesuchten Berührebenen liegen müssen, so ergeben sich deren Horizontaltracen B^1_h und B^2_h als jene durch die Punkte δ_1 und δ_2 zu E_h geführten Parallelen. Die Verticaltracen B^1_v und B^2_v sind parallel zu E_v.

§. 412.

56. Aufgabe. **Es ist die Ebene der Berührungscurve einer Kugel mit dem derselben aus einem Punkte außerhalb umschriebenen Kegel zu construieren.**

Die gegebene Kugel sei durch (K, K'_1) (Taf. XVI, Fig. 90) dargestellt; (O, O') sei deren Mittelpunkt und (S, S') der außerhalb der Fläche gegebene Punkt.

Durch den Satz 401, Band II) wurde festgestellt, dass die Ebene der Berührungscurve die Polarebene des Punktes (S, S') in Bezug auf die Kugel sei, und dass dieselbe durch den zu S conjugierten vierten harmonischen Punkt (p, p') des Kugeldurchmessers $(SO, S'O')$ gehen müsse; ferner entnehmen wir dem Satze 129), dass die besagte Ebene zu dem letztgenannten Durchmesser senkrecht stehe.

Denken wir uns daher den Durchmesser ($SO, S'O'$) gezogen, und um dessen horizontale Projection $S'O'$ nach $S_0 O_0$ umgelegt. In dieser Umlegung ergeben sich die Endpunkte a_0 und b_0 desselben sofort, wenn man $O_0 a_0$ und $O_0 b_0$ gleich dem Kugelradius macht, oder, was dasselbe ist, wenn man die Schnittpunkte a_0 und b_0 von $S_0 O_0$ mit dem aus O_0 mit dem Kugelradius beschriebenen Kreis $K^0{}_2$ bestimmt.

Sucht man nun zu S_0, a_0, b_0 den vierten harmonischen Punkt p_0 und führt denselben zurück, so erhält man die Projectionen jenes Punktes (p, p'), durch welchen die Ebene $E_v E_h$ der Berührungscurve senkrecht zum Durchmesser ($SO, S'O'$) zu führen ist. Der Punkt (p, p') ist gleichzeitig der Mittelpunkt des gesuchten Berührkreises, welcher nunmehr als Schnitt der Kugel mit der Ebene $E_v E_h$, nach der in Aufgabe 51) erläuterten Weise, anstandslos construiert werden kann.

Die Construction der Ebene der Berührungscurve lässt übrigens noch eine Vereinfachung zu.

Da wir wissen, dass die eben bezeichnete Ebene auf dem durch den Kegelscheitel (S, S') (Taf. XVI, Fig. 91) gehenden Kugeldurchmesser ($SO, S'O'$) senkrecht stehe, so ist auch einleuchtend, dass zu deren Bestimmung ein ihr angehörender Punkt, beispielsweise ein Punkt der Berührungscurve selbst, vollkommen hinreichen wird. — Ziehen wir demnach von S aus eine Tangente t an die verticale Contour K; der diesbezügliche Berührungspunkt sei m. Es ist klar, dass diese Tangente die Verticaltrace einer durch den Punkt (S, S') gehenden verticalprojicierenden Ebene darstelle, und dass diese Ebene gleichzeitig die Kugel in dem Punkte (m, m') des zur verticalen Projectionsebene parallelen größten Kugelkreises (K, K') berühren werde. Der Punkt (m, m') gehört daher der Berührungscurve, also auch der Ebene derselben an. Diese letztere ergibt sich sodann unmittelbar als die durch (m, m') senkrecht zu ($SO, S'O'$) geführte Ebene.

§. 413.

57. Aufgabe. **Es ist die Berührungscurve des einer gegebenen Kugel, parallel zu einer gegebenen Geraden, umgeschriebenen Cylinders zu bestimmen.**

Nachdem die verlangte Berührungscurve derjenige größte Kugelkreis ist, in welchem die Kugel von der zu den Cylindererzeugenden, also auch zur gegebenen Geraden, senkrechten Diametralebene berührt wird (Satz 131), so haben wir diesfalls einfach durch den Kugelmittelpunkt (O, O') (Taf. XVI, Fig. 92) eine zur Geraden (l, l') senkrechte

Ebene $E_v E_h$ zu führen, und deren Durchschnitt mit der Kugel zu suchen.

Das für die Construction des Durchschnittes einer Kugel mit einer Ebene (Aufgabe 51) entwickelte Verfahren gestattet diesfalls jedoch noch einige Vereinfachungen.

Der zur Horizontaltrace E_h der Diametralebene E parallele Durchmesser des gesuchten Diametralschnittes ist offenbar der zu E_h parallele Durchmesser $(cd, c'd')$ des zur horizontalen Projectionsebene parallelen größten Kugelkreises (K_1, K'_1). Der zu diesem Durchmesser, also auch zu E_h, senkrechte Durchmesser hat zur Horizontalprojection die Senkrechte aus O' auf E_h. Die Horizontalspur (δ, δ') desselben ergibt sich im Schnitte dieser Senkrechten mit E_h. Hieraus findet man unmittelbar dessen verticale Projection δO. Die Endpunkte (a, a') und (b, b') erhält man (wie in Aufgabe 52 *b*) durch eine Drehung von $O\delta$ um den horizontalprojicierenden Kugeldurchmesser in die zur Bildebene parallele Lage $O\delta_0$, und durch die nachherige Zurückführung der beiden Punkte a_0 und b_0, in welchen $O\delta_0$ den Contourkreis K schneidet.

§. 414.

58. *Aufgabe.* Es sind die Achsen jenes Kegelschnittes zu bestimmen, in welchen ein einer gegebenen Kugel aus einem Punkte außerhalb umschriebener Kegel eine der beiden Projectionsebenen schneidet, oder mit anderen Worten: es ist die Contour der Kugel auf der horizontalen Projectionsebene für ein gegebenes Projectionscentrum zu ermitteln.

Der Mittelpunkt der gegebenen Kugel ist (O, O') (Taf. XVI. Fig. 93); K und K'_1 seien deren Contouren in Bezug auf eine verticale und horizontale Ebene und (S, S') sei der gegebene Punkt im Raume.

Den Schnitt des der Kugel aus dem Punkte (S, S') umschriebenen Kegels mit der horizontalen Projectionsebene ist ein Kegelschnitt, dessen Brennpunkte, nach dem Dandelin'schen Satze, die Horizontalspuren f_1 und f_2 jener zwei Geraden sind, welche den Kegelscheitel (S, S') mit den Endpunkten (A, A') und (B, B') des zur horizontalen Projectionsebene senkrechten Durchmessers der Kugel verbinden.

Um diese Punkte, sowie gleichzeitig auch die eine Achse des zu bestimmenden Kegelschnittes zu finden, denken wir uns jene Diametralebene P_h der Kugel bestimmt, welche einerseits den Punkt (S, S') und andererseits den vorgenannten Durchmesser $(AB, A'B')$ enthält.

Besagte Ebene ist die durch (S, S') gehende horizontalprojicierende Diametralebene, deren Horizontaltrace P_h die Punkte S' und O' verbindet.

Legen wir den in dieser Ebene liegenden größten Kugelkreis K_2, sowie den Punkt (S, S') um die Trace P_h, in die horizontale Projectionsebene beziehungsweise nach K_2^0 und S_0 um, so gelangt der gleichzeitig mit umgelegte Durchmesser AB in die zu P_h senkrechte Lage A_0B_0. Die Geraden S_0A_0 und S_0B_0 treffen bereits die Trace P_h in den gesuchten Punkten f_2 und f_1.

Zieht man ferner von S_0 aus an den umgelegten Kreis K_2^0 die beiden Tangenten S_0a und S_0b, so repräsentieren diese die Umlegungen zweier vom Punkte (S, S') ausgehenden Tangenten des Kreises K_2, also auch der gegebenen Kugel (K, K'_1), während ihre Horizontalspuren, d. i. die beiden Punkte a und b, in welchen die umgelegten Tangenten S_0a und S_0b die Trace P_h schneiden, zwei Punkte des gesuchten Kegelschnittes darstellen. Nachdem diese letzeren aber mit den beiden Brennpunkten f_1 und f_2 auf der nämlichen Geraden P_h liegen, so stellen die besagten Punkte bereits die Endpunkte der einen Achse des gesuchten Kegelschnittes dar. Der Mittelpunkt o dieses Kegelschnittes ergibt sich als Mittelpunkt der Strecke ab.

Die zweite Achse des Kegelschnittes ist die Normale durch o zur Achse ab, während deren Endpunkte c und d erhalten werden, wenn man die besagte Senkrechte mit einem Kreise durchschneidet, dessen Mittelpunkt ein Brennpunkt f_1 und dessen Radius gleich oa ist.

§. 415.

59. Aufgabe. **Es ist jener Kegelschnitt durch seine Achsen zu bestimmen, in welchen ein einer gegebenen Kugel parallel zu einer gegebenen Geraden umschriebener Cylinder die verticale Projectionsebene schneidet.**

Sei (K, K'_1) (Taf. XVI, Fig. 94) die gegebene Kugel, (O, O') der Mittelpunkt derselben, und (l, l') die gegebene Gerade.

Die Brennpunkte des gesuchten Kegelschnittes sind (nach Satz 507, Band II) die Verticalspuren f_1 und f_2 jener Geraden, welche durch die Endpunkte (A, A') und (B, B') des verticalprojicierenden Kugeldurchmessers parallel zu der Geraden (l, l') gezogen werden können.

Die Gerade f_1f_2 bestimmt somit die Richtung der einen Achse des gesuchten Kegelschnittes. Der Halbierungspunkt o der Strecke f_1f_2 ist gleichzeitig der Mittelpunkt des Kegelschnittes, und jene Gerade, welche durch o senkrecht auf f_1f_2 gezogen wird, die kleine Achse desselben.

Zur Kenntnis der Endpunkte der beiden Achsen gelangen wir durch folgende einfache Betrachtung. Der einer Kugel umschriebene Cylinder ist

stets ein Rotationscylinder, und der ebene Schnitt eines Rotationscylinders ist, wie wir wissen, immer ein Kegelschnitt, dessen kleine Achse, der Länge nach, dem Durchmesser des Cylinders gleich, im vorliegenden Falle also auch gleich dem Durchmesser der gegebenen Kugel ist. Wir erhalten hiernach die kleine Achse cd des verlangten Kegelschnittes, wenn wir auf der Normalen zu $f_1 f_2$ vom Punkte o aus die Strecke $oc = od$ gleich dem Radius der gegebenen Kugel auftragen. Die Endpunkte a und b der großen Achse des Kegelschnittes hingegen ergeben sich unmittelbar, wenn man berücksichtigt, dass

$$oa = ob = f_1 c = f_2 c$$

sein muss.

§. 416.

60. Aufgabe. **An eine Kugel (K, K') ist durch einen außerhalb derselben gelegenen Punkt (S, S') eine Berührungsebene zu legen, welche mit einer Projectionsebene, etwa mit der horizontalen Projectionsebene, einen gegebenen Winkel α einschließt.**

Denken wir uns an die verticale Contour K der Kugel, deren Mittelpunkt (O, O') (Taf. XVI, Fig. 95) sei, eine Tangente t gezogen, welche mit der Grundlinie den gegebenen Winkel α einschließt. Diese Tangente kann offenbar als die Verticaltrace einer verticalprojicierenden Ebene betrachtet werden, welche die Kugel in einem Punkte (m, m') des zur verticalen Projectionsebene parallelen größten Kreises (K, K') berührt, außerdem aber unter dem Winkel α gegen die horizontale Projectionsebene geneigt ist. Diese Ebene schneidet den horizontalprojicierenden Kugeldurchmesser in einem Punkte (Σ, Σ') und die horizontale Projectionsebene in der zur Grundlinie senkrechten Trace t_h.

Denken wir uns die besagte Ebene um den Durchmesser $(\Sigma O, \Sigma' O')$ gedreht, so wird ihre Enveloppe offenbar ein gerader Kreiskegel mit dem Scheitel (Σ, Σ') und der Achse $(O\Sigma, O'\Sigma')$ sein. Die Trace dieses Kegels auf der horizontalen Projectionsebene ist jener Kreis K_2', welcher O' zum Mittelpunkte hat und die Trace t_h berührt. Außerdem ist einleuchtend, dass bei der vorerwähnten Rotation, um $O\Sigma$ als Achse, die Ebene $(t t_h)$ in jeder ihrer Lagen die Kugel berühren wird, dass also der eben construierte Kegel, der Kugel aus dem Punkte (Σ, Σ') umschrieben ist und dieselbe in jenem Parallelkreise K_3 berührt, dessen Verticalprojection die durch m zur Grundlinie parallel gezogene Gerade ist.

Legt man nun durch den gegebenen Punkt (S, S') an diesen Kegel (Σ, K'_2) die beiden möglichen Berührebenen T_1 und T_2, so

werden diese den sämmtlichen diesfalls gestellten Bedingungen Genüge leisten.

Um besagte Ebenen zu erhalten, wird man bekanntlich die Horizontalspur h' der Verbindungsgeraden des Punktes (S, S') mit dem Kegelscheitel (Σ, Σ') bestimmen. Die von h' aus an den Kreis K'_2 gezogenen Tangenten T_h^1 und T_h^2 sind unmittelbar die Horizontaltracen der gesuchten Ebenen. Die Verticaltracen T_v^1 und T_v^2 werden auf bekannte, aus der Zeichnung ersichtliche Weise gefunden.

Der Berührungspunkt einer dieser Ebenen, beispielsweise der Ebene $T_v^1\, T_h^1$ liegt einerseits auf dem Berührungskreise K_3, andererseits aber auf dem zur Ebene T_v^1, T_h^1 senkrechten Kugeldurchmesser $(Oa, O'a')$, ist mithin der Schnittpunkt (a, a') beider.

§. 417.

61. Aufgabe. **An eine Kugel S ist parallel zu einer gegebenen Geraden l eine Berührungsebene so zu legen, dass dieselbe mit einer Ebene, allenfalls mit der verticalen Projectionsebene, einen bestimmten Winkel α einschließt.**

Die gestellte Aufgabe graphisch durchzuführen, dürfte überflüssig erscheinen, da sich dieselbe auf zwei bereits bekannte Aufgaben zurückführen lässt. Es wird somit die bloße Angabe ihrer Lösung vollkommen ausreichen.

Denken wir uns dieselbe bereits gelöst, setzen wir also voraus, wir hätten eine Ebene T construiert, welche die Kugel S berührt, zu der gegebenen Geraden l parallel ist, und mit der verticalen Projectionsebene den gegebenen Winkel α einschließt. Denken wir uns weiters zu dieser Ebene durch die Gerade l eine parallele Ebene E_1 geführt, so muss selbstverständlich auch diese mit der verticalen Projectionsebene den nämlichen Winkel α einschließen. Eine dieser letzteren Bedingung entsprechende Ebene E_1 zu legen, ist aber als bereits bekannt vorauszusetzen und kann daher anstandslos geführt werden, ohne dass die Ebene T selbst als schon construiert angenommen wird.

Man hat demnach diesfalls, um obige Aufgabe zu lösen, bloß durch die gegebene Gerade, Ebenen E_1 und E_2 zu führen, welche mit der verticalen Projectionsebene den gegebenen Winkel α einschließen, und zu diesen Ebenen parallel Berührebenen an die Kugel zu legen.

Diese Aufgabe, sowie die vorhergegangene, gestattet selbstverständlich vier Auflösungen.

§. 418.

62. Aufgabe. An eine Kugel ist eine Tangentialebene zu legen, welche mit der horizontalen und der verticalen Projectionsebene bestimmte gegebene Winkel einschließt.

Sei K und K'_1 (Taf. XVI, Fig. 96) beziehungsweise die verticale und horizontale Contour der Kugel und (O, O') deren Mittelpunkt; ferner sei α der Winkel, welchen die zu bestimmende Berührebene mit der horizontalen Projectionsebene, und β derjenige Winkel, welchen dieselbe mit der verticalen Projectionsebene einschließen soll.

Ziehen wir an die verticale Contour K eine Tangente t_1, welche mit der Grundlinie den Winkel α einschließt und die besagte Contour in dem Punkte m berühren mag. Diese Tangente t_1 stellt gleichzeitig die Verticaltrace einer verticalprojicierenden Ebene T_1 dar, welche mit der horizontalen Projectionsebene den Winkel α einschließt und die Kugel in einem Punkte (m, m') des zur verticalen Projectionsebene parallelen größten Kugelkreises (K, K') berührt. Denken wir uns diese Ebene um den zur horizontalen Projectionsebene senkrechten Kugeldurchmesser $(O\,S, O'\,S')$ gedreht, so beschreibt dieselbe einen geraden Kreiskegel, welcher der Kugel längs des durch den Punkt (m, m') gehenden, zur horizontalen Projectionsebene parallelen Kugelkreises (K_2, K'_2) umschrieben ist.

Jede Ebene, welche die Kugel in einem Punkte dieses Kreises berührt, berührt auch den genannten Kegel und schließt demnach mit der horizontalen Projectionsebene den Winkel α ein.

Denken wir uns andererseits unter dem Winkel β gegen die Grundlinie an die horizontale Contour K'_1 der Kugel eine Tangente t_2 gelegt, welche dieselbe in dem Punkte p' berühren mag, so kann diese Tangente als Horizontaltrace einer horizontalprojicierenden Ebene T_2 aufgefasst werden, welche mit der verticalen Projectionsebene den Winkel β einschließt und die Kugel in einem Punkte (p, p') des zur horizontalen Projectionsebene parallelen größten Kugelkreises (K_1, K'_1) berührt.

Wird diese Ebene T_2 um den verticalprojicierenden Kugeldurchmesser $(O\Sigma, O'\Sigma')$ gedreht, so beschreibt dieselbe gleichfalls einen geraden Kreiskegel, welcher die Kugel längs des durch (p, p') gehenden zur verticalen Projectionsebene parallelen Kugelkreises (K_3, K'_3) berührt.

Jede Ebene, welche die Kugel in einem Punkte dieses Kreises berührt, berührt auch den Kegel und schließt mithin mit der verticalen Projectionsebene den Winkel β ein.

Die beiden Kreise (K_2, K'_2) und (K_3, K'_3) schneiden sich in zwei Punkten, von welchen jeder derselben die Eigenschaft besitzt, dass

er der Berührungspunkt der Kugel (K, K'_1) mit einer Ebene ist, welche mit der horizontalen Projectionsebene den Winkel α und mit der verticalen Projectionsebene den Winkel β einschließt, also eine der gesuchten Berührebenen darstellt.

Diese Berührungsebene wird (nach Aufgabe 53) einfach als jene Ebene construiert, welche durch den betreffenden Berührungspunkt geht und auf der Verbindungsgeraden des letzteren mit dem Kugelmittelpunkte senkrecht steht.

Berücksichtigt man, dass noch ein zweiter Kegel existiert, welcher die Kugel unter denselben Verhältnissen berührt, dessen Berührebenen also mit der horizontalen Projectionsebene den Winkel α einschließen, und dass sich ebenso ein zweiter Kegel bezüglich des Winkels β construieren lässt, der den gestellten Bedingungen entspricht, so findet man leicht, dass im allgemeinen der Aufgabe acht verschiedene Ebenen Genüge leisten werden.

§. 419.

63. Aufgabe. **An eine Kugel und an einen Rotationskegel sind die gemeinschaftlichen Berührungsebenen zu legen.**

Der gegebene Kegel sei durch seinen Scheitel (S, S') (Taf. XVI, Fig. 97) und durch seinen in der horizontalen Projectionsebene liegenden Basiskreis $(C\,C')$ dargestellt. Der Voraussetzung gemäß ist dieser Kegel ein gerader Kreiskegel; es fällt daher der Mittelpunkt des Basiskreises mit der horizontalen Projection S' des Kegelscheitels zusammen. Die gegebene Kugel sei (K, K'_1).

Wir wissen, dass sämmtliche Berührungsebenen eines geraden Kreiskegels mit der Basisebene desselben gleiche Winkel einschließen und dass im vorliegenden Falle dieser Winkel α in wahrer Größe auftritt, also als derjenige erscheint, welchen die Contourerzeugenden des Kegels mit der Grundlinie einschließen.

Denken wir uns nun an die verticale Contour K der gegebenen Kugel (K, K'_1) eine parallele Tangente t zu einer der beiden Contourerzeugenden des Kegels gelegt, so wird auch diese mit der Grundlinie den nämlichen Winkel α bilden. Diese Tangente t kann, wie in den vorhergehenden Aufgaben, als die Verticaltrace einer verticalprojicierenden Ebene betrachtet werden, welche gegen die horizontale Projectionsebene unter dem Winkel α geneigt ist und die Kugel in einem Punkte (m, m') des zur verticalen Projectionsebene parallelen größten Kugelkreises (K, K') berührt.

Der Punkt, in welchem besagte Ebene den horizontalprojicierenden Kugeldurchmesser $(O\Sigma, O'\Sigma')$ schneidet, ist (Σ, Σ'). Denkt man

sich die genannte Ebene um diesen Durchmesser gedreht, so umhüllt dieselbe einen der Kugel (O, O') umschriebenen Kegel, dessen Scheitel (Σ, Σ') ist, dessen Achse der Kugeldurchmesser $(O\Sigma, O'\Sigma')$ ist und dessen sämmtliche Berührungsebenen mit der horizontalen Projectionsebene den nämlichen Winkel α, wie die Berührungsebenen des gegebenen Kegels (S_1, C) einschließen. Jener mit K'_1 concentrische Kreis, welcher sich als die Spur des Kegels (Σ, Σ') auf der horizontalen Projectionsebene ergibt, sei durch (γ, γ') dargestellt.

Verbinden wir weiters die beiden Kegelscheitel (S, S') und (Σ, Σ') durch eine Gerade (s, s') und legen wir durch diese Gerade eine Berührebene $B'_v B'_h$ an den Kegel (Σ_1, γ), so berührt diese Ebene einerseits die dem Kegel (Σ, γ) eingeschriebene Kugel (K, K'_1) andererseits geht dieselbe aber auch durch den Scheitel (S, S') des gegebenen Kegels (S_1, C) und schließt mit der horizontalen Projectionsebene den Winkel α ein. Besagte Ebene ist daher gleichzeitig auch eine Tangentialebene des Kegels (S, C); repräsentiert mithin eine der gesuchten Ebenen.

Berücksichtigt man, dass sich durch die Gerade (s, s') noch eine zweite Berührebene $B^2_v B^2_h$ an den Kegel (Σ, γ) legen lässt, und dass weiters noch ein zweiter Kegel (mit nach abwärts gekehrter Spitze) von derselben Eigenschaft wie der Kegel (Σ, γ) der gegebenen Kugel umschrieben werden kann, so findet man, dass der Aufgabe im allgemeinen vier verschiedene Ebenen entsprechen.

§. 420.

64 a. Aufgabe. **Durch einen gegebenen Punkt ist eine Ebene zu legen, welche zwei gegebene Kugeln gleichzeitig berührt.**

Seien (O, O') (Taf. XVI, Fig. 98) und (o, o') die Mittelpunkte der beiden gegebenen Kugeln, (K, K'_1) und (k, k'_1) die Contouren derselben und (p, p') der gegebene Punkt.

Wir wissen bereits, dass die sämmtlichen, den beiden Kugeln (O, O') und (o, o') gemeinschaftlichen Berührebenen z w e i R o t a t i o n s k e g e l u m h ü l l e n, welche die C e n t r a l e der b e i d e n K u g e l n, d. i. die Gerade $(Oo, O'o')$ zur g e m e i n s c h a f t l i c h e n A c h s e haben, und deren Scheitel, beziehungsweise der ä u ß e r e und i n n e r e Ä h n l i c h k e i t s p u n k t der beiden Kugeln, d. h. jene Punkte (A, A') und (J, J') sind, welche die Strecke $(Oo, O'o')$ äußerlich, resp. innerlich in dem Verhältnisse der beiden Kugelradien theilen.

Es ist einleuchtend, dass sich die beiden äußeren gemeinschaftlichen Tangenten der Contouren K und k in dem Punkte A, welcher die verticale Projection des äußeren Ähnlichkeitspunktes darstellt, treffen

werden. Denn ist A die Projection dieses Punktes, so muss derselbe offenbar auch die Projection Oo der Strecke $(Oo, O'o')$ im Raume, in dem Verhältnisse der Kugelradien theilen, was bekanntlich durch die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise K und k bewirkt wird.

Dass A die verticale Projection des äußeren Ähnlichkeitspunktes sei, folgt übrigens auch aus der folgenden Betrachtung. Dieser Ähnlichkeitspunkt ist der Scheitel jenes Kegels, dessen Berührebenen gleichzeitig die äußeren gemeinschaftlichen Berührebenen der beiden Kugeln darstellen. Ist eine solche Ebene bekannt, so wird sich obbezeichneter Punkt offenbar als der Durchstoßpunkt dieser Ebene mit der Centralen $(Oo, O'o')$ ergeben.

Zieht man eine gemeinschaftliche äußere Tangente t an die verticalen Kugelcontouren K und k, so ist diese die Verticaltrace einer vertical-projicierenden Ebene, welche sowohl die Kugel (O, O'), als auch die Kugel (o, o') berührt; der Schnittpunkt (A, A') derselben mit der Centralen $(Oo, O'o')$ ist mithin der äußere Ähnlichkeitspunkt.

Dieser Betrachtung entnehmen wir, dass sich die Projectionen A und A' des äußeren Ähnlichkeitspunktes als die Schnittpunkte der gemeinschaftlichen äußeren Tangenten an die verticalen, resp. horizontalen Kugelcontouren ergeben.

Desgleichen sind die Schnittpunkte J und J' der gemeinschaftlichen inneren Tangenten an die verticalen, resp. horizontalen Kugelcontouren die Projectionen des inneren Ähnlichkeitspunktes.

Jede gemeinschaftliche Berührebene der beiden Kugeln O und o muss somit entweder durch den Punkt (A, A') oder durch den Punkt (J, J') gehen.

Soll diese gemeinschaftliche Berührebene nebstbei durch den Punkt (p, p') gehen, so muss dieselbe außer (p, p') auch die durch (p, p') führende Gerade $(Ap, A'p')$ oder die Gerade $(Jp, J'p')$ enthalten.

Legt man daher durch eine dieser obenangeführten Geraden (Aufgabe 54) eine Berührebene an die eine Kugel, beispielsweise an die Kugel (O, O'), so muss dieselbe nothwendig auch die andere Kugel (o, o') berühren, also eine der gesuchten Ebenen darstellen.

Nachdem sowohl durch die Gerade $(Ap, A'p')$, als auch durch die Gerade $(Jp, J'p')$ zwei gemeinschaftliche Berührebenen an eine der beiden Kugeln gelegt werden können, so ist einleuchtend, dass es im allgemeinen v i e r E b e n e n gibt, welche der gestellten Aufgabe Genüge leisten.

Auf die soeben besprochene Aufgabe lässt sich auch die

64b. Aufgabe. An einen Rotationskegel und an eine Kugel gemeinschaftliche Berührebenen zu legen,

zurückführen.

Ist nämlich (S, C') (Taf. XVI, Fig. 97) der gegebene Rotationskegel (dessen Basis C' in der horizontalen Projectionsebene liegt) und (O, O') die gegebene Kugel, so kann man die gemeinschaftlichen Tangentialebenen beider auch folgendermaßen finden.

Aus früherem wissen wir, dass man einem Rotationskegel unendlich viele Kugeln einschreiben kann. Denken wir uns daher dem gegebenen Kegel (S, C') eine Kugel eingeschrieben. Es genügt, als verticale Contour der Kugel einen Kreis σ zu wählen, welcher die Contourerzeugenden des Kegels berührt. Die horizontale Contour σ'_1 der Kugel ist sodann selbstverständlich ein Kreis von dem nämlichen Radius, welcher zum Mittelpunkte die Horizontalprojection S' des Kegelscheitels hat.

Es ist somit klar, dass die gestellte Aufgabe auf die: „eine Ebene zu finden, welche durch den Punkt (S, S') geht, und die beiden Kugeln (K, K') und (σ, σ') berührt" zurückgeführt ist; denn jede Ebene, welche durch (S, S') geht und die Kugel (σ, σ') berührt, muss nothwendig auch eine Berührungsebene des Kegels (S, C') sein.

§. 421.

65. Aufgabe. **An zwei concentrische Rotationskegel sind gemeinschaftliche Berührebenen unter der Voraussetzung zu legen, dass mindestens in einer Projection die Contourerzeugenden der beiden Rotationskegel vorliegen.**

Sei beispielsweise S (Taf. XVI, Fig. 99) die verticale Projection des den beiden Kegeln gemeinschaftlichen Scheitels, und seien beziehungsweise a_1, b_1 und a_2, b_2 die verticalen Contouren dieser beiden Kegel, deren kreisförmige Leitlinien selbstverständlich auch in Ebenen liegen können, welche gegen die beiden Projectionsebenen geneigt sind.

Da man einem Rotationskegel unendlich viele Kugeln einschreiben kann, und die verticalen Contouren aller dieser Kugeln die Verticalcontour des Kegels berühren müssen, so werden zwei ganz beliebige Kreise K und k, wovon der erstere die beiden Contourerzeugenden a_1 und b_1, der zweite aber die beiden Contourerzeugenden a_2 und b_2 berührt, die Verticalcontouren zweier Kugeln darstellen, welche beziehungsweise dem Kegel (a_1, b_1, S) und dem Kegel (a_2, b_2, S) eingeschrieben sind.

Die horizontalen Contouren dieser Kugeln sind sodann Kreise, welche dieselben Radien wie die Kreise K und k besitzen, deren Mittelpunkte jedoch auf den horizontalen Projectionen der Kegelachsen liegen werden.

Sind auf diese Weise die beiden Kugeln (K, K'_1) und (k, k'_1) bestimmt, so genügt es, durch den gemeinschaftlichen Kegelscheitel S an diese beiden Kugeln gemeinschaftliche Berührebenen zu legen (Aufgabe 64a). Jede dieser Ebenen wird auch den der einen oder beziehungsweise der anderen Kugel aus dem Punkte S umschriebenen Kegel (S, a_1, b_1), resp. (S, a_2, b_2) berühren, und mithin eine der gesuchten Ebenen repräsentieren.

Da durch einen Punkt an zwei Kugeln, wie wir vorher fanden, vier gemeinschaftliche Berührebenen möglich sind, so entsprechen auch zwei Rotationskegeln, die einen gemeinschaftlichen Scheitel besitzen, im allgemeinen vier gemeinschaftliche Berührungsebenen.

Schließlich wollen wir noch einige Aufgaben über gemeinschaftliche Berührungsebenen zweier Kugeln anführen. Es wird sich hierbei leicht zeigen lassen, dass sich die eben erwähnten Probleme auf bekannte Aufgaben reducieren; sei es auf solche, welche sich auf die Berührung eines geraden Kreiskegels, oder auf solche, welche sich auf die Berührung einer Kugel durch Ebenen beziehen.

§. 422.

66. Aufgabe. Parallel zu einer gegebenen Geraden sind an zwei gegebene Kugeln gemeinschaftliche Berührebenen zu legen.

Da die Berührebenen der beiden Kugeln durch den äußeren oder inneren Ähnlichkeitspunkt dieser Kugeln gehen müssen, so werden sie, falls dieselben zu einer gegebenen Geraden parallel sein sollen, auch jene Gerade enthalten müssen, welche entweder durch den äußeren oder durch den inneren Ähnlichkeitspunkt parallel zu der gegebenen Geraden gezogen werden.

Hiernach wird es genügen, durch die beiden Ähnlichkeitspunkte Geraden zu führen, welche zu der gegebenen Geraden parallel sind und durch jede dieser Geraden an die eine der beiden Kugeln die möglichen zwei Berührebenen zu legen, was auf die in Aufgabe 54) angegebene Weise geschehen kann.

Man erhält somit vier Lagen der gesuchten Ebene.

Die gestellte Aufgabe ist demnach nur ein specieller Fall der Aufgabe 64a), da in dem vorliegenden Falle der gegebene Punkt in unendlicher Entfernung liegt und folglich durch die Richtung der gegebenen Geraden repräsentiert ist.

§. 423.

67. Aufgabe. **An zwei gegebene Kugeln ist eine gemeinschaftliche Berührebene zu legen, welche einen bestimmten Winkel mit einer gegebenen Geraden einschließt.**

Nennen wir die beiden gegebenen Kugeln S_1 und S_2, ferner O_1 und O_2 deren Mittelpunkte, l die gegebene Gerade und α den gegebenen Winkel.

Bestimmen wir zunächst eine ganz beliebige Ebene e, welche mit der gegebenen Geraden l den Winkel α einschließt. Unter all' den unendlich vielen Ebenen, welche dieser Bedingung genügen, wird man jene Ebene wählen, welche sich am einfachsten construieren lässt, wo möglich also eine projicierende Ebene.

Parallel zu dieser Ebene e denken wir uns an die eine der beiden Kugeln, beispielsweise an S_1, eine Berührebene E gelegt (Aufgabe 55).

Ziehen wir ferner durch den Mittelpunkt O_1 dieser Kugel eine Gerade λ parallel zur Geraden l, so wird diese die gefundene Berührebene E in einem Punkte p schneiden, und mit derselben ebenfalls den Winkel α einschließen.

Betrachten wir weiters den Punkt p als Scheitel eines der Kugel S_1 umschriebenen Rotationskegels, so werden alle Berührebenen desselben mit der Achse $p\,O_1 = \lambda$ den Winkel α einschließen, weil eine dieser Berührebenen, nämlich E, mit der Achse λ diesen Winkel bildet.

Legt man daher, wie in Aufgabe 64*a*) gezeigt wurde, durch den Punkt p die vier den beiden Kugeln S_1 und S_2 gemeinschaftlichen Berührebenen, so wird jede derselben, der vorstehenden Betrachtung gemäß, mit der Geraden λ, also auch mit der gegebenen zu λ parallelen Geraden l den Winkel einschließen und somit eine der gesuchten Berührebenen darstellen.

Wäre der Winkel α speciell ein rechter, so müssen die gesuchten Berührebenen beider Kugeln zu jenen Ebenen gehören, welche auf l senkrecht stehen. In diesem Falle ist offenbar die Aufgabe, weil zu viele Bestimmungsstücke vorhanden sind, unmöglich.

§. 424.

68. Aufgabe. **Es ist eine Ebene zu construieren, welche von einem gegebenen Punkte und von einer gegebenen Geraden bestimmte Abstände besitzt.**

Die gegebene Gerade sei l, O der gegebene Punkt; ε_1 und ε_2 seien die diesbezüglichen Entfernungen der zu suchenden Ebene von l und O.

Denken wir uns O als Mittelpunkt einer Kugel mit dem Radius ε_2, so wird jede Berührebene dieser Kugel der einen hier gestellten Bedingung entsprechen; sie wird also von O den Abstand ε_2 besitzen.

Nehmen wir ferner einen beliebigen Punkt o der gegebenen Geraden l als Mittelpunkt einer zweiten Kugel vom Radius ε_1 an, so ist einleuchtend, dass jede Berührebene dieser Kugel, wenn dieselbe nebstbei zur Geraden l parallel geführt wurde, von dieser Geraden den Abstand ε_1 haben wird.

Vorstehende Aufgabe ist somit auf die „parallel zu einer gegebenen Geraden l an zwei gegebene Kugeln eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu legen“, zurückgeführt. Dass vier verschiedene Lagen der gesuchten Ebene möglich sind, braucht wohl kaum besonders bemerkt zu werden.

Die vorstehende Aufgabe lässt sich übrigens auch von einem anderen Gesichtspunkte aus auffassen und lösen.

Es stelle l wieder die gegebene Gerade und O den gegebenen Punkt vor, während ε_1 und ε_2 die Abstände der zu suchenden Ebene von den beiden ersteren seien. Diese Ebene, nennen wir sie T, wird die Kugel S, welche aus O als Mittelpunkt mit dem Radius ε_2 beschrieben wird, sowie ferner auch den Cylinder Σ, dessen Achse die gegebene Gerade l ist, und als senkrechten Querschnitt einen Kreis vom Radius ε_1 hat, berühren.

Denken wir uns nun durch den Punkt O eine Ebene P senkrecht auf die Gerade l geführt, so wird dieselbe auch normal zu der Berührebene T gerichtet sein und wird mithin den Berührungsradius sowohl, also auch den Berührungspunkt dieser Ebene mit der Kugel S enthalten.

Besagter Berührungspunkt wird sodann aber auch nothwendig auf jenem größten Kreise K_2 der Kugel S liegen müssen, in welchem diese von der Ebene P geschnitten wird. Selbstverständlich wird dieser Punkt auch der Berührungspunkt des größten Kreises K_2 mit derjenigen Geraden t sein, in welchem die Diametralebene P die Berührebene T schneidet.

Ferner wird die Ebene P den Cylinder Σ in einem Kreise K_1 vom Radius ε_1 schneiden, welcher gleichfalls von der Schnittgeraden t der beiden Ebenen T und P, die den Cylinder berührt, tangiert wird, oder mit anderen Worten: die Schnittgerade t der gesuchten Ebene T

mit der Diametralebene P ist eine gemeinschaftliche Tangente der beiden Kreise K_1 und K_2.

Die hiemit in Erinnerung gebrachte Eigenschaft liefert folgende Lösung der obgestellten Aufgabe.

Man wird durch den gegebenen Punkt O eine Ebene P senkrecht auf die Gerade l legen. Die letztere wird von der erwähnten Ebene P in einem Punkte o geschnitten. Zeichnet man in dieser Ebene zwei Kreise K_1 und K_2, deren Mittelpunkte beziehungsweise o und O und deren Radien beziehungsweise den beiden gegebenen Strecken ε_1 und ε_2 gleich sind; zieht man ferner an die beiden Kreise K_1 und K_2 die vier gemeinschaftlichen Tangenten (was einfach vermittelst der Umlegung der Ebene P geschehen kann) und legt man endlich durch jede dieser Tangenten eine Ebene parallel zu der gegebenen Geraden l, so erhält man die vier verschiedenen Lagen der gesuchten Ebene.

§. 425.

69. Aufgabe. **An drei gegebene Kugeln ist eine gemeinschaftliche Berührebene zu legen.**

Die Mittelpunkte der gegebenen drei Kugeln seien (O_1, O'_1); (O_2, O'_2) und (O_3, O'_3) (Taf. XVI, Fig. 100). Der Kürze halber wollen wir die drei Kugeln selbst, ebenfalls mit O_1, O_2 und O_3 bezeichnen.

Wie bereits mehrfach hervorgehoben, gehen alle jene Ebenen, welche die beiden Kugeln O_1 und O_2 berühren, durch den äußeren oder durch den inneren Ähnlichkeitspunkt dieser beiden Kugeln. Ebenso werden alle Ebenen, welche die beiden Kugeln O_1 und O_3 berühren, entweder durch den einen oder den anderen Ähnlichkeitspunkt dieser beiden Kugeln gehen müssen.

Denken wir uns einen dieser Ähnlichkeitspunkte, allenfalls den äußeren (A_3, A'_3) der beiden Kugeln O_1 und O_2 bestimmt. Gelegentlich einer früheren Aufgabe 64 *a*) wurde nachgewiesen, dass dessen beide Projectionen A_3 und A'_3 die Schnittpunkte der äußeren gemeinschaftlichen Tangenten an die verticalen, beziehungsweise an die horizontalen Contouren der beiden Kugeln O_1 und O_2 seien. Bestimmen wir ferner in gleicher Weise einen Ähnlichkeitspunkt, beispielsweise wieder den äußeren (A_2, A'_2), der beiden Kugeln O_1 und O_3.

Verbinden wir diese beiden Ähnlichkeitspunkte (A_3, A'_3) und (A_2, A'_2) durch eine Gerade (s, s') und legen wir durch die Gerade (s, s'), wie in Aufgabe 54) gezeigt wurde, die beiden Tangentialebenen T_1 und T_2 an die Kugel O_1, so werden die so erhaltenen Ebenen, weil sie die Ähnlichkeitspunkte A_3 und A_2 enthalten, nothwendig

auch die beiden Kugeln O_2 und O_3 berühren müssen, also zwei Lagen der gesuchten gemeinschaftlichen Berührebenen aller drei Kugeln darstellen.

Berücksichtigt man, dass noch zwei innere Ähnlichkeitspunkte (J_3, J'_3) und (J_2, J'_2) existieren, so findet man unschwer noch drei weitere Geraden, welche ihrer Natur nach, mit jener der Geraden (s, s') übereinstimmen. Es sind dies nämlich die Gerade (s_1, s'_1) als Verbindungsgerade von (A_3, A'_3) mit (J_2, J'_2); die Gerade (s_2, s'_2) als Verbindungsgerade von (A_2, A'_2) und (J_3, J'_3) und endlich die Gerade (s_3, s'_3) als Verbindungsgerade von (J_2, J'_2) und (J_3, J'_3).

Durch jede dieser Geraden s lassen sich ebenfalls zwei Ebenen legen, welche die Kugel O_1, mithin auch die Kugeln O_2 und O_3 berühren, und es gibt daher im allgemeinen acht Lagen der gesuchten Ebene, welche jedoch theilweise oder ganz imaginär werden können.

§. 426.

70. Aufgabe. **Es ist der Schnitt zweier Kugeln zu bestimmen.**

Der Schnitt zweier Kugeln ist, wie wir bereits wissen, ein Kreis, dessen Ebene auf der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der beiden gegebenen Kugeln senkrecht steht und dessen Mittelpunkt auf der obgenannten Geraden liegt. Es wird mithin zur Feststellung dieses Kreises die Kenntnis eines seiner Punkte oder die Angabe seines Mittelpunktes vollständig genügen.

Setzen wir voraus, es seien (K, K'_1) und (k, k'_1) (Taf. XVI. Fig. 101) die beiden gegebenen Kugeln (O, O') und (o, o') deren Mittelpunkte.

Es wird sich nun bloß darum handeln, einen Punkt, welcher gleichzeitig beiden Kugeln, also auch dem Schnittkreise derselben angehört, zu finden. Dies kann einfach folgendermaßen geschehen.

Man denke sich, der Einfachheit halber, beide Kugeln O und o durch eine und dieselbe zur horizontalen (oder zur verticalen) Projectionsebene parallelen Ebene ε_v geschnitten. Die Schnitte sind demnach durch die zwei Kreise (K_2, K'_2) und (k_2, k'_2) dargestellt.

Besagte Kreise erscheinen in der horizontalen Projection in wahrer Größe und schneiden sich daselbst in zwei Punkten (a, a') und (b, b'), welche den beiden Kugeln, also auch dem Schnittkreise beider angehören. Die Ebene dieses Schnittkreises ergibt sich sofort als jene Ebene $E_v E_h$, welche durch einen der beiden Punkte, etwa (a, a'), geht [dieselbe führt selbstverständlich auch durch den zweiten Punkt (b, b')] und senkrecht auf die Gerade $(Oo, O'o')$ gelegt wird. Der Schnitt dieser Ebene E mit der einen oder der anderen Kugel, dessen

Projectionen unmittelbar durch conjugierte Durchmesser (wie in Aufgabe 51) bestimmt werden können, repräsentiert sodann auch gleichzeitig den Schnittkreis der beiden Kugeln.

§. 427.

Oft handelt es sich bloß darum, den Mittelpunkt des Schnittkreises und dessen Radius in wahrer Größe zu kennen.

Um dieser Forderung zu entsprechen, kann man einfach folgendermaßen verfahren.

Sind (O, O') und (o, o') die Mittelpunkte der beiden Kugeln, (K, K'_1) und (k, k'_1) (Taf. XVI, Fig. 102) deren Contouren, so verbinde man die beiden Punkte (O, O') und (o, o') durch eine Gerade und drehe diese Gerade $(Oo, O'o')$ sammt der einen Kugel (k, k'_1) um den horizontalprojicierenden Durchmesser (O, O') der anderen Kugel in eine zur verticalen Projectionsebene parallele Lage Oo_0, wobei der aus o_0 als Mittelpunkt beschriebene mit k gleich große Kreis k_0 die verticale Contour der gedrehten Kugel (k, k'_1) darstellt. Hierdurch erhalten wir vor allem in Oo_0 die wahre Länge der Centralen $(Oo, O'o')$.

Die zur verticalen Projectionsebene parallele, durch Oo_0 gehende Ebene ε_h schneidet die Kugel O in einem Kreise, dessen Verticalprojection mit der Contour K zusammenfällt und die gedrehte Kugel k_0 in einem Kreise, dessen verticale Projection mit k_0 identisch ist. Diese beiden Kreise K und k_0 schneiden sich in den beiden gegen Oo_0 symmetrisch gelegenen Punkten a_0 und b_0.

Berücksichtigen wir weiters, dass in dieser gedrehten Lage die Centrale Oo_0 parallel zur verticalen Projectionsebene ist, so muss die Ebene des Schnittkreises beider Kugeln, als senkrecht zu Oo, verticalprojicierend sein; ihre Verticaltrace muss daher mit der Verbindungsgeraden $a_0 b_0$ der Punkte a_0 und b_0 zusammenfallen. Diese Gerade trifft Oo_0 in einem Punkte m_0, welcher offenbar den gedrehten Mittelpunkt des Schnittkreises repräsentiert und nach der Zurückführung in die ursprüngliche Lage in seinen Projectionen durch (m, m') dargestellt erscheint.

Dass $a_0 b_0$ den Durchmesser, mithin $a_0 m_0 = b_0 m_0$ den Radius des Schnittkreises vorstellt, ist an und für sich klar, denn dreht man die beiden Kreise K und k_0 um Oo_0, so beschreiben die Punkte a_0 und b_0 den Schnittkreis der beiden durch diese Drehung um Oo_0 erzeugten Kugeln (K, K'_1) und (k, k'_1).

§. 428.

71. Aufgabe. **Durch eine Gerade ist eine Ebene zu führen, welche eine vorliegende Kugel in einem Kreise von gegebenem Radius schneidet.**

Die vorstehende Aufgabe kann auf die bereits bekannte „durch eine Gerade Berührungsebenen an eine gegebene Kugel zu legen", zurückgeführt werden.

Es wird auf Grund dieser Andeutung genügen, wenn wir mit Umgehung der graphischen Durchführung bloß die Lösung der Aufgabe kurz skizzieren.

Wenn eine Kugel S durch eine Ebene E nach einem Kreise K geschnitten wird, stellt der Fußpunkt m des von dem Kugelmittelpunkt O auf die schneidende Ebene E gefällten Perpendikels den Mittelpunkt des Schnittkreises dar.

Hat demgemäß die Kugel den Radius R, der Schnittkreis den Radius r und verbindet man einen beliebigen Punkt a des Schnittkreises K sowohl mit dem Kugelmittelpunkte O, als auch mit dem Kreismittelpunkte m, so ist das Dreieck Oma bei m rechtwinklig. Die eine Kathete ma repräsentiert den Kreisradius r, die andere Kathete den Abstand Om der schneidenden Ebene E vom Kugelmittelpunkte und die Hypotenuse Oa den Kugelradius.

Nachdem ein rechtwinkliges Dreieck stets durch zwei seiner Seiten bestimmt ist, so folgt, dass alle Ebenen, welche eine gegebene Kugel S mit dem Mittelpunkt O und dem Radius R in Kreisen von einem gleichfalls gegebenen Halbmesser r schneiden sollen, von dem Kugelmittelpunkte O einen constanten Abstand d besitzen müssen, welcher sich als die Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes ergibt, dessen andere Kathete r und dessen Hypotenuse R ist, d. h. alle Ebenen, welche die Kugel in Kreisen von gegebenem Halbmesser schneiden, berühren eine mit der gegebenen Kugel concentrische Kugel vom Radius

$$d = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Legt man durch die gegebene Gerade an diese zweite Kugel Berührebenen, so werden diese der gestellten Aufgabe entsprechen.

Auf demselben Principe beruht auch die Lösung der folgenden Aufgaben.

§. 429.

72. Aufgabe. **Parallel zu einer gegebenen Ebene ist eine Ebene zu legen, welche eine gegebene Kugel in einem Kreise von gegebenem Radius schneidet.**

Ist S die gegebene Kugel, E die gegebene Ebene und r der Radius des Schnittkreises, so reduciert sich die gestellte Aufgabe auf die (Aufgabe 55) „eine Ebene zu construieren, welche parallel zur Ebene E ist und eine Kugel s berührt, welche mit der gegebenen Kugel S concentrisch ist, während der Radius der Kugel s durch die Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes dargestellt wird, dessen Hypotenuse dem Radius der gegebenen Kugel und dessen zweite Kathete dem gegebenen Kreisradius r gleich ist".

§. 430.

73. Aufgabe. Eine Ebene ist zu construieren, welche durch einen gegebenen Punkt p geht oder zu einer gegebenen Geraden parallel ist und zwei gegebene Kugeln, deren Radien R_1 und R_2 sind, nach Kreisen von den Radien r_1 und r_2 schneidet.

Construiert man zwei Kugeln, welche mit den beiden gegebenen Kugeln concentrisch sind und deren Radien ϱ_1 und ϱ_2 beziehungsweise gleich $\sqrt{R_1^2 - r_1^2}$ und $\sqrt{R_2^2 - r_2^2}$ sind, so wird die gesuchte Ebene diese beiden Kugeln, den vorhergehenden Erörterungen gemäß, berühren. Hiedurch ist das gestellte Problem auf die Aufgabe 64*a*) oder auf die Aufgabe 66) zurückgeführt.

§. 431.

74. Aufgabe. Es ist eine Ebene zu construieren, welche drei gegebene Kugeln von den Radien R_1, R_2 und R_3 nach Kreisen schneidet, die beziehungsweise die Radien r_1, r_2 und r_3 besitzen.

Construiert man drei Kugeln, welche mit den gegebenen drei Kugeln concentrisch sind und deren Radien beziehungsweise gleich $\sqrt{R_1^2 - r_1^2}$, $\sqrt{R_2^2 - r_2^2}$ und $\sqrt{R_3^2 - r_3^2}$ sind, so werden die gemeinschaftlichen Berührebenen dieser drei Kugeln die gegebenen Bedingungen erfüllen.

Durch Variation der jeweilig hinzutretenden Bedingungen kann man selbstverständlich auf alle möglichen in dieser Richtung bisher gelösten Aufgaben zurückkommen.

§. 432.

75. Aufgabe. Es ist die Bedingung, dass eine gegebene Strecke mit ihren Endpunkten auf einer gegebenen Kugel liege, durch eine andere, einfachere zu ersetzen.

Denken wir uns eine beliebige Kugel S; der Mittelpunkt derselben sei O und betrachten wir irgend eine Sehne ab dieser Kugel.

Das Dreieck aOb ist ein gleichschenkliges, da $aO = bO$ gleich dem Radius R der gegebenen Kugel ist. Halbiert man die Sehne ab im Punkte m, so ist die Gerade Om bekanntlich senkrecht auf ab. Die Strecke Om ist vermöge des rechtwinkligen Dreieckes Oma gleich $\sqrt{Oa^2 - am^2}$ oder, falls wir die Länge der Sehne ab mit l bezeichnen, gleich $\sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$.

Diesem Ergebnisse entnehmen wir aber, dass die Strecke Om nur von der Größe des Kugelradius R und von der Länge l der Sehne ab, nicht aber auch von der Lage der letzteren abhängig ist.

Hieraus folgt unmittelbar, dass, wenn eine Sehne ab in der Kugel S die Länge l besitzen soll, es nothwendig, aber auch hinreichend sei, wenn dieselbe vom Kugelmittelpunkte O die Entfernung $d = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}l^2}$ besitze, oder mit anderen Worten: Alle Kugelsehnen von constanter Länge sind Tangenten an eine zweite mit der gegebenen Kugel concentrischen Kugel, deren Radius ϱ gleich $\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}l^2}$ ist, wenn R die Länge des Kugelradius und l jene der Sehnen ist.

Auf Grund dieses Resultates lassen sich verschiedene Aufgaben in höchst einfacher Form lösen. Einige derselben mögen hier Platz finden.

§. 433.

76. Aufgabe. **Durch einen Punkt soll eine Gerade derart gezogen werden, dass die Stücke derselben, welche von zwei gegebenen Kugeln auf derselben abgeschnitten werden, bestimmte Längen erhalten.**

Sei p der gegebene Punkt, seien ferner S_1 und S_2 die beiden gegebenen Kugeln, deren Radien beziehungsweise R_1 und R_2 sein mögen, und l_1 und l_2 die beiden gegebenen Sehnenlängen.

Construiert man zwei Kugeln s_1 und s_2, die mit den Kugeln S_1 und S_2 concentrisch sind und beziehungsweise die Radien $\sqrt{R_1^2 - \frac{1}{4}l_1^2}$ und $\sqrt{R_2^2 - \frac{1}{4}l_2^2}$ besitzen, so wird jede Tangente von s_1, eine Sehne der Kugel S_1 von der Länge l_1 und jede Tangente der zweiten Kugel s_2, eine Sehne der Kugel S_2 von der Länge l_2 darstellen.

Sämmtliche Geraden, welche durch den gegebenen Punkt p gehen und in der Kugel S_1 die Sehnenlänge l_1 besitzen, werden Erzeugenden jenes geraden Kreiskegels sein, welcher aus dem Scheitel p der Kugel s_1 umschrieben wird, während sämmtliche Geraden, welche durch p gehen und deren innerhalb der Kugel S_2 liegenden Stücke die

Länge l_2 besitzen, Erzeugenden jenes Kegels sein werden, welcher der Kugel s_2 aus dem Scheitel p umschrieben ist.

Diese eben angeführten Kegel haben im allgemeinen zwei Erzeugenden gemeinschaftlich, welche man, wie bekannt, vermittelst einer Hilfskugel, die ihren Scheitel in p hat, leicht construieren kann. Besagte Geraden werden offenbar die gesuchten durch p gehenden Geraden darstellen.

Liegen die beiden Kugeln S_1 und S_2 concentrisch, so sind es auch die Kugeln s_1 und s_2; es werden daher in diesem Falle keine gemeinschaftlichen Erzeugenden der Kegel (p, s_1), (p, s_2) vorhanden sein.

§. 434.

77. Aufgabe. **Parallel zu einer Geraden ist eine zweite Gerade zu finden, welche in zwei gegebenen Kugeln Abschnitte von gegebenen Längen besitzt.**

Die beiden gegebenen Kugeln seien S_1 und S_2, deren Radien beziehungsweise R_1 und R_2, ferner seien l_1 und l_2 die gegebenen Strecken und g die gegebene Gerade.

Construieren wir zunächst eine mit S_1 concentrische Kugel s_1 mit dem Radius $\sqrt{R_1^2 - \frac{1}{4} l_1^2}$ und weiters eine mit S_2 concentrische Kugel s_2 von dem Radius $\sqrt{R_2^2 - \frac{1}{4} l_2^2}$.

Jede Tangente von s_1 hat in der Kugel S_1 die Sehnenlänge l_1 und jede Tangente von s_2 in S_2 die Sehnenlänge l_2.

Denkt man sich nun den beiden Kugeln s_1 und s_2, parallel zur gegebenen Geraden g, Cylinder umschrieben, so werden, wie von selbst einleuchtend, die gemeinschaftlichen Erzeugenden dieser Cylinder die Bedingungen der gestellten Aufgabe erfüllen.

Die besagten Erzeugenden werden constructiv wohl am einfachsten folgendermaßen bestimmt. Man zieht durch die Mittelpunkte O_1 und O_2 der gegebenen Kugeln S_1 und S_2 parallele Geraden g_1 und g_2 zu der gegebenen Geraden g. Diese Geraden schneidet man durch eine zu denselben senkrechte Ebene P in den Punkten m_1 und m_2.

Zeichnet man in der eben erwähnten Ebene zwei Kreise K_1 und K_2, welche beziehungsweise die Mittelpunkte m_1 und m_2 und die Radien $\sqrt{R_1^2 - \frac{1}{4} l_1^2}$ und $\sqrt{R_2^2 - \frac{1}{4} l_2^2}$ besitzen, so stellen diese, wie man sich leicht überzeugt, die Schnitte der Ebene P mit den früher genannten zwei Cylindern dar. Zieht man demnach durch die Schnittpunkte a und b dieser beiden Kreise K_1 und K_2 die Geraden G_1 und G_2 parallel zu der Geraden g, so werden diese die gemein-

schaftlichen Erzeugenden beider Cylinder, also die verlangten Geraden darstellen.

§. 435.

78. Aufgabe. Auf einer Geraden l sind drei Punkte a, b und c gegeben; es ist die Gerade l in eine derartige Lage zu bringen, dass der eine Punkt a mit einem gegebenen Punkte A zusammenfalle, während die Punkte b und c auf zwei gegebene Kugeln S_1 und S_2 zu liegen kommen.

Denken wir uns die gegebene Gerade l oder abc mit dem Punkte a nach A verlegt, so kann dieselbe offenbar alle Lagen in dem Strahlenbündel um A herum annehmen; dabei sind aber die Punkte b und c an die Bedingung gebunden, auf den beiden concentrischen Kugeln Σ_b und Σ_c, welche mit den bezüglichen Radien ab und ac aus dem Mittelpunkte A beschrieben werden, zu verbleiben.

Der gestellten Aufgabe gemäß, soll aber der Punkt b auf der gegebenen Kugel S_1 und der Punkt c auf der gegebenen Kugel S_2 liegen. Man erkennt sofort, dass b insbesondere auf dem Schnittkreise K_b der Kugel Σ_b mit der Kugel S_1, und c auf dem Schnittkreise K_c der Kugel Σ_c mit der Kugel S_2 liegen müsse.

Die gestellte Aufgabe reduciert sich somit auf die „durch den Punkt A eine Gerade zu ziehen, welche sowohl den Kreis K_b, als auch den Kreis K_c in einem Punkte schneidet". Besagtes Problem lässt sich hiemit folgendermaßen leicht durchführen.

Verlängert man den geraden Kreiskegel, welcher durch den Kreis K_b geht und als Scheitel den Punkt A besitzt, so schneidet derselbe die Kugel Σ_c in einem Kreise K'_b, der in einer zur Ebene des Kreises K_b parallelen Ebene liegt. Dieser Kreis wird den auf derselben Kugel Σ_c liegenden Kreis K_c in zwei Punkten c_1 und c_2 begegnen, welch letztere nur diejenigen sein können, in welchen die Kugel Σ_c von der Schnittgeraden der Ebenen der beiden Kreise K'_b und K_c getroffen wird.

Zieht man durch A die nach den Punkten c_1 und c_2 gehenden Geraden g_1 und g_2, so sind diese, da c_1 und c_2 dem Kreise K'_b angehören, Erzeugenden des Kegels (A, K_b), welche somit auch den Kreis K_b beziehungsweise in den Punkten b_1 und b_2 treffen werden.

Wie der hier eingeschlagene Weg und das Ergebnis zeigt, werden diese beiden Geraden g_1 und g_2 der gestellten Aufgabe genügen, da dieselben, wie oben verlangt wurde, durch den Punkt A gehen, den Kreis K_b sowohl, als auch den Kreis K_c treffen und mithin die gegebenen Strecken ab und ac von A aus auf den Kugeln S_1 und S_2 bestimmen.

§. 436.

79. Aufgabe. Es sind drei Kugeln S_1, S_2 und S_3, deren Mittelpunkte nicht auf derselben Geraden liegen, sowie eine Gerade g gegeben; man soll parallel zu diesen Geraden eine Gerade derart ziehen, dass das Stück l_{12} derselben, welches zwischen der ersten und der zweiten Kugel, sowie jenes l_{23}, welches zwischen der zweiten und der dritten Kugel liegt, gegebene Längen l_{12} und l_{23} besitze.

Denken wir uns durch die sämmtlichen Punkte der Kugel S_1 parallele Geraden zu g gezogen und von diesen Punkten auf den so geführten Geraden Strecken von der Länge l_{12} in durchwegs gleichem Sinne aufgetragen, so werden die zweiten Endpunkte dieser Strecken auf einer zweiten mit der Kugel S_1 gleich großen Kugel Σ_1 liegen.

Das Gesagte wird unmittelbar klar, wenn man sich die Kugel S_1 parallel zur Geraden g um die Strecke l_{12} verschoben denkt. Selbstverständlich wird dann jeder Punkt derselben einen zu g parallelen Weg von der Länge l_{12} zurücklegen. Diese zweite Kugel (welche einfach durch die äquivalente Verschiebung des Kugelmittelpunktes O_1 graphisch erhalten wird) schneidet die Kugel S_2 in einem Kreise K_{12}. Es ist einleuchtend, dass jede durch die einzelnen Punkte des Schnittkreises parallel zu g gezogene Gerade zwischen den beiden Kugeln S_1 und S_2 die Länge l_{12} haben wird.

Die Geraden, welche die besagte Eigenschaft besitzen, erfüllen mithin einen Cylinder, welcher den Kreis K_{12} als Leitcurve besitzt und dessen Erzeugenden zu der gegebenen Geraden g parallel sind.

Unter den Erzeugenden dieses Cylinders sind nunmehr jene zu bestimmen, welche zwischen S_2 und S_3 die gegebene Länge l_{23} besitzen.

Dies geschieht folgendermaßen. Der Cylinder schneidet, außer dem Kreise K_{12}, die Kugel S_2 (nach Satz 448, Band II) noch in einem zweiten Kreise C_1.

Denken wir uns auf den Cylindererzeugenden von den Punkten des Kreises C_1 die Strecke l_{23} aufgetragen, so bestimmen die Endpunkte dieser Strecken auf dem Cylinder einen zu C_1 parallelen Kreis C_2. Besagter Kreis C_2 schneidet die Kugel S_3 in zwei leicht zu construierenden Punkten d_1 und d_2.

Die durch die ebengenannten Punkte gehenden Cylindererzeugenden g_1 und g_2 treffen den angedeuteten Constructionen zufolge die Kugel S_2 in zwei Punkten c_1 und c_2, welche von d_1 beziehungsweise d_2 die Entfernung l_{23} haben, und ebenso in zwei weiteren Punkten b_1 und b_2, die wiederum von den Schnittpunkten a_1 und a_2 der Geraden g_1 und

g_2 mit der Kugel S_1 die Entfernung l_{12} besitzen. Die beiden letzterwähnten Geraden g_1 und g_2 sind mithin diejenigen, welche der gestellten Aufgabe genügen.

§. 437.

80. Aufgabe. In einer gegebenen Geraden sind Punkte zu bestimmen, deren Abstände von zwei gegebenen Punkten in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Um diese Aufgabe zu lösen, untersuchen wir zunächst den geometrischen Ort aller Punkte im Raume, deren Abstände von zwei festen Punkten in einem constanten Verhältnisse stehen.

Seien a und b (Taf. XVI, Fig. 103) die beiden festen Punkte und p irgend ein Punkt, der jedoch nicht auf der Geraden ab liegt.

Die beiden Halbiergeraden $p\pi_1$ und $p\pi_2$ des Winkels apb treffen die Gerade ab in zwei Punkten π_1 und π_2, welche bekanntlich die Eigenschaft besitzen, dass

$$a\pi_1 : b\pi_1 = a\pi_2 : b\pi_2 = ap : bp.$$

Der Winkel $\pi_1 p \pi_2$ ist ein rechter und liegt daher in der Peripherie jenes Kreises K, welcher über $\pi_1\pi_2$ als Durchmesser beschrieben wird.

Es ist nun leicht zu zeigen, dass jeder Punkt des Kreises K von a und b Abstände besitzt, die in dem Verhältnisse

$$a\pi_1 : b\pi_1 = a\pi_2 : b\pi_2$$

stehen. Nehmen wir nämlich an, es sei die Strecke ab ursprünglich gegeben und man hätte dieselbe nach einem gegebenen Verhältnisse $\frac{m}{n}$ äußerlich und innerlich durch die Punkte π_2 und π_1 getheilt, d. h. die Punkte π_1 und π_2 so bestimmt, dass

$$a\pi_1 : b\pi_1 = a\pi_2 : b\pi_2 = m : n.$$

Über diesen Punkten π_1 und π_2, als Endpunkt eines Durchmessers, beschreiben wir den Kreis K und nehmen auf diesem einen beliebigen Punkt p an. Verbindet man diesen Punkt p mit a, b, π_1 und π_2, so erhält man, da a, b, π_1, π_2 vier harmonische Punkte sind, vier harmonische Strahlen. Überdies stehen aber zwei conjugierte Strahlen $\pi_1 p$ und $\pi_2 p$ auf einander senkrecht; es müssen daher die beiden anderen Strahlen ap und bp mit denselben gleiche Winkel einschließen, woraus unmittelbar hervorgeht, dass:

$$ap : bp = a\pi_1 : b\pi_1 = a\pi_2 : b\pi_2 = m : n.$$

Diesem Ergebnisse entnehmen wir, dass in der Ebene der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstände von zwei festen

Punkten a und b in einem constanten Verhältnisse stehen, derjenige Kreis K ist, welcher seinen Mittelpunkt auf der Geraden ab hat und durch die beiden Punkte π_1 und π_2 geht, welche die Strecke ab innerlich und äußerlich in dem gegebenen Verhältnisse theilen.

Der geometrische Ort aller Punkte im Raume, deren Abstände von a und b in einem constanten Verhältnisse stehen, ergibt sich sodann als eine Kugel, und zwar als diejenige Kugel, welche der obbezeichnete Kreis bei seiner Umdrehung um ab erzeugt.

Dies ergibt den Satz:

384. „Der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten in einem constanten Verhältnisse stehen, ist eine Kugel, deren Mittelpunkt auf der Verbindungsgeraden der beiden Punkte liegt, und durch jene beiden Punkte geht, welche die Strecke der zwei Punkte innerlich und äußerlich in dem gegebenen Verhältnisse theilen.“

§. 438.

Diesem Satze gemäß ergibt sich folgende Lösung der obgestellten Aufgabe.

Sind (a, a') und (b, b') (Taf. XVI, Fig. 104) die beiden gegebenen Punkte, ist ferner (l, l') die gegebene Gerade und ist das gegebene Verhältnis durch zwei Strecken m und n repräsentiert, so wird man zunächst die wahre Größe der Strecke $(ab, a'b')$, etwa durch Umlegung um ihre Horizontalprojection $a'b'$ nach $a_0 b_0$ bestimmen und hierauf diese Strecke äußerlich und innerlich im Verhältnisse $m:n$ theilen, wobei sich die Punkte π^1_0 und π^2_0 ergeben.

Halbiert man die Strecke $\pi^1_0 \pi^2_0$ im Punkte o_0, so stellt der letztere Punkt den umgelegten Kugelmittelpunkt vor, dessen Projectionen sich in (o, o') ergeben; der Radius der Kugel K ist somit gleich $o_0 \pi^1_0 = o_0 \pi^2_0$.

Ermittelt man nunmehr die Schnittpunkte (p_1, p'_1) und (p_2, p'_2) der Kugel (o, o') mit der Geraden (l, l') (Aufgabe 52 a), so sind dieses bereits die beiden gesuchten Punkte.

Gelegentlich der vorausgeschickten, hierher gehörigen Probleme beschränkten wir uns auf die Beziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen mit gegebenen Kugeln.

Übergehen wir nun auch auf solche Fälle, in welchen die Kugel nicht direct gegeben, sondern erst unter gewissen Bedingungen zu construieren ist, d. h. deren Mittelpunkt und Radius zu bestimmen sind.

§. 439.

81. Aufgabe. **Es ist der Mittelpunkt und der Radius einer Kugel zu bestimmen, welche durch vier gegebene Punkte geht.**

Sind a, b, c und d die vier gegebenen Punkte, so muss der Mittelpunkt O der zu suchenden Kugel eine solche Lage im Raume einnehmen, dass dessen Abstände von den vier Punkten a, b, c, d unter einander gleich sind.

Der geometrische Ort aller Punkte, die von den beiden Punkten a und b gleiche Entfernungen besitzen, ist eine Ebene E_1, welche durch den Halbierungspunkt m_1 von ab geht und auf der Geraden ab senkrecht steht.

In gleicher Weise erhält man als Ort der äquidistanten Punkte von b und c eine Ebene E_2 und als jenen von c und d eine Ebene E_3. Diese drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 schneiden sich in einem Punkte O, welcher von den vier Punkten a, b, c und d eine gleiche Entfernung hat und mithin den Mittelpunkt der gesuchten Kugel darstellen wird.

Wir wollen die vorliegende Aufgabe unter der Voraussetzung constructiv durchführen, dass die Verbindungsgerade zweier der gegebenen Punkte zu einer Projectionsebene parallel sei, da sich unter dieser Annahme einige bemerkenswerte Vereinfachungen in der Construction ergeben.

Seien (a, a'); (b, b'); (c, c') und (d, d') (Taf. XVII, Fig. 105) die vier gegebenen Punkte, wobei wir voraussetzen, dass die Verbindungsgerade $(ab, a'b')$ zur horizontalen Projectionsebene parallel sei.

Der geometrische Ort aller jener Punkte, welche von (a, a') und (b, b') den gleichen Abstand haben, ist die durch den Mittelpunkt (m_1, m'_1) der Strecke $(ab, a'b')$ gehende und zur Geraden $(ab, a'b')$ senkrechte, mithin horizontalprojicierende Ebene $E'_v E'_h$.

Der geometrische Ort aller Punkte, welche von den Punkten (a, a') und (c, c') gleiche Abstände haben, ist jene Ebene E_2, welche durch den Halbierungspunkt (m_2, m'_2) der Strecke $(ac, a'c')$ geht und auf der Geraden $(ac, a'c')$ senkrecht steht. Um den Schnitt dieser Ebene E_2 mit der Ebene $E'_v E'_h$ zu bestimmen, construieren wir im vorliegenden Falle, nicht erst, wie üblich, deren Tracen, sondern verfahren auf folgende besondere Weise.

Wir wissen nämlich, dass die Horizontaltrace der Ebene E_2 senkrecht zu $a'c'$ sein wird. Ziehen wir demnach die Gerade γ'_1 durch m'_2 senkrecht zu $a'c'$, so kann besagte Gerade als die Horizontal-

projection einer in der Ebene E_2 liegenden Geraden betrachtet werden; die Verticalprojection γ_1 derselben ist sodann parallel zur Grundlinie und geht durch den Punkt m_2. Die Horizontalprojection γ'_1 trifft die Horizontaltrace E'_h in einem Punkte α'_1, welcher die horizontale Projection des Durchstoßpunktes (α_1, α'_1) der Geraden (γ_1, γ'_1) mit der Ebene $E'_v E'_h$ repräsentiert.

Weiters ist die Verticaltrace der Ebene E_2 senkrecht auf der Verticalprojection ac; es repräsentiert daher die Gerade, deren Verticalprojection γ_2 senkrecht zu ac ist und durch m_2 geht, in Zusammenhalt mit deren Horizontalprojection γ'_2, die parallel zur Grundlinie durch m'_2 gezogen wird, eine Gerade, welche in der Ebene E_2 liegt. Der Schnittpunkt derselben mit der Ebene $E'_v E'_h$ ergibt sich unmittelbar in (α_2, α'_2). Die Verbindungsgerade (σ_1, σ'_1) der beiden Punkte (α_1, α'_1) und (α_2, α'_2) stellt daher den Schnitt der Ebene $E'_v E'_h$ mit der Ebene E_2 dar.

In gleicher Weise wird man den Schnitt der Ebene $E'_v E'_h$ mit jener Ebene E_3 construieren, welche den geometrischen Ort der von (b, b') und (d, d') gleich weit entfernten Punkte repräsentiert, d. i. jener Ebene, welche durch den Mittelpunkt (m_3, m'_3) der Strecke $(bd, b'd')$ auf dieselbe senkrecht gelegt wird.

Zieht man durch m'_3 die Gerade γ'_3 senkrecht auf $b'd'$ und die Gerade γ_3 durch m_3 parallel zur Grundlinie, so sind (γ_3, γ'_3) die Projectionen einer in der Ebene E_3 liegenden Geraden. Diese Gerade schneidet die Ebene $E'_v E'_h$ in (α_3, α'_3). Endlich sind (γ_4, γ'_4) die Projectionen einer Geraden in der Ebene E_3, wenn γ_4 durch m_3 senkrecht zu bd und γ'_4 durch m'_3 parallel zur Grundlinie gezogen wird. Diese Gerade schneidet die Ebene $E'_v E'_h$ im Punkte (α_4, α'_4). Verbindet man nun (α_3, α'_3) mit (α_4, α'_4) durch die Gerade (σ_2, σ'_2), so repräsentiert diese den Schnitt der Ebene $E'_v E'_h$ mit der Ebene E_3.

Die beiden Geraden (σ_1, σ'_1) und (σ_2, σ'_2) schneiden sich nunmehr in einem Punkte (O, O'), welcher der Schnittpunkt der drei Ebenen $E'_v E'_h$, E_2 und E_3 ist, und mithin von den vier Punkten (a, a'); (b, b'); (c, c') und (d, d') gleich weit entfernt ist, d. h. (O, O') ist der Mittelpunkt der durch die vier Punkte (a, a'); (b, b'); (c, c'); (d, d') gehenden Kugel.

Der Radius R dieser Kugel lässt sich in seiner wahren Größe leicht ermitteln, und zwar kann derselbe direct durch die Angabe der wahren Größe des Abstandes des Punktes (O, O') von einem der vier gegebenen Punkte dargestellt werden.

§. 440.

82. Aufgabe. Durch drei gegebene Punkte ist eine Kugel von bestimmtem Radius zu legen.

Diese Aufgabe kann auf mehrfache Weise gelöst werden. Seien a, b, c die drei gegebenen Punkte, R der gegebene Kugelradius, und setzen wir voraus, der Mittelpunkt der gesuchten Kugel sei O; so ist offenbar $a\,O = b\,O = c\,O = R$; d. h. der Mittelpunkt der gegebenen Kugel muss gleichzeitig auf drei Kugeln liegen, welche beziehungsweise die Punkte a, b und c zu Mittelpunkten haben, während jede derselben die gegebene Strecke R als Radius besitzt. Jeder dieser beiden Schnittpunkte der drei so erhaltenen Kugeln kann sodann als Mittelpunkt der verlangten Kugel betrachtet werden.

Es gibt sonach zwei Kugeln von der gesuchten Eigenschaft.

§. 441.

Zweite Lösung. Denken wir uns durch die drei Punkte a, b, c eine Ebene e gelegt, und in derselben jenen Kreis K gezeichnet, welcher durch die drei Punkte a, b, c geht. Der Mittelpunkt dieses Kreises sei o. Zieht man durch denselben die Gerade $o\,z$ senkrecht zur Ebene e, so ist leicht nachzuweisen, dass jeder Punkt dieser Geraden oz von den drei Punkten a, b, c gleich weit entfernt ist.

Nehmen wir nämlich einen beliebigen Punkt p auf $o\,z$ an und verbinden wir sowohl p als auch o mit den drei Punkten a, b und c, so entstehen drei bei o rechtwinklige Dreiecke $p\,o\,a$, $p\,o\,b$ und $p\,o\,c$. Diese Dreiecke haben die eine Kathete $p\,o$ gemeinschaftlich, während die drei anderen Katheten $o\,a$, ob und oc als Radien des Kreises K einander gleich sind. Besagte Dreiecke poa, pob und poc sind mithin congruent; es müssen daher auch ihre Hypotenusen $p\,a$, $p\,b$ und pc einander gleich sein. Dasselbe gilt von jedem anderen Punkte p auf der Geraden $o\,z$.

Hiernach wird es sich bloß darum handeln, auf der Geraden $o\,z$ jenen Punkt O zu bestimmen, dessen Entfernung von einem der drei Punkte a, b, c dem gegebenen Kugelradius R gleich ist. Zu diesem Zwecke denkt man sich durch die Gerade $o\,z$ und durch einen der Punkte, etwa durch a, eine Ebene geführt und diese Ebene in die Projectionsebene umgelegt. Der umgelegte Punkt heiße a_0 und die umgelegte Gerade $o_0\,z_0$. Durchschneidet man nun mittelst eines Kreisbogens aus dem Mittelpunkte a_0, mit dem Radius R die Gerade $o_0\,z_0$ in den beiden Punkten O_0 und O'_0, so bestimmen diese, in die Projectionen nach O und O' zurückgeführt, die Mittelpunkte der beiden Kugeln, welche der vorstehenden Aufgabe entsprechen.

§. 442.

83. Aufgabe. **Durch zwei gegebene Punkte ist eine Kugel von gegebenem Radius zu legen, welche nebstbei eine gegebene Ebene berührt.**

Seien a und b die beiden gegebenen Punkte, R der gegebene Kugelradius und e die gegebene Ebene.

Vor allem ist klar, dass der Kugelmittelpunkt O in jener Ebene ε_1 liegen werde, welche durch den Mittelpunkt m der Strecke ab auf dieselbe senkrecht gelegt wird. Weiters ist bekannt, dass das Perpendikel vom Kugelmittelpunkte auf eine Berührebene der Kugel dem Kugelradius gleich ist.

Nachdem aber die Ebene e eine Berührebene der Kugel sein soll, so wird überdies der Mittelpunkt O der Kugel diesfalls auch in einer der beiden Ebenen ε_2 und ε'_2 liegen müssen, welche von e den Abstand R besitzen. Dieser Kugelmittelpunkt O wird demnach in einer der beiden Geraden g_1 und g_2 liegen, in welchen die Ebene ε_1 die Ebenen ε_2 und ε'_2 schneidet.

Da die Kugel den Radius R besitzen soll, so wird ihr Mittelpunkt O von einem der beiden gegebenen Punkte, beispielsweise von a, um die Strecke R entfernt sein. Man wird hiernach auf dieselbe Weise, wie in der vorhergehenden Aufgabe, zwei verschiedene Lagen des Kugelmittelpunktes O erhalten, wenn man mit einem Radius gleich R aus a die eine der beiden Geraden g_1 und g_2 durchschneidet. Die zweite Gerade liefert ebenfalls zwei Lösungen, so dass sich im allgemeinen deren vier ergeben.

§. 443.

84. Aufgabe. **Es ist eine Kugel zu bestimmen, deren Radius einer gegebenen Strecke gleich kömmt, und welche drei gegebene Ebenen berührt.**

Denkt man sich zu einer der drei gegebenen Ebenen E_1, E_2 und E_3 eine parallele Ebene e_1 im Abstande R gelegt, so wird der Kugelmittelpunkt O in dieser Ebene liegen müssen. Wiederholt man die gleiche Operation mit den beiden noch übrigen Ebenen E_2 und E_3, so erhält man in gleicher Weise die Ebenen e_2 und e_3. Die drei Ebenen e_1, e_2 und e_3 schneiden sich in einem Punkte O, welcher von den drei gegebenen Ebenen den Abstand R hat, und somit den Mittelpunkt der gesuchten Kugel darstellt.

Berücksichtigt man weiters, dass zu jeder Ebene E zwei Parallelebenen e und e' in einem beliebig gegebenen Abstande gelegt werden

können, so erhellt, dass man sechs Ebenen und hiemit acht Kugelmittelpunkte finde, welche der gestellten Aufgabe Genüge leisten werden.

§. 444.

85. Aufgabe. Es ist eine Kugel zu construieren, welche einen gegebenen Radius besitzt und drei gegebene Kugeln berührt.

Seien S_1, S_2 und S_3 die drei gegebenen Kugeln; O_1, O_2 und O_3 die Mittelpunkte und R_1, R_2 und R_3 die Radien derselben.

Setzen wir voraus, die gesuchte Kugel Σ hätte den Mittelpunkt M und den (gegebenen) Radius R. Da diese Kugel Σ_1 die Kugel S_1 in einem Punkte a_1, der bekanntlich auf der Verbindungsgeraden der Kugelmittelpunkte M und O_1 liegen muss, berühren soll, so ist:

$$MO_1 = Ma_1 + a_1 O_1 = R + R_1.$$

Hieraus folgt, dass die Bedingung: „eine Kugel Σ vom Radius R solle eine Kugel S_1 vom Radius R_1 berühren", gleichwertig ist mit der Bedingung, dass der Mittelpunkt M der Kugel Σ auf einer mit der gegebenen Kugel S_1 concentrischen Kugel s_1 vom Radius $\varrho = R_1 + R$ liegen müsse.

Sollte die Berührung eine „innere" sein, so findet man auf dieselbe Weise, dass der Radius r der concentrischen Kugel s'_1 gleich $R_1 - R$ sein müsse.

Die gleichlautende Bedingung erhält man bezüglich der beiden anderen gegebenen Kugeln S_2 und S_3.

Der Mittelpunkt M der gesuchten Kugel wird auf einer mit S_2 concentrischen Kugel s_2, von dem Radius $R_2 + R$, oder auf einer mit S_2 concentrischen Kugel s'_2 vom Radius $R_2 - R$ liegen, und sich endlich auch auf einer der beiden Kugeln s_3 oder s'_3 vorfinden, welche mit S_3 concentrisch sind, und beziehungsweise die Radien $R_3 + R$ oder $R_3 - R$ besitzen.

Die eben angeführten drei Paare von Kugeln s ergeben im ganzen sechszehn Schnittpunkte, welche (im allgemeinen theilweise imaginär) die sechszehn verschiedenen Lagen des Mittelpunktes der gesuchten Kugel darstellen.

§. 445.

Die Bedingungen, dass eine Kugel von gegebenem Radius *a)* durch einen gegebenen Punkt gehe, *b)* eine gegebene Ebene berühre, und *c)* eine gegebene Kugel berühre, können selbstverständlich in verschiedener Weise combiniert werden, wodurch beispielsweise folgende Aufgaben entstehen, mit deren bloßer Anführung wir uns jedoch zufriedenstellen wollen, da sich alle auf analoge Weise als bloße Schnitt-

aufgaben von Kugeln mit Ebenen und untereinander darstellen. Bei jeder dieser Aufgaben werden wir gleichzeitig die Zahl der im allgemeinen möglichen (reellen und imaginären) Kugeln anfügen.

86. Aufgabe. Es ist eine Kugel von gegebenem Radius zu bestimmen, welche durch zwei Punkte geht und eine Ebene berührt. (Vier Lösungen.)

87. Aufgabe. Es ist eine Kugel von gegebenem Radius zu construieren, welche durch einen Punkt geht, und zwei gegebene Ebenen berührt. (Acht Lösungen.)

88. Aufgabe. Es ist eine Kugel von gegebenem Radius zu bestimmen, welche durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Kugel berührt. (Vier Lösungen.)

89. Aufgabe. Es ist eine Kugel von gegebenem Radius zu construieren, welche durch einen bestimmten Punkt geht, eine gegebene Ebene und eine gegebene Kugel berührt. (Acht Lösungen.)

90. Aufgabe. Es ist eine Kugel von gegebenem Radius zu construieren, welche durch einen bestimmten Punkt geht, und zwei gegebene Kugeln berührt. (Acht Lösungen.)

91. Aufgabe. Es ist eine Kugel von bestimmtem Radius zu construieren, welche zwei gegebene Ebenen und eine gegebene Kugel berührt. (Sechzehn Lösungen.)

92. Aufgabe. Es ist eine Kugel von bestimmtem Radius zu construieren, welche eine gegebene Ebene und zwei gegebene Kugeln berührt. (Sechzehn Lösungen.)

§. 446.

Da es bei jeder dieser angeführten Aufgaben, welche die Construction einer Kugel verlangt, vor allem darauf ankommt, die Lage des Mittelpunktes derselben zu finden, so ist einleuchtend, dass man immer trachten wird, eine gegebene Bedingung auf eine solche zurückzuführen, welche die Lage des Mittelpunktes betrifft.

Eine der wichtigsten und häufigsten Bedingungen besteht darin, dass die zu construierende Kugel zwei gegebene Ebenen gleichzeitig berühre, d. h. dass ihr Mittelpunkt von den beiden Ebenen einen gleichen Abstand besitze.

Es bedarf wohl keines besonderen Beweises, dass in diesem Falle der Mittelpunkt der gesuchten Kugel in einer von denjenigen beiden Ebenen liegen müsse, welche die Winkel, die von den gegebenen Ebenen

gebildet werden, halbieren; denn diese winkelhalbierenden Ebenen sind bekanntlich die beiden geometrischen Orte aller jener Punkte, welchen von den gegebenen zwei Ebenen gleiche Abstände entsprechen.

Das eben Angedeutete im Auge behaltend, sind wir ohneweiters in den Stand gesetzt, eine beträchtliche Anzahl von Berührungsaufgaben zu lösen. In den meisten Fällen wird es jedoch auch hier genügen, die Auflösung dem Principe nach festzustellen, da sich die graphische Durchführung auf bereits vorausgeschickte und daher bekannte Fundamental-Constructionen reduciert.

§. 447.

93. Aufgabe. Es ist eine Kugel zu construieren, welche zwei gegebene Ebenen berührt, die Berührung mit der einen jedoch in einem bestimmten Punkte erfolgt.

Seien E_1 und E_2 die beiden gegebenen Ebenen, und a_1 der in E_1 gegebene Berührungspunkt.

Auf Grund vorhergegangener Erörterungen muss der Mittelpunkt der zu suchenden Kugel in einer der beiden Ebenen H_1 und H_2 liegen, welche die von E_1 und E_2 gebildeten Supplementwinkel halbieren.

Berücksichtigt man jedoch, dass die Verbindungsgerade des Kugelmittelpunktes mit dem Berührungspunkte einer Ebene auf der letzteren senkrecht stehen müsse, so folgt unmittelbar, dass der gesuchte Mittelpunkt gleichzeitig auf jener Geraden liege, welche durch den gegebenen Berührungspunkt a_1 normal zur Berührebene E_1 gezogen wird. Diese Gerade schneidet die beiden Winkelhalbierebenen H_1 und H_2 in zwei Punkten, deren jeder als Mittelpunkt der gesuchten Kugel betrachtet werden kann. Der Radius dieser Kugel ist dem Abstande des betreffenden Mittelpunktes von dem Berührungspunkte a_1 gleich.

§. 448.

94. Aufgabe. Es ist eine Kugel zu bestimmen, welche eine gegebene Kugel und eine gegebene Ebene berührt, mit der ersteren aber die Berührung in einem gegebenen Punkte eingeht.

Die gegebene Kugel sei S, der auf ihr gegebene Berührungspunkt sei a_1, während E die gegebene Ebene darstelle.

Berücksichtigt man, dass die gesuchte Kugel, wenn sie die Kugel S im Punkte a_1 berühren soll, auch die Tangentialebene E_1 derselben in dem nämlichen Punkte a_1 berühren muss, so erhellt, dass die gestellte Aufgabe im Vergleiche mit der vorhergehenden keine Verschiedenheit darbiete. Auch diesfalls sind zwei Lösungen möglich.

§. 449.

95. Aufgabe. **Es ist eine Kugel zu bestimmen, welche durch einen gegebenen Punkt a geht, und eine Ebene e in einem gegebenen Punkte α berührt.**

Der Mittelpunkt der zu bestimmenden Kugel muss einerseits in der Geraden liegen, welche durch den Berührungspunkt α senkrecht zur Berührebene e gezogen wird, andererseits aber, da die Kugel durch die beiden Punkte a und α gehen soll, in derjenigen Ebene sich vorfinden, welche den geometrischen Ort der von a und α äquidistanten Punkte darstellt, d. i. in der Ebene liegen, welche im Mittelpunkt der Strecke $a\alpha$ auf dieselbe senkrecht geführt wird.

Der Schnittpunkt dieser Ebene mit der vorgenannten Geraden ist der Mittelpunkt der gesuchten Kugel. Gleichzeitig ist zu ersehen, dass der vorliegenden Aufgabe nur eine einzige Kugel entspricht.

Auf die vorstehende Aufgabe gestützt, lässt sich auch die folgende ohne Schwierigkeit lösen, beziehungsweise auf dieselbe zurückführen.

§. 450.

96. Aufgabe. **Es ist eine Kugel zu construieren, welche eine gegebene Kugel und eine gegebene Ebene, die letztere aber in einem bestimmten Punkte berührt.**

Ist S (Taf. XVII, Fig. 106) die gegebene Kugel, E die gegebene Ebene und a der Berührungspunkt in derselben, so ist vor allem einleuchtend, dass der Mittelpunkt der gesuchten Kugel wieder in der Geraden liegen wird, welche in dem Punkte a senkrecht auf die Ebene E gezogen werden kann.

Der Berührungspunkt der gesuchten Kugel Σ mit der gegebenen Kugel S muss nothwendig auf jenem größten Kreise der gegebenen Kugel S liegen, in welchem die letztere von der durch die vorgenannte Senkrechte geführten Diametralebene geschnitten wird, da die Verbindungsgerade der beiden Mittelpunkte, folglich auch der Berührungspunkt, in dieser Ebene liegen muss.

Stellen wir uns nun vor, es sei Σ die gesuchte Kugel, M ihr Mittelpunkt und p deren Berührungspunkt mit der Kugel S, so werden selbstverständlich die drei Punkte M, p und O in einer und derselben Geraden liegen müssen.

Denken wir uns aus dem Mittelpunkte M der zu bestimmenden Kugel Σ eine zweite Kugel Σ' beschrieben, welche gleichzeitig durch den Mittelpunkt O der gegebenen Kugel S geht. Der Radius dieser letztgenannten Kugel Σ' ist sodann offenbar um den Radius Op der gegebenen Kugel größer, als der Radius der verlangten Kugel Σ.

Verlängern wir daher die Gerade Ma, bis sie die Kugel Σ' in einem Punkt α trifft, so wird die Berührebene e der Kugel Σ', in diesem Punkte α zur Ebene E parallel sein und von derselben einen Abstand $a\alpha$ besitzen, welcher dem Radius der gegebenen Kugel S gleich ist.

Ist man demnach in der Lage die Kugel Σ' construieren zu können, so ist offenbar auch die Aufgabe selbst schon gelöst, da sie den nämlichen Mittelpunkt M, wie die gesuchte Kugel besitzt. Letzteres ist aber in der That möglich.

Es genügt diesbezüglich auf der Geraden aM, welche senkrecht zu der gegebenen Ebene E gezogen wurde, von dem Punkte a aus nach der einen oder nach der anderen Seite hin eine dem Radius der gegebenen Kugel S gleiche Strecke $a\alpha$ aufzutragen.

Construiert man nun auf $a\alpha$ den Mittelpunkt M einer Kugel Σ', welche durch die beiden Punkte α und O geht, d. h. bestimmen wir den Schnittpunkt der Geraden $a\alpha$ mit jener Ebene, welche durch den Mittelpunkt der Strecke αO geht und zu derselben normal steht, so repräsentiert dieser Punkt M, der vorher angestellten Betrachtung gemäß, auch den Mittelpunkt der gesuchten Kugel.

Je nachdem man die Strecke $a\alpha$ nach der einen oder der anderen Seite von aM aufträgt, erhält man beziehungsweise einen Punkt M oder einen Punkt M'; die Bedingungen der Aufgabe werden somit durch zwei verschiedene Kugeln erfüllt.

§. 451.

Zweite Auflösung. Diese Lösung beruht auf der Eigenschaft, dass der Berührungspunkt zweier Kugeln gleichzeitig ein Ähnlichkeitspunkt derselben sei, und dass die Endpunkte paralleler Radien stets auf einer durch einen Ähnlichkeitspunkt gehenden Geraden liegen müssen.

Sei wieder S (Taf. XVII, Fig. 106) die gegebene Kugel und O deren Mittelpunkt; ferner sei E die gegebene Ebene und a der Berührungspunkt der zu suchenden Kugel Σ mit derselben.

Beachten wir also, dass der Berührungspunkt p der gegebenen Kugel S mit der zu bestimmenden Kugel Σ ein Ähnlichkeitspunkt beider sei, so ergibt sich für p nachstehende einfache Construction.

Die Senkrechte auf die Berührebene E im Punkte a stellt einen Radius der verlangten Kugel Σ dar, dessen Endpunkt a selbst ist. Ziehen wir durch den Mittelpunkt O der gegebenen Kugel S eine Senkrechte $a_1\, a'_1$ auf die Ebene E, d. i. den zu Ma parallelen Durchmesser, dessen Endpunkte a_1 und a'_1 sind, so kann man a und a_1 als zwei ähnlich gelegene Punkte der beiden Kugeln S und Σ betrachten.

Die Verbindungsgerade $a\,a_1$ muss den Ähnlichkeitspunkt dieser Kugeln enthalten und da dieser als Berührungspunkt beider Kugeln S und Σ gleichzeitig der Kugel S angehören muss, so kann es offenbar nur der Schnittpunkt p der Kugel S mit dem Ähnlichkeitsstrahle $a\,a_1$ sein. Der Mittelpunkt M der gesuchten Kugel Σ ergibt sich sodann unmittelbar als Schnittpunkt der Geraden $M a$ mit der Geraden $O p$.

Mit derselben Berechtigung kann man aber auch die Punkte a und a'_1 als ähnlich liegende Punkte beider Kugeln betrachten. Es ergibt sich sodann der Ähnlichkeitspunkt p' als Schnittpunkt der Kugel S mit dem Ähnlichkeitsstrahle $a\,a'_1$. Bezeichneter Punkt ist gleichzeitig der Berührungspunkt einer zweiten Kugel Σ', deren Mittelpunkt M' sich im Schnitte der beiden Geraden $M'\,a$ und $p'O$ ergibt.

§. 452.

97. Aufgabe. **Es ist eine Kugel zu construieren, welche durch zwei gegebene Punkte geht, und zwei gegebene Ebenen berührt.**

Wählen wir die eine der beiden gegebenen Ebenen, beziehungsweise E_1 als die horizontale Projectionsebene, und nehmen wir als die verticale Projectionsebene diejenige an, welche zu der zweiten gegebenen Ebene E_2 senkrecht steht. Dies vorausgesetzt stellt sich die Ebene E_2 als eine verticalprojicierende Ebene $E^2_v\,E^2_h$ (Taf. XVII, Fig. 107) dar. Die Projectionen der beiden gegebenen Punkte seien (a, a') und (b, b').

Soll die zu bestimmende Kugel die beiden Ebenen E_1 und E_2, d. h. die horizontale Projectionsebene und die Ebene $E^2_v\,E^2_h$ berühren, so muss ihr Mittelpunkt in einer der Winkelhalbierebenen H dieser beiden Ebenen, u. zw. in derjenigen liegen, welche in demselben Winkelraume von E_1 und E_2 fällt, in welchem sich die Punkte a und b vorfinden.

Befinden sich die Punkte a und b in verschiedenen Winkelräumen, so ist, wie unschwer einzusehen, die Aufgabe absolut unmöglich, da eine jede, wie immer durch a und b gelegte Kugel die beiden Ebenen E_1 und E_2 stets schneiden muss.

Obbezeichnete Ebene H stellt sich diesfalls selbstverständlich auch als eine verticalprojicierende Ebene $H_v\,H_h$ dar. Ferner muss der Mittelpunkt der gesuchten Kugel gleichzeitig in jener Ebene e liegen, welche durch den Mittelpunkt (m, m') der Strecke $(a\,b,\ a'\,b')$ auf diese selbst senkrecht errichtet wird, mithin im Schnitte der beiden Ebenen e und H. Dieser Schnitt kann, ohne erst die Tracen der Ebene e zu bestimmen, leicht folgendermaßen ermittelt werden.

Da die Horizontaltrace der Ebene e senkrecht zu der Horizontalprojection $a'\,b'$ steht, ist die Gerade γ'_1 welche durch m' senkrecht

auf $a'b'$ gezogen wird, die Horizontalprojection einer in der Ebene e liegenden Geraden, deren Verticalprojection γ_1 durch m parallel zur Grundlinie läuft. Besagte Gerade (γ_1, γ_1') trifft die Ebene $H_v H_h$ in einem Punkte (α_1, α'_1) des gesuchten Schnittes.

Ziehen wir ferner die Gerade γ_2 durch m senkrecht zu ab und γ'_2 durch m' parallel zur Grundlinie, so repräsentieren, aus analogen Gründen, auch γ_2 und γ'_2 die Projectionen einer in der Ebene e liegenden Geraden. Der Punkt (α_2, α'_2), in welchem diese Gerade (γ_2, γ'_2) die Ebene $H_v H_h$ trifft, ist ein zweiter Punkt des verlangten Schnittes. Mithin erhalten wir in der Verbindungsgeraden der beiden Punkte (α_1, α'_1) und (α_2, α'_2) die Schnittgerade (σ, σ') der beiden Ebenen $H_v H_h$ und e dargestellt. In dieser Geraden muss der Mittelpunkt der gesuchten Kugel liegen.

Berücksichtigt man ferner, dass der Berührungspunkt einer Ebene mit einer Kugel der Fußpunkt der von dem Kugelmittelpunkte auf die Berührebene gefällten Senkrechten ist, so ergibt sich sofort, dass im vorliegenden Falle, weil der Mittelpunkt der Kugel auf der Geraden (σ, σ') liegen muss, der Berührungspunkt (p, p') der Kugel mit der Ebene E, d. i. mit der horizontalen Projectionsebene, nothwendig in der Horizontalprojection σ' der genannten Geraden liegen müsse.

Bestimmen wir den horizontalen Durchstoßpunkt (h, h') der Geraden $(ab, a'b')$, so ist die Potenz dieses Punktes in Bezug auf die zu suchende Kugel vermöge des Punktepaares (a, a') und (b, b') vollkommen bestimmt. Wir können dieselbe leicht feststellen, wenn wir die wahre Größe der Strecken $(ah, a'h')$ und $(bh, b'h')$ ermitteln. — Letzteres kann einfach durch Umlegung der Geraden $(ab, a'b')$ um ihre Horizontalprojection nach $h' a_0 b_0$ bewirkt werden.

Die Potenz stellt sich sodann als das Product $a_0 h' . b_0 h'$ dar. Legt man nun durch die beiden Punkte a_0 und b_0 einen beliebigen Kreis K_0, und zieht an denselben von h' aus die Tangente $h'r$, so ist bekanntlich

$$h' a_0 . h' b_0 = h' r^2.$$

Die Strecke $h'r$ repräsentiert die Quadratwurzel aus der Potenz des Punktes h' in Bezug auf die gesuchte Kugel, und als solche bekanntlich (Satz 149) auch die Länge aller von h' aus an diese Kugel gezogenen Tangenten.

Nun liegt aber h' in der horizontalen Projectionsebene, welche diesfalls von der Kugel in einem erst zu bestimmenden Punkte (p, p') berührt werden soll; es wird daher die Gerade $h'p'$ eine Tangente der Kugel sein. Hieraus folgt aber, dass dieser Berührungspunkt p' auf

jenem Kreise K' liegen muss, welcher aus dem Mittelpunkte h' mit dem Radius $h'r$ beschrieben wird. Nachdem weiters der Berührungspunkt p' auch in der Geraden σ' liegen muss, so ergibt sich derselbe als Schnittpunkt der Geraden σ' mit dem Kreise K'. Die Senkrechte aus p' auf die Horizontalebene trifft die Gerade (σ, σ') in dem Mittelpunkte (O, O') der verlangten Kugel.

Da sich überdies K' und σ' in zwei Punkten p' und p'_1 treffen, so lässt die gestellte Aufgabe zwei Lösungen zu.

§. 453.

98. Aufgabe. **Es ist eine Kugel zu construieren, welche vier gegebene Ebenen berührt, oder mit anderen Worten: einem gegebenen Tetraeder ist eine Kugel einzuschreiben.**

Seien e_1, e_2, e_3 und e_4 die vier Seitenebenen des Tetraeders.

Der Mittelpunkt der gesuchten Kugel ist jener Punkt, der von diesen vier Ebenen einen gleichen Abstand besitzt. Als solcher muss der besagte Punkt in jenen Ebenen liegen, welche die Winkel der vier gegebenen Ebenen paarweise halbieren.

Denken wir uns einen der beiden Winkel, welchen die Ebenen e_1 und e_2 einschließen, durch eine Ebene h_{12} halbiert, so stellt diese den geometrischen Ort aller Punkte vor, die von den beiden Ebenen e_1 und e_2 den gleichen Abstand besitzen.

Halbieren wir ferner einen der Winkel, welchen die Ebenen e_2 und e_3 einschließen, durch eine Ebene h_{23}, und weiters den Winkel, welchen die Ebenen e_3 und e_4 bilden, durch eine Ebene h_{34}, so sind h_{23} und h_{34} geometrische Orte für jene Punkte, welche von den Ebenen e_2 und e_3, resp. von den Ebenen e_3 und e_4 gleiche Abstände besitzen. Diese drei Ebenen h_{12}, h_{23}, h_{34} schneiden sich in einem Punkte O.

Seien Oa_1, Oa_2, Oa_3 und Oa_4 die betreffenden Abstände dieses Punktes von den Ebenen e_1, e_2, e_3 und e_4, so folgt aus dem Umstande, dass O in der Ebene h_{12} liegt, $Oa_1 = Oa_2$; da O in der Ebene h_{23} liegt, wird $Oa_2 = Oa_3$, und da O auch in der Ebene h_{34} liegt, muss $Oa_3 = Oa_4$, also überhaupt $Oa_1 = Oa_2 = Oa_3 = Oa_4$ sein.

Hieraus ergibt sich aber sofort, dass der Punkt O auch noch in anderweitigen Halbierebenen liegen werde. Da nämlich $Oa_1 = Oa_4$ ist, so liegt O auch in einer der beiden Halbierebenen h_{14} des von den Ebenen e_1 und e_4 gebildeten Winkels. Ebenso findet man, dass O infolge der Gleichheit von $Oa_1 = Oa_3$ und $Oa_2 = Oa_4$ in den Ebenen h_{13}, h_{24} liege, welche die Winkel der Ebenenpaare e_1 und e_3, beziehungsweise e_2 und e_4 halbieren. Hiernach erhellt, dass durch den

Punkt O sechs verschiedene Winkelhalbierebenen h_{12}, h_{13}, h_{14}, h_{23}, h_{24} und h_{34} führen.

Es existieren aber noch sechs weitere Halbierebenen, h'_{12}, h'_{13}, h'_{14}, h'_{23}, h'_{24} und h'_{34}, d. s. jene, welche die Supplementwinkel der früheren Winkel halbieren. Diese zwölf Ebenen schneiden sich in einer Zahl von Punkten, welche durchgehends dieselbe Natur wie der Punkt O haben. Es wird sich nun zunächst darum handeln, die Zahl dieser Schnittpunkte zu ermitteln.

Zu diesem Zwecke denken wir uns den vier Ebenen alle möglichen Kugeln S_1, S_2, S_3... eingeschrieben; die Mittelpunkte derselben seien beziehungsweise O_1, O_2, O_3....

Vor allem ist einleuchtend, dass in dem Raume der vier Ebenen e_1, e_2, e_3 und e_4, in welchem die Kugel S_1 liegt, auch nur diese Kugel allein und nicht zugleich eine zweite Kugel liegen könne.

Combinieren wir die sämmtlichen vier Ebenen auf alle möglichen Weisen zu Räumen, so wird die Zahl dieser Räume jenen der eingeschriebenen Kugeln gleich sein.

Denken wir uns weiters die vier Ebenen sammt den x Kugeln so transformiert, dass die eine e_4 dieser Ebenen in's Unendliche falle, so werden die drei Ebenen e_1, e_2 und e_3 in drei weitere Ebenen e'_1, e'_2 und e'_3, die x Kugeln aber in x Paraboloide übergehen, deren jedes die drei Ebenen e'_1, e'_2 und e'_3 berühren wird, wobei aber offenbar wieder in keinem der durch die drei Ebenen e'_1, e'_2 und e'_3 bestimmten unendlichen Räume mehr als ein Paraboloid liegen kann.

Die Zahl dieser Räume, also auch jene der Paraboloide ist aber bekanntlich gleich acht (man erinnere sich an die acht Projectionsräume der orthogonalen Projectionsmethode), woraus weiter hervorgeht, dass auch die Anzahl der einem Tetraeder eingeschriebenen Kugeln nicht größer als acht sein könne.

§. 454.

99. Aufgabe. **Es ist eine Kugel zu construieren, welche durch einen gegebenen Punkt geht und drei gegebene Ebenen berührt.**

Seien e_1, e_2 und e_3 die drei gegebenen Ebenen und a der gegebene Punkt.

Vor allem ist einleuchtend, dass die Kugel, also auch deren Mittelpunkt nur in jenen von den acht körperlichen Ecken, welche die drei Ebenen e_1, e_2 und e_3 bestimmen, liegen könne, in welchem sich der gegebene Punkt a befindet. Der Mittelpunkt der Kugel heiße M.

Da die Kugel S die Ebenen e_1 und e_2 berühren soll, so muss ihr Mittelpunkt M in der Ebene h_{12}, welche den Winkel der Ebenen e_1 und e_2 halbiert, liegen. Ferner muss M, da die Kugel auch die Ebene e_3 zu berühren hat, in der Winkelhalbierebene h_{23} der Ebenen e_2 und e_3 sich vorfinden.

Diese beiden Winkelhalbierebenen werden sich in einer Geraden g schneiden, welche offenbar durch den Schnittpunkt A der drei gegebenen Ebenen e_1, e_2 und e_3 gehen wird, nachdem jede der beiden Winkelhalbierebenen h_{12} und h_{23} durch diesen Punkt führt.

Jeder Punkt der Geraden g hat gleiche Abstände von e_1 und e_2; ebenso von e_2 und e_3 und infolge dessen auch von e_3 und e_1; die Gerade g liegt also auch in der Halbierebene des von den Ebenen e_3 und e_1 gebildeten Winkels.

Auf dieser Geraden muss selbstverständlich der Mittelpunkt M der gesuchten Kugel liegen.

Denken wir uns einen beliebigen Punkt M_1 auf der Geraden g angenommen und zeichnen wir die Kugel S_1, welche diesen Punkt M_1 zum Mittelpunkte hat, gleichzeitig aber auch die drei Ebenen e_1, e_2 und e_3 berührt. Der Radius derselben wird sich als der Abstand des angenommenen Punktes M_1 von einer der drei Ebenen ergeben.

Beachten wir ferner, dass die gesuchte Kugel S und die eben construierte Kugel S_1 die drei Ebenen e_1, e_2 und e_3 als gemeinschaftliche Berührebenen besitzen, so ist klar, dass der Schnittpunkt A der letzteren ein Ähnlichkeitspunkt dieser beiden Kugeln, und zwar der äußere Ähnlichkeitspunkt sein wird, wenn wir die Kugel S_1 in dem nämlichen Raume construieren, in welchem der Punkt a liegt.

Verbinden wir daher A mit dem gegebenen Punkte a durch eine Gerade γ, so repräsentiert diese Verbindungsgerade einen Ähnlichkeitsstrahl. Der letztere wird die Kugel S_1 in zwei Punkten a_1 und a'_1 treffen, von welchen wir einen jeden als mit dem Punkte a ähnlich liegend betrachten können.

Vorausgesetzt, wir wählen a und a_1 als ähnlich liegende Punkte, so müssen die beiden Kugelradien Ma und $M_1 a_1$, welche diesen beiden Punkten entsprechen, unter einander parallel sein. Man wird daher den Mittelpunkt der gesuchten Kugel S als den Schnitt M der Geraden g mit der durch a parallel zu $M_1 a_1$ gezogenen Geraden $M a$ finden.

Betrachtet man a und a'_1 als ähnlich gelegene Punkte der beiden Kugeln S und S_1, so ergibt sich ein zweiter Mittelpunkt M' als Schnitt der Geraden g mit der durch a parallel zu $M_1 a'_1$ gezogenen Geraden. Die Aufgabe gestattet somit zwei Auflösungen.

Auf die vorstehende Aufgabe kann die folgende zurückgeführt werden.

§. 455.

100. Aufgabe. Im Inneren eines geraden Kreiskegels ist ein Punkt gegeben; man soll durch diesen Punkt eine Ebene legen, welche den Kegel nach einer Ellipse derart schneidet, dass der gegebene Punkt den einen Brennpunkt derselben darstellt.

Die kreisförmige Basis (K, K') (Taf. XVII, Fig. 108) des Kegels denken wir uns in der horizontalen Projectionsebene angenommen. (S, S') sei der Scheitel des gegebenen Kegels und (a, a') stelle den gegebenen Brennpunkt der Schnittellipse dar.

Mit Zugrundelegung des Satzes 507, Band II) wird es bloß darauf ankommen, durch den Punkt (a, a') eine dem Kegel eingeschriebene Kugel zu legen, und in dem Punkte (a, a') an diese Kugel eine Berührebene zu führen.

Schreiben wir zu diesem Zwecke dem Kegel eine beliebige Kugel Σ ein, deren Mittelpunkt der willührlich gewählte Punkt (M_1, M'_1) der Kegelachse sein mag. Da der Punkt S ein Ähnlichkeitspunkt der beiden Kugeln sein wird, hat man die zu bestimmende Kugel in der gleichen Weise, wie in der vorhergehenden Aufgabe gezeigt wurde, zu construieren.

Es wird nämlich der Ähnlichkeitsstrahl (Sa, $S'a'$) gezogen und dessen Durchschnittspunkte α und α_1 mit der Kugel S_1 bestimmt. Bezeichnete Punkte α und α_1 ergeben sich direct durch die Drehung des Strahles (Sa, $S'a'$), in der gedrehten Lage in α_0 und α'_0, aus welchen sich unmittelbar α und α_1 ableiten lassen. (Die Horizontalprojectionen α' und α'_1 benöthigt man nicht.)

Führt man durch a die Parallele aM zu $M_1\alpha$, so trifft dieselbe die Kegelachse (SC, $S'C$) in dem gesuchten Kugelmittelpunkte (M, M'). Errichtet man sodann im Punkte (a, a') auf den Kugelradius (Ma, $M'a'$) eine senkrechte Ebene E_v E_h, so repräsentiert diese bereits jene Ebene, welche den gestellten Bedingungen entspricht.

Eine zweite Lage einer derartigen Ebene erhält man, wenn man die Punkte a und α_1 als ähnlich liegende Punkte betrachtet.

§. 456.

101. Aufgabe. Es ist eine Kugel zu construieren, welche zwei gegebene Kugeln berührt, mit der einen jedoch die Berührung in einem bestimmten Punkte eingeht.

Seien (O, O') und (o, o') (Taf. XVII, Fig. 109) die Mittelpunkte der beiden gegebenen Kugeln, (K, K'_1) und (k, k'_1) deren Contouren,

und endlich A die verticale Projection des auf der Kugel (K, K'_1) gegebenen Berührungspunktes.

Um die verlangte Kugel mit Leichtigkeit zu construieren, berufen wir uns auf den Satz 254), mit Zugrundelegung dessen die beiden Punkte, in welchen eine Kugel Σ zwei gegebene Kugeln (O, O') und (o, o') berührt, „invers liegende" Punkte dieser letzteren in Bezug auf den einen oder den anderen der Ähnlichkeitspunkte sind, d. h. solche Punkte auf einem Ähnlichkeitsstrahle darstellen, welche nicht Endpunkte paralleler Kugelradien sind.

Denken wir uns demnach etwa den äußeren Ähnlichkeitspunkt (S, S') der beiden Kugeln (O, O') und (o, o') bestimmt. Die Projectionen derselben sind die Schnittpunkte der äußeren gemeinschaftlichen Tangenten der verticalen Contouren K und k, beziehungsweise der horizontalen Contouren K'_1 und k'_1 beider Kugeln.

Ziehen wir ferner durch den Punkt A die verticale Projection SA des Ähnlichkeitsstrahles, und bestimmen wir dessen Schnittpunkte mit der Kugel (k, k'_1) oder (o, o'). Zu diesem Behufe denken wir uns die beiden Kugeln (O, O') und (o, o') durch die verticalprojicierende Ebene SA nach den beiden Kreisen K_2 und k_2 geschnitten, welche sich, nach der Umlegung um SA, in K^0_2 und k^0_2 ergeben; der umgelegte Punkt A gelangt hiebei nach A_0, fällt also in die auf AS senkrecht stehende Gerade AA_0. Ebenso wird der Ähnlichkeitspunkt S in S_0 zu suchen sein. Führt man den umgelegten Ähnlichkeitsstrahl $S_0 A_0$, so trifft dieser den Kreis k_0 in zwei Punkten, wovon der eine a_0, der dem Punkte A_0 zugeordnete invers liegende Punkt ist.

Führen wir nun die beiden Punkte A_0 und a_0 in die Projection nach (A, A') und (a, a') zurück, so stellt (a, a') den Berührungspunkt der gesuchten Kugel Σ mit der zweiten gegebenen Kugel (o, o') dar.

Da endlich die Mittelpunkte zweier sich berührenden Kugeln und deren Berührungspunkt stets in einer und derselben Geraden liegen müssen, so ergibt sich unmittelbar der Mittelpunkt (M, M') der gesuchten Kugel Σ, als der Schnittpunkt der beiden Geraden $(OA, O'A')$ und $(ao, o'a')$.

Eine zweite der Aufgabe ebenfalls entsprechende Kugel hätte man erhalten, wenn man statt des äußeren Ähnlichkeitspunktes (S, S') der beiden gegebenen Kugeln (O, O') und (o, o') den inneren Ähnlichkeitspunkt (S_1, S'_1) benützt hätte. Der Radius R der Berührungskugel wird, wie bekannt, durch Ermittelung der wahren Größe ($M_0 a_0$ und $M_0 A_0$) aus den beiden diesbezüglichen Projectionen $(M'a', Ma)$ oder $(MA, M'A')$ festgestellt.

§. 457.

102. Aufgabe. Es ist eine Kugel zu construieren, welche durch drei gegebene Punkte (oder was dasselbe ist, durch einen gegebenen Kreis) geht, und eine gegebene Kugel berührt.

Wählen wir die Ebene der drei gegebenen Punkte a, b, c als horizontale Projectionsebene. Hiernach erscheinen die gegebenen Punkte in (a, a'), (b, b') und (c, c') (Taf. XVII, Fig. 110) und die gegebene Kugel durch (O, O') (Mittelpunkt) und (K, K'_1) (Contouren) dargestellt.

Legen wir durch die drei Punkte (a, a'), (b, b'), (c, c') einen Kreis (C, C') und errichten wir in dem Mittelpunkte (m, m') dieses Kreises eine Senkrechte mz auf die horizontale Projectionsebene, so werden in dieser Geraden die Mittelpunkte sämmtlicher Kugeln liegen, welche den Kreis (C, C') also auch die drei Punkte (a, a'), (b, b') und (c, c') enthalten.

Andererseits ist die Horizontalebene die Potenzebene aller durch den Kreis (C, C') gehenden Kugeln.

Legen wir durch den Kreis (C, C') beliebige Kugeln, so werden diese die Kugel (O, O') in Kreisen schneiden, deren Ebenen sämmtlich durch eine und dieselbe in der horizontalen Projectionsebene liegende Gerade, d. i. durch die Verbindungsgerade jener Punkte, in welchen der Kreis (C, C') die Kugel (O, O') schneidet, gehen.

Um diese Gerade zu bestimmen, legen wir durch den Kreis (C, C') eine beliebige Kugel, am einfachsten jene, deren Mittelpunkt (o, o') von der horizontalen Projectionsebene ebensoweit entfernt ist, als der Mittelpunkt (O, O') der gegebenen Kugel von der nämlichen Ebene. Die Ebene des Schnittkreises dieser Kugel (k, k'_1) mit der gegebenen Kugel (O, O') ist in diesem Falle horizontalprojicierend und ergibt sich die Horizontaltrace E_h derselben als Verbindungsgerade jener beiden Punkte α und β, in welchen sich die beiden horizontalen größten Kreise K'_1 und k'_1 schneiden.

Jeder Punkt der Geraden E_h hat die gleiche Potenz in Bezug auf die gegebene Kugel (O, O') und in Bezug auf den Kreis (C, C'); es wird daher jede durch die Horizontaltrace E_h gehende Ebene die Kugel (O, O') in einem Kreise schneiden, durch welchen sich stets eine Kugel legen lässt, welche auch den Kreis (C, C') enthält. Insbesondere lassen sich durch E_h zwei Ebenen legen, welche die Kugel (O, O') in einem Punkte berühren, d. i. in einem Punktkreise oder einem Kreise von verschwindend kleinem Radius schneiden.

Es werden demnach die beiden Kugeln, welche durch den Kreis (C, C') gehen und deren jede einen von den genannten Berührungs-

punkten enthält, die gegebene Kugel (O, O') in diesen Punkten berühren.

Um also endlich den Berührungspunkt einer durch die Gerade E_h gehenden Berührebene zu finden, führen wir zu der Geraden E_h eine senkrechte Diametralebene D und legen, um ihre Horizontaltrace D_h, den in ihr liegenden größten Kreis K_2 nach K^0_2 um.

An K^0_2 durch den Schnittpunkt δ von E_h und D_h eine Tangente δp_0 gezogen, ergibt den umgelegten Berührungspunkt, dessen Projectionen (p, p') leicht zu finden sind.

Die Gerade $(Op, O'p')$ muss bekanntlich den Mittelpunkt einer jeden die Kugel (O, O') in (p, p') berührenden Kugel enthalten. Es ergibt sich daher der Mittelpunkt (M, M') der gesuchten Kugel im Schnitte dieser Geraden mit der Geraden $(mz, m'z')$. Selbstverständlich liefert die zweite Tangente $\delta p'_0$ des Kreises $K_1{}^0$ eine zweite den gestellten Bedingungen entsprechende Kugellage.

Als besonderer Fall des vorhergehenden Problems kann die folgende Aufgabe betrachtet werden.

§. 458.

103. Aufgabe. **Es ist eine Kugel zu construieren, welche durch drei gegebene Punkte geht und eine gegebene Ebene berührt.**

Die gegebene Ebene nehmen wir wieder als horizontale Projectionsebene an, die Ebene der drei gegebenen Punkte sei $E_v E_h$. Die drei gegebenen Punkte in derselben seien (a, a'), (b, b') und (c, c') (Taf. XVII, Fig. 111).

Zunächst legen wir das von den drei gegebenen Punkten (a, a'), (b, b') und (c, c') gebildete Dreieck um die Trace E_h seiner Ebene in die horizontale Projectionsebene nach $a_0 b_0 c_0$ um. In dieser Lage umschreiben wir dem Dreiecke $a_0 b_0 c_0$ den Kreis C_0 und führen den Mittelpunkt m_0 desselben in die Projection nach (m, m') zurück. Wird nun, wie in der vorhergehenden Aufgabe, die Gerade (s, s') geführt, welche man durch (m, m') senkrecht auf die Ebene $E_v E_h$ der gegebenen drei Punkte zieht, so stellt diese den geometrischen Ort aller Punkte dar, welche von den drei gegebenen Punkten (a, a'), (b, b') und (c, c') den gleichen Abstand haben. Die Gerade (s, s') repräsentiert somit den geometrischen Ort der Mittelpunkte der durch die obgenannten Punkte gehenden Kugeln.

Da ferner die horizontale Projectionsebene eine Berührebene der gesuchten Kugel sein soll, so muss der Berührungspunkt (p, p') derselben der Fußpunkt des vom Kugelmittelpunkte auf die horizontale

Projectionsebene gefällten Perpendikels sein. Nachdem aber der Kugelmittelpunkt auf der Geraden (s, s') liegt, so muss der genannte Berührungspunkt mit irgend einem der Horizontalprojection s' angehörenden Punkte zusammenfallen.

Denken wir uns den horizontalen Durchstoßpunkt δ der Geraden $(cb, c'b')$ mit dem, bisher noch unbekannten Berührungspunkte p' verbunden, so muss, da δcb eine Secante der Kugel mit den Abschnitten δc_0, δb_0 (in wahrer Größe) repräsentiert und $\delta p'$ eine Tangente der Kugel darstellt:

$$\overline{\delta p'}^2 = \delta c_0 \,.\, \delta b_0 \text{ sein.}$$

Führt man von δ an den Kreis C_0 die Tangente δr, so ist auch

$$\overline{\delta r}^2 = c_0\delta \,.\, b_0\delta, \text{ und somit } \delta p' = \delta r.$$

Beschreibt man daher aus dem Mittelpunkte δ einen Kreis K' mit dem Radius δr, so schneidet dieser die Gerade s' in zwei Punkten p' und p'_1.

Den vorhergehenden Entwickelungen gemäß, ist jeder dieser beiden Punkte der Berührungspunkt der horizontalen Projectionsebene mit einer durch die drei gegebenen Punkte (a, a'); (b, b') und (c, c') gehenden Kugel. Die Mittelpunkte (M, M') und (M_1, M'_1) der beiden Kugeln haben mit p und p_1 gemeinschaftliche Horizontalprojectionen und können daher, als Punkte, welche gleichzeitig auch der Geraden (s, s') angehören, unmittelbar festgestellt, beziehungsweise durch ihre Projectionen bestimmt werden.

§. 459.

104. Aufgabe. Es ist eine Kugel zu construieren, welche durch zwei gegebene Punkte a und b geht und zwei gegebene Kugeln S_1 und S_2 berührt.

Dass die Berührung einer Kugel, welche die beiden gegebenen Kugeln S_1 und S_2 berührt, nur in zwei derartigen Punkten α_1 und α_2 stattfinden könne, welche in Bezug auf den äußeren oder den inneren Ähnlichkeitspunkt der beiden gegebenen Kugeln invers liegen, ist bereits (Satz 254) nachgewiesen worden.

Nehmen wir beispielsweise den äußeren Ähnlichkeitspunkt A der beiden Kugeln S_1 und S_2 an, so müssen die Berührungspunkte α_1 und α_2 der gesuchten Kugel Σ mit den beiden gegebenen Kugeln S_1 und S_2 auf einer durch A gehenden Geraden liegen.

Weiters ist bekannt, dass das Product $A\alpha_1 \,.\, A\alpha_2$ constant für alle invers liegenden Punktepaare der beiden Kugeln sei. Ferner ist aber auch α_1 und α_2 ein Punktepaar der zu suchenden Kugel Σ; die

Potenz des Punktes A, in Bezug auf die Kugel Σ, ist daher gleich der Inversionspotenz dieses Punktes in Bezug auf die beiden gegebenen Kugeln.

Zieht man demnach einen beliebigen Strahl γ durch A, welcher die beiden Kugeln S_1 und S_2 in dem inversen Punktepaar $\xi_1 \xi_2$ treffen mag (derselbe trifft bekanntlich noch in einem zweiten Paare), so stellt

$$A\xi_1 \, . \, A\xi_2$$

die Inversionspotenz und mithin auch die Potenz des Punktes A in Bezug auf die zu suchende Kugel Σ dar.

Nachdem aber von dieser Kugel zwei Punkte a und b als gegeben vorliegen, wird es auch keinerlei Schwierigkeit bieten, einen dritten Punkt a' derselben zu finden. Zieht man nämlich die Gerade Aa, so trifft diese die zu construierende Kugel Σ zum zweitenmale in einem Punkte a', welcher mit a durch die Potenz

$$Aa \, . \, Aa' = A\xi_1 \, . \, A\xi_2$$

verbunden ist und daher leicht construiert werden kann.

Hiernach ist, wie auf den ersten Blick zu erkennen, das vorliegende Problem auf die Aufgabe 102) zurückgeführt. Denn legt man durch die drei Punkte a, b, a' eine Kugel Σ, welche die Kugel S_1 in einem Punkte α_1 berührt, so wird der Strahl $A\alpha_1$ diese Kugel zum zweitenmale in einem Punkte α_2 treffen und es wird offenbar

$$A\alpha_1 \, . \, A\alpha_2 = Aa \, . \, Aa' = A\xi_1 \, . \, A\xi_2$$

sein. Der Punkt α_2 gehört somit auch der Kugel S_2 an und wird den den beiden Kugeln S_2 und Σ gemeinsamen Berührungspunkt darstellen.

Letzteres kann unmittelbar auch durch folgende Betrachtung klar gelegt werden.

Denken wir uns durch die drei Punkte a, b und a' eine Kugel Σ gelegt, welche die Kugel S_1 berührt, und nehmen wir den Punkt A als Inversionscentrum, das Product

$$A\xi_1 \, . \, A\xi_2 = Aa \, . \, Aa'$$

aber, als Inversionsmodul an, so verwandelt sich einerseits, indem wir uns auf die Sätze 253) und 254) berufen, die Kugel Σ in sich selbst, während andererseits die Kugel S_1 in die Kugel S_2 übergeht.

Berühren sich daher S_1 und Σ, so muss auch zwischen S_2 und Σ die Berührung stattfinden. Nebenbei sei hier noch bemerkt, dass, da einerseits durch die Punkte a, b, a' zwei berührende Kugeln an S_1 gelegt werden können und andererseits der innere Ähnlichkeitspunkt

der beiden Kugeln S_1 und S_2 in gleicher Weise zwei Kugellagen ergibt, vier Kugeln construiert werden können, welche den gestellten Anforderungen entsprechen.

§. 460.

105. Aufgabe. **Es ist eine Kugel zu construieren, welche durch zwei gegebene Punkte m und n geht, eine gegebene Ebene E und eine gegebene Kugel S berührt.**

Auf ganz ähnliche Weise, wie die vorhergehende Aufgabe, d. i. vermittelst des Principes der Transformation durch reciproke Radien, lässt sich auch dieses Problem ohne jedwede Schwierigkeit durchführen.

Ziehen wir vor allem jenen Kugeldurchmesser Aaa_1 der Kugel S, welcher zu der gegebenen Ebene E senkrecht steht. Die Endpunkte desselben seien A und a, und dessen Schnittpunkt mit der Ebene E sei a_1.

Sobald man (Satz 177) den einen Endpunkt, etwa A, als Inversionscentrum annimmt und die beiden Punkte a und a_1 als invers voraussetzt, d. h. das Product $Aa . Aa_1$ als Inversionsmodul betrachtet, wird, wie bekannt, die Kugel S invers in die Ebene E transformiert werden können.

Bestimmen wir nun zu einem der gegebenen zwei Punkte m und n, beispielsweise zu dem Punkte m, den inversen Punkt m_1, d. h. construieren wir m_1 so, dass die Relation

$$Am \, . \, Am_1 = Aa \, . \, Aa_1$$

erfüllt wird, so wird bekanntlich (§. 284) auch jede durch das inverse Punktepaar (m, m_1) gehende Kugel Σ invers in sich selbst transformiert. Dies gilt natürlich auch von derjenigen Kugel Σ, welche nach der in Aufgabe 103) entwickelten Construction durch die drei Punkte m, n, m_1 berührend an die Ebene E gelegt wird.

Da nun die besagte Kugel einerseits die Ebene E berührt, andererseits aber durch Inversion in sich selbst transformiert wird, während sich die Ebene E invers in die gegebene Kugel S verwandelt, so ist einleuchtend, dass sich auch die Kugeln S und Σ berühren müssen, dass also Σ die gesuchte Kugel darstelle.

Berücksichtigt man, dass sich durch die drei Punkte m, n und m_1 zwei Kugeln legen lassen, welche die Ebene E berühren (Aufgabe 103) und dass man weiters auch den zweiten Endpunkt a des zu E senkrechten Kugeldurchmessers als Inversionscentrum hätte wählen können (wobei dann A und a_1 zwei inverse Punkte vorgestellt haben

würden), so ist klar, dass es im allgemeinen vier Lagen der gesuchten Kugel geben müsse.

§. 461.

106. Aufgabe. Es ist eine Kugel zu construieren, welche durch einen gegebenen Punkt a geht und drei gegebene Kugeln S_1, S_2 und S_3 berührt.

Fassen wir zunächst die Bedingung ins Auge, dass die zu suchende Kugel Σ durch den Punkt a gehen und die beiden Kugeln S_1 und S_2 berühren solle.

Nehmen wir für einen Augenblick den äußeren (oder auch den inneren) Ähnlichkeitspunkt A_{12} der beiden Kugeln S_1 und S_2 als Inversionscentrum an, und wählen wir den Inversionsmodul so, dass die Kugel S_1 invers in die Kugel S_2 transformiert wird. Letzteres wird eintreten, wenn wir durch A_{12} einen beliebigen Strahl γ_{12} führen, welcher die beiden Kugeln S_1 und S_2 in den beiden invers liegenden Punkten ξ_1, ξ_2 schneidet, und das Product

$$A_{12}\xi_1 \,.\, A_{12}\xi_2$$

als Inversionsmodul betrachten.

Durch diese Transformation wird die zu suchende Kugel Σ, da sie die beiden Kugeln S_1 und S_2 nothwendig in zwei invers liegenden Punkten α_1 und α_2 berühren muss, in sich selbst verwandelt. Hiebei muss die bezeichnete Kugel überdies, außer dem Punkte a noch einen zweiten Punkt a' enthalten, welcher mit a ebenfalls ein inverses Punktepaar repräsentiert. Dieser Punkt ist vermöge der Relation:

$$A_{12}a \,.\, A_{12}a' = A_{12}\xi_1 \,.\, A_{12}\xi_2$$

leicht zu construieren. Es ist nun einleuchtend, dass jede Kugel Σ, welche durch das Punktepaar (a, a') geht und die Kugel S_1 berührt, nothwendig auch (Satz 254) die Kugel S_2 berühren müsse.

Betrachten wir weiters den äußeren (oder auch den inneren) Ähnlichkeitspunkt A_{13} der beiden Kugeln S_2 und S_3 als Inversionscentrum, und wählen wir wieder den Inversionsmodul so, dass die Kugel S_1 invers in die Kugel S_3 verwandelt wird.

Mit Hilfe dieses Inversionsmoduls (derselbe ist, wenn ξ_1 und ξ_3 zwei invers liegende Punkte der beiden Kugeln S_1 und S_3 vorstellen, $A_{13}\xi_1 \,.\, A_{13}\xi_3$) wird dem Punkte a ein zweiter Punkt a'' invers zugeordnet, welcher vermittelst der Beziehung

$$A_{13}a \,.\, A_{13}a'' = A_{13}\xi_1 \,.\, A_{13}\xi_2$$

leicht construiert werden kann.

Nun ist aber (Satz 250 und 254) klar, dass jede Kugel Σ, welche durch die beiden Punkte a und a'' geht und die Kugel S_1 berührt, nothwendig auch die Kugel S_3 berühren muss.

Legt man daher durch die Punkte a, a' und a'' [etwa nach der in Aufgabe 102) entwickelten Methode] eine Kugel Σ, welche die Kugel S_1 berührt, so muss diese Kugel, wie wir eben gesehen haben, nothwendig auch die Kugeln S_2 und S_3 berühren; es wird demnach Σ die verlangte Kugel darstellen.

Da einerseits durch die drei Punkte a, a', a'' zwei Kugeln gelegt werden können, welche die Kugel S_1 berühren, anderseits aber auch die inneren Ähnlichkeitspunkte J_{12} und J_{13} der Kugelpaare S_1, S_2, beziehungsweise S_1, S_3 benützt werden können, so folgt, dass es $2.2.2 = 8$ verschiedene, die Aufgabe erfüllende Kugellagen gibt.

Auf dem Principe der Inversion beruhend, sind auch noch folgende Probleme zu lösen, welche man als Specialfälle der vorhergehenden Aufgabe ansehen kann.

§. 462.

107. Aufgabe. Es ist eine Kugel zu construieren, welche durch einen gegebenen Punkt m geht, und eine gegebene Ebene E, so wie zwei gegebene Kugeln S_1 und S_2 berührt.

Führen wir den zur Ebene E senkrechten Durchmesser $A_1 a_1$ der Kugel S_1, nehmen wir den einen Endpunkt A_1 desselben als Inversionscentrum an und betrachten den anderen Endpunkt a_1, sowie den Punkt a'_1, in welchem dieser Durchmesser die Ebene E schneidet, als inverse Punkte, wählen wir also das Product

$$A_1 a_1 . A_1 a'_1$$

als Inversionsmodul, so verwandelt sich, dieser Voraussetzung gemäß, die Kugel S_1 invers in die Ebene E.

Wenn wir zu dem gegebenen Punkte m den inversen Punkt m' bestimmen, was mit Hilfe der Relation

$$A_1 m . A_1 m' = A_1 a_1 . A_1 a_1'$$

leicht geschehen kann, so ist (nach Satz 262) klar, dass jede Kugel Σ, welche durch die beiden Punkte m und m' geht und die Ebene E berührt, nothwendig auch die Kugel S_1 berühren müsse.

Führen wir weiters den zur Ebene E senkrechten Durchmesser $A_2 a_2$ der Kugel S_2, betrachten sodann den einen Endpunkt A_2 desselben als Inversionscentrum und den Punkt a_2', in welchem dieser

Durchmesser die Ebene E trifft, als invers zu dem zweiten Endpunkte a_2, d. h. wählen wir das Product

$$A_2\, a_2 . A_2\, a_2'$$

als Inversionsmodul, so entspricht dem gegebenen Punkte m vermöge der Beziehung

$$A_2\, m . A_2\, m'' = A_2\, a_2 . A_2 a_2'$$

ein inverser Punkt m''.

Nach dem Satze 262) wird jede Kugel Σ, welche durch die beiden Punkte m und m'' geht und die Ebene E berührt, nothwendig auch die Kugel S_2 berühren. Legen wir demnach durch die drei Punkte m, m' und m'' eine Kugel Σ, welche die Ebene E berührt, so wird diese nach den vorhergehenden Erörterungen auch mit den beiden Kugeln S_1 und S_2 eine Berührung eingehen, mithin eine Lage der gesuchten Kugel darstellen.

Nachdem man durch m, m', m'' zwei Kugeln berührend an die Ebene E legen kann und andererseits auch die zweiten Endpunkte a_1 beziehungsweise a_2 der zur Ebene E senkrechten Kugeldurchmesser als Inversionscentra gewählt werden können, so existieren $2.2.2 = 8$ verschiedene, der Aufgabe genügende Kugeln.

§. 463.

108. Aufgabe. **Es ist eine Kugel zu construieren, welche durch einen gegebenen Punkt m geht und zwei gegebene Ebenen E_1 und E_2 sowie eine gegebene Kugel S berührt.**

Führen wir zunächst denjenigen Kugeldurchmesser $A_1\, a_1$, welcher zur Ebene E_1 senkrecht steht, und betrachten wir den einen Endpunkt A_1 desselben als Inversionscentrum, sowie den Punkt a_1' in welchem dieser Durchmesser die Ebene E_1 trifft, als invers zu dem zweiten Endpunkte a_1 dieses Durchmessers, d. h. wählen wir das Product

$$A_1\, a_1 . A_1 a_1'$$

als Inversionsmodul, so transformiert sich die Kugel S in die Ebene E_1. Dem gegebenen Punkte m wird vermittelst der Beziehung

$$A_1\, m . A_1\, m' = A_1\, a_1 . A_1\, a_1'$$

ein Punkt m' entsprechen.

Mittelst des Satzes 262) wurde festgestellt, dass jede Kugel Σ, welche durch die beiden Punkte m und m' berührend an die Ebene E_1 gelegt wird, nothwendig auch die Kugel S berühren müsse.

Legen wir demnach vermittelst der in Aufgabe 97) entwickelten Constructionen durch die beiden Punkte m und m' eine Kugel Σ,

welche die Ebenen E_1 und E_2 berührt, so wird diese Kugel Σ auch die gegebene Kugel S berühren, also eine Lage der gesuchten Kugel darstellen.

Berücksichtigen wir weiters, dass durch zwei Punkte auch zwei Kugeln gelegt werden können, welche zwei gegebene Ebenen berühren, und beachtet man ferner, dass mit derselben Berechtigung wie a'_1, auch der andere Endpunkt a_1 des Kugeldurchmessers $A_1\,a_1$ als Inversionscentrum hätte angenommen werden können, so ergeben sich vier verschiedene Kugellagen. Ebenso kann man aber auch die Kugel S auf zweifache Weise in die andere Ebene E_2 transformieren, wodurch wieder vier Kugeln erhalten werden. Es gibt daher im ganzen acht verschiedene Lagen von Kugeln, welche der gestellten Aufgabe genügen.

Selbstverständlich ist auch hier der Fall denkbar, dass einige, ja möglicherweise selbst alle diese Kugeln imaginär werden. Setzt man diesbezüglich beispielsweise voraus, dass der gegebene Punkt innerhalb der gegebenen Kugel liege, während die gegebenen Ebenen beziehungsweise Kugeln, die ersterwähnte Kugel nicht reell schneiden, so existiert keine einzige Kugel, welche den gestellten Bedingungen Genüge leisten würde.

§. 464.

109. Aufgabe. Es ist eine Kugel zu construieren, welche drei gegebene Ebenen E_1, E_2, E_3 und eine gegebene Kugel berührt.

Setzen wir diesfalls voraus, es sei Σ eine Kugel, welche S in s und die drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 beziehungsweise in a_1, a_2 und a_3 berührt. Der Berührungspunkt s der beiden Kugeln S und Σ ist gleichzeitig ein Ähnlichkeitspunkt derselben.

Zieht man die Geraden sa_1, sa_2, sa_3, welche diesen Berührungs- und Ähnlichkeitspunkt s mit den drei Berührungspunkten der drei Ebenen E_1, E_2, E_3 und der Kugel Σ verbinden, so treffen diese Geraden die zweite Kugel, d. i. die gegebene Kugel S in drei Punkten a_1', a_2' und a_3', welche mit den erstangeführten drei Punkten ähnlich liegen.

Die Tangentialebenen E_1', E_2' und E_3' der Kugel S in diesen Punkten a_1', a_2', a_3' werden sodann zu den gegebenen drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 parallel sein, während deren Schnittpunkt P', wie leicht einzusehen, mit dem Schnittpunkte P von E_1, E_2, E_3 ähnlich liegen wird. Hiernach muss die Verbindungsgerade PP' durch den Punkt s gehen.

Diese Betrachtung liefert sofort alle Anhaltspunkte für die Construction der Kugel Σ, welche die Kugel S und die drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 berühren soll.

Wir legen zu diesem Zwecke parallel zu E_1, E_2 und E_3 an die Kugel S die drei Berührungsebenen E'_1, E_2', E_3'; suchen den Schnittpunkt P' dieser letzteren und verbinden denselben mit dem Schnittpunkte P der drei ersteren durch eine Gerade PP', welche die Kugel S in zwei (reellen oder imaginären) Punkten p und p_1 schneiden wird. Den vorhergegangenen Erörterungen gemäß kann jeder dieser beiden Punkte als Berührungspunkt der zu bestimmenden Kugel Σ betrachtet werden.

Um endlich den Mittelpunkt M der Kugel, welche beispielsweise dem Berührungspunkt p entspricht, zu finden, wird bloß zu berücksichtigen sein, dass derselbe einerseits auf der Geraden Op liegen müsse, welche den Berührungspunkt p mit dem Mittelpunkte O der gegebenen Kugel S verbindet, andererseits aber auch auf derjenigen Geraden liegen werde, welche mit den Geraden OP' ähnlich liegt, d. i. also auf jener Geraden, welche durch P parallel zu OP' gezogen werden kann.

Was die Anzahl der der Aufgabe entsprechenden Kugeln anbelangt, so ist dieselbe leicht folgendermaßen zu finden. Zu jeder der drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 kann man an die gegebene Kugel zwei parallele Berührebenen legen, welche sich bekanntlich auf achtfache Weise zu dreien combinieren lassen. Jedem Tripel solcher zu E_1, E_2, E_3 parallelen Ebenen entsprechen ferner, wie wir eben gesehen haben, zwei verschiedene Kugeln Σ; es gibt demnach, die imaginären mit inbegriffen, sechzehn verschiedene Lösungen der gestellten Aufgabe.

Auf demselben Principe beruht die Lösung folgender Aufgabe.

§. 465.

110. Aufgabe. **Einem geraden Kreiskegel ist eine Kugel einzuschreiben, welche nebstbei noch eine gegebene Kugel berührt.**

Denken wir uns den gegebenen Kreiskegel (S, C) (Taf. XLVII, Fig. 112) auf der als horizontale Projectionsebene gewählten Ebene senkrecht stehend, und seien (K_1, K_1') die Contouren, sowie (O, O') der Mittelpunkt der gegebenen Kugel.

Die nothwendige Bedingung für die Existenz einer reellen dem vorgegebenen Probleme entsprechenden Kugel, ist die, dass die gegebene Kugel (K, K_1') den Kegel (S, C) reell schneide.

Behufs Lösung dieser Aufgabe kann in ähnlicher Weise wie in dem vorher besprochenen Falle vorgegangen werden.

Wir denken uns diesfalls der Kugel (K, K_1') einen Kegel umschrieben, welche dem gegebenen Kegel (S, C) parallel ist. Der Scheitel (S_1, S_1') dieses Kegels ergibt sich offenbar als der Schnittpunkt jener Tangenten an die verticale Kugelcontour K der gegebenen Kugel, welche zu den Contourerzeugenden des gegebenen Kegels (S, C) parallel sind.

Diese beiden Kegel (S, C) und (S_1, C_1) werden, den früheren Betrachtungen entsprechend, in Bezug auf den Ähnlichkeits-(Berührungs-) punkt der gegebenen Kugel (K, K_1') mit der zu suchenden Kugel (k, k_1') ähnlich gelegen sein.

Es werden mithin auch die beiden Kegelscheitel (S, S') und (S_1, S'_1) in Bezug auf denselben Berührungspunkt ähnlich liegen müssen. Der letztere kann daher kein anderer, als einer von den beiden Schnittpunkten der gegebenen Kugel (K, K_1') mit der Verbindungsgeraden (SS_1, $S'S_1'$) sein. Diese beiden Schnittpunkte, von welchen wir nur die Verticalprojectionen a und b benöthigen, ergeben sich, wie bereits bekannt, durch eine einfache Drehung der Geraden SS_1 um den horizontal-projicierenden Kugeldurchmesser OS_1 und können die obbezeichneten Schnittpunkte aus der gedrehten Lage a_0 und b_0 ebenso leicht zurückgeführt werden. Die Mittelpunkte (M, M') und (M_1, M_1') der beiden, der vorliegenden Aufgabe entsprechenden Kugeln ergeben sich unmittelbar als die Schnittpunkte der Kegelachse mit jenen beiden Geraden, welche den Mittelpunkt (O, O') der gegebenen Kugel (K, K_1') mit den eben gefundenen Berührungspunkten a und b verbinden.

Im vorliegenden Falle ergeben sich, wie man sieht, bloß zwei reelle Lösungen, da man von dem zweiten, der Kugel (K, K'_1) parallel zum Kegel (S, C) umschriebenen Kegel keinen Gebrauch machen kann, indem diesfalls die Verbindungsgerade SS_2 der beiden Kegelscheitel die gegebene Kugel nicht reell schneidet.

Läge jedoch die gegebene Kugel ganz im Inneren des gegebenen Kegels, so würden beide Kegel, welche der Kugel parallel zu dem gegebenen Kegel umschrieben werden können, reelle Lösungen ergeben; es würden daher der Aufgabe unter diesen Umständen vier reelle, verschiedene Kugeln entsprechen.

Weitere Berührungsaufgaben, bei welchen vier gegebene Berührungsbedingungen (Kugeln und Ebenen) vorliegen, können durch inverse Transformation leicht auf die Aufgabe 109) zurückgeführt werden. Die Art und Weise, wie von besagter Transformation Gebrauch gemacht werden kann, wollen wir im Nachstehenden kurz andeuten.

§. 466.

111. Aufgabe. **Es ist eine Kugel zu construieren, welche zwei gegebene Ebenen E_1 und E_2 und zwei gegebene Kugeln S_1 und S_2 berührt.**

Die beiden Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich in einer Geraden g, welche eine der beiden Kugeln, allenfalls S_1 in den beiden Punkten A und B schneiden möge.

Nehmen wir den Punkt A als Inversionscentrum an, so werden, da dieser Punkt den beiden Ebenen E_1 und E_2 sowohl, als auch der Kugel S_1 angehört, diese drei Gebilde durch Inversion, man mag den Inversionsmodul wählen wie man will, sich immer in drei Ebenen verwandeln, und zwar transformieren sich die Ebenen E_1 und E_2 in sich selbst, während die Kugel S_1 in eine Ebene e_1 übergehen mag.

Wählen wir ferner den Inversionsmodul speciell so, dass die zweite Kugel S_2 in sich selbst transformiert wird, d. h. nehmen wir als Inversionsmodul die Potenz des Punktes A in Bezug auf die Kugel S_2 an, so ergibt die Inversion drei Ebenen E_1, E_2, e_1 und die Kugel S_2. Construieren wir nun (Aufgabe 109) eine Kugel σ, welche die drei Ebenen E_1, E_2, e_1 und die Kugel S_2 berührt, so wird dieselbe (nach Satz 179) in eine Kugel Σ invers transformiert, welche außer den beiden Ebenen E_1 und E_2 und der Kugel S_2 auch die Kugel S_1 berühren muss, eine Lage der gesuchten Kugel darstellen.

§. 467.

112. Aufgabe. **Es ist eine Kugel zu construieren, welche drei gegebene Kugeln S_1, S_2 und S_3 und eine gegebene Ebene E berührt.**

Betrachten wir wieder einen Punkt A, welcher den beiden Kugeln S_1 und S_2, sowie der Ebene E gemeinschaftlich ist, als Inversionscentrum, und wählen wir als Inversionsmodul die Potenz dieses Punktes A in Bezug auf die Kugel S_3, so erreichen wir hiedurch, dass bei der Transformation die Ebene E sowohl, als auch die Kugel S_3 sich in sich selbst transformieren, während die beiden Kugeln S_1 und S_2 in zwei Ebenen e_1 und e_2 übergehen.

Construieren wir nun wieder eine Kugel σ, welche die drei gegebenen Ebenen e_1, e_2, E und die Kugel S_3 berührt, so wird dieselbe durch Inversion in eine Kugel Σ verwandelt, welche (nach Satz 179) außer der Ebene E und der Kugel S_3 auch die beiden Kugeln S_1 und S_2 berühren muss, und daher e i n e Lage der verlangten Kugel darstellen wird.

§. 468.

113. Aufgabe. Es ist eine Kugel zu construieren, welche vier gegebene Kugeln berührt.

Seien S_1, S_2, S_3 und S_4 die vier gegebenen Kugeln. Wählen wir von den beiden Punkten A, welche die drei ersteren Kugeln gemein haben, einen als Inversionscentrum und betrachten wir die Potenz dieses Punktes A in Bezug auf die vierte Kugel S_4 als Inversionsmodul, so wird diese Kugel S_4 durch Inversion in sich selbst transformiert, während die drei ersten Kugeln S_1, S_2 und S_3 in drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 übergehen werden.

Construiert man wieder eine Kugel σ, welche diese drei Ebenen E_1, E_2, E_3 und die Kugel S_4 berührt, so übergeht dieselbe durch Inversion in eine Kugel, welche außer der Kugel S_4 auch noch die drei anderen Kugeln S_1, S_2 und S_3 berührt und mithin eine der Aufgabe entsprechende Kugel repräsentiert.

Die Zahl der Kugeln, welche den letztangeführten drei Aufgaben entsprechen, ist stets, die imaginären mit inbegriffen, gleich sechzehn. Dies lässt sich leicht folgendermaßen nachweisen.

Sind E_1, E_2, E_3 drei gegebene Ebenen und S_4 eine Kugel, so wissen wir bereits (Aufgabe 109), dass es sechzehn Kugeln $\Sigma_1 \ldots \Sigma_{16}$ gäbe, welche diese drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 und die Kugel S_4 gleichzeitig berühren.

Transformieren wir diese Gebilde invers *a*) für ein beliebiges Inversionscentrum im Raume, so verwandeln sich bekanntlich E_1, E_2, E_3 und S_4 in vier Kugeln und *b*) durch ein Centrum, welches auf einer Ebene, etwa auf E_1 liegt, so übergeht diese in sich selbst, die drei anderen Gebilde E_2, E_3 und S_4 übergehen dagegen in drei Kugeln, sowie endlich *c*) für ein Centrum, das auf der Schnittgeraden zweier Ebenen, allenfalls auf dem Schnitte von E_1 und E_2, liegt, übergehen diese in sich selbst, die Ebene E_3 und die Kugel S_4 dagegen in zwei Kugeln.

In jedem dieser drei Fälle verwandeln sich aber die sechzehn Kugeln $\Sigma_1 \ldots \Sigma_{16}$ wieder in sechzehn Kugeln, welche die den ursprünglichen gegebenen Ebenen und Kugeln entsprechenden Ebenen beziehungsweise Kugeln berühren.

§. 469.

Die im Vorhergehenden angeführten Constructionen mit Zuhilfenahme der inversen Transformation setzen als nothwendige Bedingung voraus, dass überhaupt transformiert werden könne, dass also mit anderen Worten die gegebenen Kugeln und Ebenen reelle gemein-

schaftliche Punkte besitzen, die als Inversionscentra angenommen werden können. Von der Inversion Gebrauch zu machen, wird jedoch unmöglich, wenn die Kugeln und Ebenen keine gemeinschaftlichen reellen Punkte besitzen.

Trifft dieser Fall ein, so muss zur Lösung der letzterwähnten Aufgaben von anderen Methoden und anderen uns bereits zu Gebote stehenden Hilfsmitteln Gebrauch gemacht werden.

Bezüglich der letzten Aufgabe wurde bereits im theoretischen Theile (§. 308 und 309) eine Auflösung entwickelt, welche ganz allgemeine Giltigkeit hat, einerlei ob die vier gegebenen Kugeln gemeinschaftliche Punkte besitzen oder nicht.

Sind die eine Berührung eingehenden Gebilde theilweise Ebenen und theilweise Kugeln, so lassen sich die dort angegebenen Constructionen durch zweckmäßige Specialisierungen auch dann verwenden, wenn man die Ebenen als Kugeln von unendlich großem Radius ansieht und die Potenzpunkte, Ähnlichkeitspunkte etc. dieser Anschauung gemäß einführt.

Außer diesen eben angedeuteten Lösungsweisen gibt es jedoch noch viele andere Methoden, welche gleichfalls zum Ziele führen, obwohl auch da wieder die Constructionen mitunter resultatlos werden können. Es genügt jedoch in allen Fällen und unter allen Umständen gewisse Sätze aus der Theorie der Kugel in geeigneter Weise zur Verwendung und Verwertung zu bringen. Wir wählen, um das Gesagte durch ein Beispiel zu illustrieren, geflissentlich ein bereits früher „mittelst Inversion“ gelöstes Problem.

114. Aufgabe. Eine Kugel ist zu construieren, welche zwei gegebene Ebenen und zwei gegebene Kugeln berührt.

Seien S_1 und S_2 die beiden gegebenen Kugeln, E_1 und E_2 die gegebenen Ebenen. Denken wir uns zunächst den äußeren (oder den inneren) Ähnlichkeitspunkt A der beiden Kugeln S_1 und S_2 bestimmt, und construieren wir jene Kugel S_0, welche einerseits diesen Punkt A zum Mittelpunkte hat, andererseits aber demselben Kugelbüschel, wie die beiden Kugeln S_1 und S_2 angehört. Jeder Punkt dieser Kugel S_0 hat (nach Satz 263) die Eigenschaft, dass sich, wenn derselbe als Inversionscentrum angenommen wird, die beiden Kugeln S_1 und S_2 invers in zwei gleich große Kugeln S'_1 und S'_2 verwandeln.

Nehmen wir einen der beiden Punkte M_1, in welchem die Kugel S_0 von der Schnittgeraden der beiden gegebenen Ebenen E_1 und E_2 getroffen wird, als Inversionscentrum an, so werden die beiden Kugeln S_1 und S_2 in zwei andere, jedoch gleich große Kugeln S'_1

und S'_2 übergehen, während sich die Ebenen E_1 und E_2 in sich selbst transformieren.

Es ist nun eine Kugel zu construieren, welche die beiden Kugeln S'_1 und S'_2, sowie die beiden Ebenen E_1 und E_2 berührt.

Da die beiden Kugeln S'_1 und S'_2 gleich groß sind, so liegt der Mittelpunkt einer jeden Kugel, welche diese beiden Kugeln berührt, in derjenigen Ebene, in Bezug auf welche diese Kugeln symmetrisch sind, d. h. in jener Ebene e, welche durch die Mitte der Centralen auf dieselbe senkrecht geführt wird.

Soll aber die Kugel σ nebstbei auch die beiden Ebenen E_1 und E_2 berühren, so wird sie auch mit jeder der beiden Ebenen E'_1 und E'_2 eine Berührung eingehen, welche beziehungsweise zu E_1 und E_2, in Bezug auf die eben gefundene Ebene e als Symmetrieebene, symmetrisch liegen.

Construiert man also die der einen Ebene, beispielsweise der Ebene E_1, symmetrische Ebene E'_1; bestimmt man ferner, allenfalls nach der Methode, welche bei der Aufgabe 109) gewählt wurde, diejenige Kugel σ, welche die drei Ebenen E_1, E_2 und E'_1, sowie die Kugel S'_1 berührt, so wird diese Kugel nothwendig auch die Kugel S'_2 berühren müssen. Die dieser Kugel σ invers entsprechende Kugel Σ wird sodann offenbar sowohl die Ebenen E_1 und E_2, als auch die beiden gegebenen Kugeln S_1 und S_2 berühren müssen, also eine Lage der gesuchten Kugel repräsentieren.

In ähnlicher Weise könnte auch die eine oder die andere der übrigen letzt besprochenen Berührungsaufgaben gelöst und durchgeführt werden.

Es mögen nun noch einige Berührungsaufgaben Erwähnung finden, behufs deren Lösung wir Methoden zur Anwendung bringen wollen, welche von den früheren abweichen.

So haben wir beispielsweise im Vorhergegangenen die Aufgabe gelöst „eine Kugel zu construieren, welche einem gegebenen Kegel eingeschrieben ist und nebstbei eine gegebene Kugel berührt". Wählen wir, um die Verschiedenheit der Lösung hervorzuheben, das nachstehende analoge Problem.

§. 470.

115. Aufgabe. Einem geraden Kreiscylinder ist eine Kugel einzuschreiben, welche eine gegebene Kugel berührt.

Die horizontale Projectionsebene wählen wir derart, dass dieselbe zu der Cylinderachse senkrecht steht, so also, dass die horizontale

Projection derselben als ein Kreis C' (Taf. XVIII, Fig. 113), dargestellt erscheint, während dessen verticale Projection durch die beiden Contourerzeugenden U_1 und U_2 repräsentiert wird. Die gegebene Kugel sei durch ihren Mittelpunkt (O, O') und ihre Contouren (K, K'_1) dargestellt.

Da die sämmtlichen dem Cylinder eingeschriebenen Kugeln gleich groß sind, der Radius jeder derselben also dem Radius des Basiskreises C' dieses Cylinders gleich ist, so wird folgende einfache Construction zum Ziele führen.

Denken wir uns nämlich eine Kugel (k, k'_1) construiert, welche mit der gegebenen Kugel (K, K'_1) den Mittelpunkt (O, O') gemein hat, deren Radius R aber um jenen r der Cylinderbasis C' größer, als der Radius ϱ der gegebenen Kugel (K, K'_1) ist, so repräsentiert diese Kugel bekanntlich den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche die Kugel (K, K'_1) berühren, und deren Radius dem Halbmesser r des Basiskreises C gleich ist.

Bestimmen wir nun die Schnittpunkte (M, M') und (M_1, M'_1) dieser Kugel (k, k'_1) mit der Cylinderachse (Z, Z'), und beschreiben wir aus denselben, als Mittelpunkte, die Kugeln K_2 und K_3 mit dem Radius r des Basiskreises C', so werden diese einerseits dem Cylinder eingeschrieben sein, andererseits aber die Kugel (K, K'_1) berühren und mithin den durch die Aufgabe gestellten Bedingungen entsprechen.

Die Bedingung, dass eine Kugel eine gegebene Gerade berühre, ist von jener, dass die Kugel eine gegebene Ebene, oder dass die Kugel wieder eine Kugel berühre, wesentlich verschieden.

Die auf die Berührung von Kugeln mit gegebenen Geraden bezüglichen Aufgaben sind auch nicht in solcher Allgemeinheit mit Zirkel und Lineal ausführbar, wie dies bei den bisher gelösten obangeführten Aufgaben ohne jedwelche Schwierigkeit möglich war. Der Grund hievon ist leicht einzusehen.

Wir wissen nämlich, dass der geometrische Ort aller Punkte, welche von zwei gegebenen, sich nicht schneidenden Geraden einen gleichen Abstand besitzen, d. i. also der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche diese zwei Geraden berühren, ein hyperbolisches Paraboloid sei. (Satz 110).

Sind nun noch anderweitige Berührungsbedingungen oder Punktbedingungen zu erfüllen, so kommt es im allgemeinen sehr häufig vor, dass der Schnitt eines Paraboloides mit einer Kugel, einem Kreise oder einem anderen Paraboloide zu construieren ist, dass wir also auf

eine Aufgabe vierten Grades geführt werden, die im allgemeinen mit Zuhilfenahme von Zirkel und Lineal graphisch nicht ausgeführt werden kann.

Nachstehend wollen wir jedoch versuchen, von den constructiv durchführbaren Problemen dieser Art einige graphisch aufzulösen.

§. 471.

116. Aufgabe. Es ist eine Kugel von gegebenem Radius zu construieren, welche eine gegebene Gerade und zwei gegebene Ebenen berührt.

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kugeln von dem constanten Radius R, welche eine Ebene E_1 berühren, besteht aus jenen beiden Ebenen e'_1 und e''_1, welche zu der Ebene E_1 parallel sind und von derselben den Abstand R besitzen. Ebenso wird der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kugeln vom Radius R, welche die zweite Ebene E_2 berühren, durch die beiden zu E_2 in einem Abstande R parallel geführten Ebenen e'_2 und e''_2 repräsentiert.

Die vier Schnittgeraden g_1, g_2, g_3 und g_4 dieser vier Ebenen e_1', e_1'', e_2', e_2'' stellen mithin den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller jener Kugeln vom Radius R dar, welche gleichzeitig die beiden Ebenen E_1 und E_2 berühren.

Endlich ist der geometrische Ort aller Punkte, die von der Geraden l den Abstand R besitzen, d. h. der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kugeln vom Radius R, welche die gegebene Gerade l berühren, ein gerader Kreiscylinder, dessen Achse diese Gerade und dessen Basiskreis, ein Kreis von dem Radius R ist.

Bestimmt man nun die Durchschnittspunkte jeder der vier Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 mit diesem Cylinder, so erhält man acht Punkte, deren jeder von der Geraden l sowohl, als auch von den beiden Ebenen E_1 und E_2 den Abstand R besitzt, also den Mittelpunkt einer der Aufgabe entsprechenden Kugel darstellt.

§. 472.

117. Aufgabe. Es ist eine Kugel zu construieren, welche drei gegebene Ebenen E_1, E_2, E_3 und eine gegebene Gerade l berührt.

Die sechs Winkelhalbierebenen der drei gegebenen Ebenen E_1, E_2, E_3 schneiden sich in vier Geraden, deren jede einen geometrischen Ort solcher Punkte repräsentiert, welche von den drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 gleiche Abstände hat. Diese vier Geraden, nennen wir sie g_1, g_2, g_3 und g_4,

sind daher die geometrischen Orte der Mittelpunkte aller Kugeln, welche die drei Ebenen berühren.

Denken wir uns nun in einer der vier Geraden, allenfalls in g_1, jene beiden Punkte M_1 und M'_1, welche von der Geraden l und von einer der drei gegebenen Ebenen, beispielsweise von E_1, einen gleichen Abstand haben, bestimmt, und beschreiben wir mit diesen Abständen als Radien, aus den diesbezüglichen Punkten M_1, respective M'_1 als Mittelpunkten, Kugeln, so werden diese offenbar nicht nur die Gerade l und die Ebene E_1, sondern auch die beiden Ebenen E_2 und E_3 berühren, also der gestellten Aufgabe entsprechen.

Da auf jeder der Geraden g_1 . . . g_4 zwei derartige Punkte M und M', liegen, so folgt, dass die gestellte Aufgabe acht verschiedene Auflösungen, die natürlich auch zum Theile imaginär werden können, zulässt.

§. 473.

118. Aufgabe. Es ist eine Kugel zu construieren, welche zwei sich schneidende Geraden l_1 und l_2 und zwei gegebene Ebenen E_1 und E_2 berührt.

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche die beiden Geraden l_1 und l_2 berühren, d. i. der geometrische Ort aller Punkte, welche von den beiden Geraden l_1 und l_2 einen gleichen Abstand haben, wird durch jene beiden Ebenen h_1 und h_2 repräsentiert, welche auf der Ebene der beiden Geraden l_1 und l_2 senkrecht stehen und die winkelhalbierenden Geraden von (l_1, l_2) enthalten.

Ferner ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche die beiden Ebenen E_1 und E_2 berühren, zusammengesetzt aus den beiden Ebenen H_1 und H_2, welche die beiden von E_1 und E_2 gebildeten Winkel halbieren.

Die vier Ebenen H_1, H_2, h_1 und h_2 schneiden sich in vier Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 von solcher Beschaffenheit, dass jeder Punkt in einer dieser Geraden gleiche Abstände von den beiden Geraden l_1 und l_2, und ebenso auch gleiche Abstände von den Ebenen E_1 und E_2 besitzt. Soll aber einer dieser Punkte gleichzeitig ein Mittelpunkt der gesuchten Kugel sein, so ist nothwendig, dass diese beiden Paare von Abständen auch untereinander gleich sind.

Zu diesem Zwecke wird man wieder jene beiden Punkte auf der Geraden g_1 suchen, welche von einer der beiden Geraden l_1 und l_2, beispielsweise von der Geraden l_1, und von einer der beiden Ebenen E_1 und E_2, allenfalls von der Ebene E_1, einen gleichen

Abstand besitzen. Diese beiden Punkte werden sodann offenbar die Mittelpunkte zweier Kugeln sein, welche den Bedingungen der gestellten Aufgabe entsprechen.

Da auf jeder der vier Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 zwei solche Punkte existieren, so gibt es acht verschiedene, der Aufgabe entsprechende Kugeln.

§. 474.

119. Aufgabe. Es ist eine Kugel zu construieren, welche drei sich in einem Punkte schneidende Geraden l_1, l_2 und l_3 und eine gegebene Ebene E berührt.

Denken wir uns die drei Geraden, welche selbstverständlich nicht in einer und derselben Ebene liegen dürfen, als die Erzeugenden eines geraden Kreiskegels. Ein solcher Kegel wird bekanntlich erhalten, wenn man auf den drei Geraden l_1, l_2 und l_3 von ihrem gemeinschaftlichen Schnittpunkte Σ aus drei gleiche Strecken $\Sigma a_1 = \Sigma a_2 = \Sigma a_3$ abschneidet. Der Kreis, welcher durch die drei Punkte a_1, a_2 und a_3 bestimmt ist, repräsentiert den geraden Querschnitt des gesuchten Kreiskegels, während die Verbindungsgerade seines Mittelpunktes mit dem Scheitel Σ die zugehörige Kegelachse darstellt.

Jede diesem geraden Kreiskegel eingeschriebene Kugel ist sodann eine solche, welche die drei gegebenen Geraden l_1, l_2 und l_3 berührt. Der Mittelpunkt derselben liegt auf der genannten Kugelachse. Jede diesem Kegel eingeschriebene Kugel berührt gleichzeitig eine jede Tangentialebene des Kegels.

Hierauf gestützt ergibt sich folgende einfache Construction für den Mittelpunkt der gesuchten Kugel.

Sei T eine beliebige Tangentialebene des Kegels. Die gesuchte Kugel muss nun diese Ebene T berühren und soll auch mit der gegebenen Ebene E eine Berührung eingehen; ihr Mittelpunkt wird daher in einer der beiden Winkelhalbierebenen von T und E liegen, wird also im Schnitte dieser Winkelhalbierebenen mit der Kegelachse erhalten werden.

Berücksichtigt man endlich, dass die Strecken $\Sigma a_1 = \Sigma a_2 = \Sigma a_3$ zu verschiedenen Seiten des Punktes Σ aufgetragen werden können, so erhält man vier verschiedene gerade Kreiskegel, welche durch die Geraden l_1, l_2 und l_3 gehen. Auf der Achse eines jeden dieser Kegel liegen, wie wir soeben hervorgehoben haben, die Mittelpunkte zweier der Aufgabe entsprechenden Kugeln; die Aufgabe wird daher durch acht verschiedene Kugeln erfüllt.

§. 475.

120. Aufgabe. Es ist eine Kugel zu construieren, welche drei sich in einem Punkte schneidende Geraden l_1, l_2 und l_3 berührt und durch einen gegebenen Punkt P geht.

Sind also l_1, l_2, l_3 die gegebenen drei Geraden und P der gegebene Punkt, so wird man wieder einen durch die Geraden l_1, l_2 und l_3 gehenden geraden Kreiskegel construieren. Diesem Kreiskegel ist sodann eine Kugel einzuschreiben, welche gleichzeitig durch den Punkt P geht. Vorstehendes Problem reduciert sich somit auf einie bereits früher (§. 455) gelöste Aufgabe.

Nachdem es einerseits zwei Kugeln gibt, die durch einen Punkt gehen und einem geraden Kegel eingeschrieben sind, und da andererseits vier gerade Kreiskegel durch die drei gegebenen Kugeln gelegt werden können, so gibt es acht Auflösungen, von welchen jedoch, da der gegebene Punkt im Inneren des Kreiskegels liegen muss, und dies offenbar bloß bei einem einzigen der vier Kegel eintritt, nur zwei reell sind.

§. 476.

121. Aufgabe. Es ist eine Kugel zu construieren, welche drei gegebene in einem Punkte sich schneidende Geraden l_1, l_2 und l_3 und eine gegebene Kugel S berührt.

Construiert man wieder einen geraden Kreiskegel, welcher die drei Geraden l_1, l_2 und l_3 zu Erzeugenden hat, so reduciert sich die vorstehende Aufgabe auf das bereits gelöste Problem: „Eine Kugel einem geraden Kreiskegel einzuschreiben, welche nebstbei eine gegebene Kugel berührt."

Diese letztangeführte Aufgabe bietet, wie wir an der betreffenden Stelle (§. 465) fanden, vier Lösungen. Durch die drei Geraden l_1, l_2 und l_3 können aber vier verschiedene gerade Kreiskegel gelegt werden, was somit sechzehn verschiedene Kugeln ergibt. Von diesen sechzehn Kugeln werden stets mindestens vier derselben reell sein.

Schneidet die gegebene Kugel alle drei Geraden l_1, l_2 und l_3, so existieren mindestens zehn reelle Kugeln, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen.

§. 477.

122. Aufgabe. Es ist eine Kugel zu construieren, welche drei gegebene in einer und derselben Ebene e liegende Geraden l_1, l_2 und l_3 berührt und durch einen gegebenen Punkt a geht.

Es ist einleuchtend, dass jede Kugel, welche die drei gegebenen Geraden berühren soll, durch einen der vier Kreise gehen muss, die dem Dreieck l_1, l_2, l_3 beziehungsweise ein- oder angeschrieben sind.

Sei K einer dieser vier Kreise, so wird der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche durch diesen Kreis gehen, die Gerade z sein, welche im Mittelpunkte o dieses Kreises senkrecht zu dessen Ebene e gezogen werden kann.

Soll nebstbei eine von diesen Kugeln durch den gegebenen Punkt a gehen, so wird der Mittelpunkt derselben von diesem Punkte a und von irgend einem beliebigen Punkte x des Kreises K einen gleichen Abstand haben, also in jener Ebene liegen müssen, welche in der Mitte der Strecke ax auf diese senkrecht gelegt wird. Besagte Ebene wird die vorgenannte Gerade z in dem verlangten Kugelmittelpunkte treffen.

Da es vier Kreise K gibt, deren jeder die drei Geraden l_1, l_2, l_3 berührt und durch jeden derselben eine Kugel geht, welche der Aufgabe entspricht, so folgt, dass die gestellte Aufgabe vier Lösungen gestattet, von welchen, wie man sich leicht überzeugen kann, mindestens drei reell sein müssen.

§. 478.

123 Aufgabe. Es ist eine Kugel zu construieren, welche drei in einer Ebene liegende Geraden l_1, l_2 und l_3 und eine gegebene Ebene E berührt.

Man wird diesfalls vorerst die vier Kreise zeichnen, welche die drei Geraden l_1, l_2 und l_3 berühren. Durch jeden dieser vier Kreise kann man (Aufgabe 103) Kugeln legen, welche die gegebene Ebene E berühren, und wird unschwer finden, dass die gestellte Aufgabe acht Auflösungen zulasse.

§. 479.

124. Aufgabe. Es ist eine Kugel zu construieren, welche drei gegebene in einer Ebene liegende Geraden l_1, l_2, l_3 und eine gegebene Kugel S berührt.

Das vorstehende Problem lässt sich unmittelbar auf die Aufgabe 102) zurückführen. Denn sind k_1, k_2, k_3 und k_4 die vier Kreise, welche die drei Geraden berühren, so hat man offenbar nichts anderes zu thun, als durch einen dieser Kreise jene Kugeln zu legen, welche die gegebene Kugel S berühren. Da aber durch jeden dieser Kreise zwei derartige Kugeln geführt werden können, so gibt es im ganzen acht Kugeln, welche der gestellten Aufgabe entsprechen.

§. 480.

125. Aufgabe. **Es ist eine Kugel zu construieren, welche durch drei gegebene Punkte a, b und c geht und eine gegebene Gerade l berührt.**

Legen wir durch die drei Punkte a, b und c eine Ebene e, und zeichnen wir in dieser Ebene den durch die drei Punkte a, b, c gehenden Kreis K, so muss durch diesen nothwendig auch die gesuchte Kugel gehen. Der Mittelpunkt dieser Kugel wird auf der Geraden z liegen, die man im Mittelpunkte des Kreises K normal zu dessen Ebene e zieht.

Bestimmen wir endlich den Durchschnittspunkt δ der gegebenen Geraden l mit der Ebene e, so stellt die von δ aus, an den Kreis K gezogene Tangente δr, gleichzeitig auch eine Kugeltangente dar.

Da nun bekanntlich sämmtliche Tangenten einer Kugel von einem und demselben Punkte δ aus gleiche Längen besitzen, so wird es, weil auch die Gerade l eine Tangente der Kugel sein soll, genügen, die Strecke δr auf derselben vom Punkte δ aus, nach der einen oder anderen Seite aufzutragen, um in dem Endpunkte p oder p' den Berührungspunkt der Geraden l mit der gesuchten Kugel zu erhalten.

Legt man ferner durch p oder durch p' eine Ebene senkrecht auf die Gerade l, so muss, wie an und für sich klar ist, diese den Mittelpunkt der gesuchten Kugel enthalten; derselbe wird sich daher im Schnitte M oder M' dieser Ebenen mit der Geraden z ergeben. Die beiden Punkte p und p' liefern zwei verschiedene Auflösungen.

§. 481.

126. Aufgabe. **Es ist eine Kugel zu construieren, welche eine gegebene Kugel S in einem bestimmten Punkte a und nebstbei eine gegebene Gerade l berührt.**

Construiert man die Tangentialebene T der Kugel S im Punkte a, so wird diese Ebene T die gegebene Gerade l in irgend einem Punkte δ treffen. Die Verbindungslinie δa ist sodann eine Tangente der Kugel im Punkte a, und da auch l eine Tangente der Kugel darstellen soll, so muss, wie bekannt, deren Berührungspunkt p von δ ebenso weit entfernt sein, als der Punkt a von δ. Es genügt daher, die Strecke δa von δ aus auf l aufzutragen, um in deren Endpunkt p den Berührungspunkt der gesuchten Kugel zu erhalten.

Legt man sodann durch p eine Ebene senkrecht auf l, so schneidet diese diejenige Gerade, welche den Berührungspunkt a mit dem Mittel-

punkte der gegebenen Kugel S verbindet, in dem Mittelpunkte M der verlangten Kugel.

Nachdem man die Strecke δa zu beiden Seiten von δ auf l auftragen kann, so ergeben sich zwei verschiedene der Aufgabe entsprechende Kugeln.

Als Specialfall der vorstehenden Aufgabe kann das folgende Problem betrachtet werden.

§. 482.

126 a. Aufgabe. Eine Kugel ist zu construieren, welche eine gegebene Ebene E in einem bestimmten Punkt p und nebstbei eine gegebene Gerade l berührt.

§. 483.

127. Aufgabe. Es ist eine Kugel zu construieren, welche eine gegebene Gerade in einem bestimmten Punkte berührt und durch zwei gegebene Punkte geht.

Sei l die gegebene Gerade, p der in derselben gegebene Berührungspunkt und seien a und b die beiden gegebenen Punkte.

Da bereits drei Punkte, nämlich p, a und b, als gegeben vorliegen, so wird die gestellte Aufgabe offenbar auf das bekannte Problem: „einem Tetraeder eine Kugel zu umschreiben", zurückgeführt sein, wenn man im Stande ist, einen vierten Punkt c der Kugel zu finden. Letzteres ist in der That sehr leicht möglich.

Man hat diesfalls, wie wir wissen, nichts weiter zu thun, als in der gegebenen Kugeltangente l einen beliebigen Punkt P anzunehmen und denselben mit einem der beiden gegebenen Punkte, etwa mit b, zu verbinden. Diese Verbindungsgerade schneidet die Kugel zum zweitenmale in einem Punkte c, welcher vermittelst der Potenzrelation:

$$\overline{Pp}^2 = Pb \,.\, Pc$$

leicht construiert werden kann.

Rascher jedoch werden wir noch auf nachstehendem Wege zum Ziele gelangen.

Der Mittelpunkt M der gesuchten Kugel wird nämlich einerseits in der Geraden z liegen, welche man im Mittelpunkte des durch die drei Punkte p, a, b bestimmten Kugelkreises auf die Ebene des letzteren normal errichtet; andererseits aber auch in der Ebene e liegen müssen, welche durch den Berührungspunkt p der gegebenen Kugeltangente l auf diese letztere senkrecht gelegt wird; derselbe muss sich

somit im Schnitte dieser Ebene e mit der vorgenannten Geraden s ergeben.

§. 484.

128. Aufgabe. Es ist eine Kugel zu construieren, welche zwei sich kreuzende Geraden in bestimmten Punkten berührt.

Sind t_1 und t_2 die beiden gegebenen, sich kreuzenden Kugeltangenten', p_1 und p_2 die in denselben gegebenen Berührungspunkte, so wird man eine Ebene e_1 senkrecht auf t_1 durch den Punkt p legen; ferner eine Ebene e_2 senkrecht auf t_2 im Punkte p_2 führen und endlich eine Ebene e_3 construieren, welche auf $p_1 p_2$ im Mittelpunkte der Strecke $p_1 p_2$ senkrecht steht. Diese drei Ebenen e_1, e_2 und e_3 schneiden sich in einem Punkte M, welcher mit p_1 und p_2 verbunden, die gleichen Strecken Mp_1 und Mp_2 bestimmt, wobei überdies Mp_1 auf t_1 und Mp_2 auf t_2 senkrecht steht.

Legt man daher durch p_1 und p_2 eine Kugel, welche den Mittelpunkt M besitzt, so wird dieselbe von den beiden Geraden t_1 und t_2 beziehungsweise in p_1 und p_2 berührt und mithin die gesuchte Kugel Σ darstellen.

§. 485.

129. Aufgabe. Es ist eine Kugel zu construieren, welche eine gegebene Gerade in einem bestimmten Punkte und außerdem zwei gegebene Ebenen berührt.

Nennen wir die beiden gegebenen Berührebenen T_1 und T_2; die gegebene Tangente der Kugel t und deren Berührungspunkt a.

Der Mittelpunkt M der gesuchten Kugel Σ wird einerseits in der Ebene e_1 liegen, welche im Punkte a senkrecht zu der Tangente t geführt wird, andererseits aber in einer der beiden Ebenen H_1 und H_2 liegen müssen, welche den Winkel zwischen den beiden Tangentialebenen T_1 und T_2 halbieren; mithin also in einer der beiden Geraden g_1 und g_2 gelegen sein, in welchen die Ebene e_1 die Ebenen H_1 und H_2 schneidet.

Selbstverständlich wird sich dann aber der Berührungspunkt p_1 der gesuchten Kugel Σ mit der Tangentialebene T_1 nothwendig in einer der beiden Geraden γ_1 und γ_2 vorfinden, welche die Orthogonalprojectionen der eben gefundenen Geraden g_1 und g_2 auf die Ebene T_1 darstellen.

Nennen wir ferner δ_1 den Schnittpunkt der Kugeltangete t mit der Tangentialebene T_1, so repräsentiert die Strecke $\delta_1 a$ die Länge sämmtlicher von δ_1 ausgehenden Kugeltangenten, mithin auch jener,

welche den Punkt δ_1 mit dem zu bestimmenden Berührungspunkt p_1 in der Ebene T_1 verbindet.

Hieraus folgt aber unmittelbar, dass dieser Berührungspunkt auf der Peripherie jenes Kreises K liegen muss, welcher aus dem Mittelpunkte δ_1 mit dem Radius $r = \delta_1 a$ in der Ebene T_1 beschrieben wird. Offenbar kann jeder der vier Punkte p, in welchen der besagte Kreis K die beiden früher gefundenen Geraden γ_1 und γ_2 schneidet, als der Berührungspunkt einer solchen Kugel betrachtet werden.

Ebenso wie die Berührungspunkte p zu je zweien auf den Geraden γ_1 und γ_2 liegen, ebenso werden sich als natürliche Folge auch die Mittelpunkte M der gesuchten Kugeln zu zweien auf den Geraden g_1 und g_2 vorfinden müssen.

§. 486.

130. Aufgabe. Es ist eine Kugel zu construieren, welche eine gegebene Gerade in einem bestimmten Punkte, so wie ferner eine gegebene Kugel berührt und endlich durch einen gegebenen Punkt geht.

Die gegebene Kugeltangente sei t und a ihr Berührungspunkt; S sei die gegebene Tangentialkugel und p derjenige Punkt, durch welchen die zu suchende Kugel gehen soll.

Wir legen zunächst eine beliebige Kugel S' derart, dass sie die Gerade t im Punkte a berührt und die gegebene Kugel S in einem Kreise K schneidet. Die Ebene dieses Kreises trifft die Tangente t in einem Punkte P, welcher in Bezug auf die Kugel S', also auch in Bezug auf die Kugel S die nämliche Potenz $\overline{Pa}^2$ hat.

Umschreibt man daher der gegebenen Kugel S aus dem Punkte P einen Kegel, welcher dieselbe längs eines Kreises c berührt, so wird der Berührungspunkt b der gegebenen Kugel S mit der zu suchenden Kugel Σ nothwendig auf diesem Kreise c liegen. Der Mittelpunkt M der zu suchenden Kugel Σ wird sich mithin auf jenem Kegel vorfinden, welcher durch diesen Kreis c geht und den Mittelpunkt O der gegebenen Kugel zum Scheitel hat.

Der Mittelpunkt M der zu suchenden Kugel Σ liegt aber nicht nur auf dem Kegel (O, c), sondern einerseits auch auf jener Ebene e_1, welche durch den Berührungspunkt a der Tangente t auf die letztere senkrecht gelegt werden kann und andererseits in jener Ebene e_2,

welche im Mittelpunkte der Strecke ap auf die letztere senkrecht geführt wird. Der Mittelpunkt M von Σ wird sonach ein Punkt sein, in welchem die Schnittgerade g der Ebenen e_1 und e_2 den vorgenannten Kegel (O, c) schneidet. Da es zwei solcher Schnittpunkte gibt, so existieren auch zwei der Aufgabe entsprechende Kugeln.

§. 487.

Einfachere Auflösung desselben Problems.

Wir wählen auf der Kugeltangente t einen beliebigen Punkt P. Die Potenz dieses Punktes in Bezug auf die zu suchende Kugel Σ ist durch $\overline{Pa}^2$ bereits gegeben. Verbinden wir daher den Punkt P mit dem gegebenen Punkte p der zu construierenden Kugel Σ, so wird die Verbindungsgerade die Kugel Σ zum zweitenmale noch in einem Punkte p_1 schneiden, welcher mit p durch die Relation:

$$Pp_1 . Pp = \overline{Pa}^2$$

verbunden ist und somit leicht construiert werden kann. Da man drei Punkte p, p_1 und a der zu bestimmenden Kugel Σ kennt, so erscheint die vorstehende Aufgabe auf die Aufgabe 102) zurückgeführt.

§. 488.

131. Aufgabe. Es ist eine Kugel zu construieren, welche eine gegebene Gerade t in einem bestimmten Punkte a, ferner eine gegebene Ebene T und endlich eine gegebene Kugel S berührt.

Diese Aufgabe, wenn auch scheinbar vom vierten Grade, lässt sich doch anstandslos mittelst Zirkel und Lineal lösen.

Construieren wir zunächst wieder eine Kugel S' derart, dass sie die gegebene Gerade t im Punkte a berührt und die gegebene Kugel S in irgend einem reellen Kreise K schneidet. Die Ebene dieses Kreises trifft die Gerade t in einem Punkte P. Die Potenz dieses Punktes P in Bezug auf die Hilfskugel S' ist gleich $\overline{Pa}^2$. Nachdem aber der Punkt P gleichzeitig in der Potenzebene der Kugeln S und S', das ist in der Ebene ihres Schnittkreises K, liegt, so ist auch $\overline{Pa}^2$ die Potenz des Punktes P in Bezug auf die gegebene Kugel S.

Umschreibt man daher vom Punkte P aus der gegebenen Kugel S einen Kegel, welcher dieselbe in dem Kreise C berühren mag, so haben alle Tangenten der Kugel S vom Punkte P bis zum Berührungs-

kreise C die gleiche Länge Pa. Die zu suchende Kugel Σ muss daher nothwendig die gegebene Kugel in einem Punkte des Kreises C berühren.

Berücksichtigen wir nun, dass die zu bestimmende Kugel Σ die Kugel S sowohl, als auch die Ebene T berühren muss, so wird, da bekanntlich die Berührungspunkte jeder Kugel mit der Kugel S und der Ebene T auf einer, durch einen festen Punkt A gehenden Geraden liegen (A ist der Ähnlichkeitspunkt von S und T, d. i. der eine oder der andere Endpunkt des zur Ebene T senkrechten Kugeldurchmessers), der Berührungspunkt der zu suchenden Kugel Σ mit der Ebene T nothwendig auf der Schnittcurve dieser Ebene mit jenem Kegel sein, welcher den ebengenannten Ähnlichkeitspunkt A zum Scheitel hat und infolge des Umstandes, dass der Berührungspunkt der festzustellenden Kugel Σ mit der gegebenen Kugel S auf diesem Kreise C liegen muss, durch den Kreis C geht.

Bezeichnete Schnittcurve ist aber (nach Satz 189) wieder ein gewisser in der Ebene T liegender Kreis C'.

Ist ferner δ der Schnittpunkt der Kugeltangente t mit der Tangentialebene T, so repräsentiert δa die Länge aller von δ aus an die zu ermittelnde Kugel Σ gelegten Tangenten. Die Verbindungsgerade des Punktes δ mit dem noch unbekannten Berührungspunkte p der Ebene T ist aber eine derartige Tangente; es ist demnach $\delta p = \delta a$.

Hieraus folgt unmittelbar, dass der Punkt p auf demjenigen Kreise C_1 liegen müsse, welcher in der Ebene T aus dem Mittelpunkte δ mit dem Radius δa beschrieben wird. Nachdem ferner der Berührungspunkt p auch auf dem früher gefundenen Kreise C' liegen muss, so ist derselbe ein Schnittpunkt der beiden obgenannten Kreise.

Heben wir einen solchen Schnittpunkt p hervor und führen wir in diesem Punkte ein Perpendikel auf die Berührebene T, so muss sich offenbar in demselben der Mittelpunkt der Kugel Σ vorfinden. Besagter Punkt wird sich einfach im Schnitte dieses Perpendikels mit jener Ebene ergeben, welche durch a senkrecht zu t gelegt werden kann.

Nachdem der Schnitt der beiden Kreise C_1 und C' in zwei Punkten erfolgt und nachdem weiters auch der andere Endpunkt A' des zur Ebene T senkrechten Durchmessers der Kugel S, als Ähnlichkeitspunkt hätte angenommen werden können, so folgt, dass es im ganzen vier der Aufgabe entsprechende Kugeln gebe.

§. 489.

132. Aufgabe. Es ist eine Kugel zu construieren, welche eine gegebene Gerade in einem bestimmten Punkte und nebstbei zwei gegebene Kugeln berührt.

Setzen wir wieder voraus, die gegebene Kugeltangente heiße t und a sei ihr Berührungspunkt. S_1 und S_2 seien die beiden gegebenen Kugeln.

Wir construieren vor allem eine Kugel S', welche t in a berührt und die Kugel S_1 in einem reellen, sonst aber ganz beliebigen Kreise K_1 schneidet. Die Ebene dieses Kreises K_1 trifft die gegebene Kugeltangente t in einem Punkte P_1, dessen Potenz sowohl in Bezug auf die Hilfskugel S', als auch in Bezug auf die gegebene Kugel S_1 gleich $\overline{P_1 a}^2$ ist.

Umschreibt man demgemäß von dem Punkte P_1 aus der gegebenen Kugel S_1 einen Kegel, welcher dieselbe längs des Kreises C_1 berühren mag, so haben alle Erzeugenden dieses Kegels, vom Punkte P_1 aus bis zu diesem Kreise C_1 gerechnet, die Länge $P_1 a$, woraus unmittelbar folgt, dass der Berührungspunkt der gegebenen Kugel S_1 mit der zu suchenden Kugel Σ nothwendig auf diesem Kreise C_1 liegen müsse.

Denken wir uns nun auch den Schnittkreis K_2 der Hilfskugel S' mit der zweiten Kugel S_2 bestimmt. (Würde S' die S_2 nicht schneiden, so kann man eine zweite die Gerade t in a berührende und S_2 schneidende Hilfskugel S'' construieren.) Die Ebene des Schnittkreises K_2 trifft die Gerade t in einem Punkte P_2, welcher sowohl in Bezug auf die Hilfskugel S', als auch in Bezug auf die gegebene Kugel S_2 die Potenz $\overline{P_2 a}^2$ besitzt.

Umschreibt man nunmehr aus diesem Punkte P_2, als Scheitel, der gegebenen Kugel S_2 einen Kegel, welcher diese längs des Kreises C_2 berühren möge, so haben wieder die sämmtlichen Tangenten der Kugel S_2 vom Punkte P_2 aus bis zu diesem Kreise C_2 die Länge $P_2 a$, woraus abermals folgt, dass der Berührungspunkt der gegebenen Kugel S_2 mit der zu bestimmenden Kugel Σ, nothwendig ein Punkt dieses Kreises C_2 sein müsse.

Fassen wir das bisher Gefundene zusammen, so erhellt, dass eine Kugel Σ zu construieren sei, welche eine gegebene Kugel S_1 in einem Punkte eines bestimmten auf ihr liegenden Kreises C_1 und eine zweite gegebene Kugel S_2 gleichfalls in einem Punkte eines bestimmten auf derselben liegenden Kreises C_2 berühren soll.

Wir wissen aber bereits, dass die Berührungspunkte einer veränderlichen Kugel mit zwei festen Kugeln nicht unabhängig von einander sind, und dass die Verbindungsgerade zweier solcher Punkte stets entweder durch den äußeren oder durch den inneren Ähnlichkeitspunkt der beiden Kugeln gehe.

Construieren wir beispielsweise den äußeren Ähnlichkeitspunkt A der beiden gegebenen Kugeln, so finden wir, dass es einfach darauf ankommt, einen Strahl durch A derart zu ziehen, dass dieser sowohl den Kreis C_1 auf S_1, als auch den Kreis C_2 auf S_2 in einem Punkte treffe.

Berücksichtigen wir aber, dass die beiden Kugeln S_1 und S_2 in Bezug auf den Ähnlichkeitspunkt A invers sind, so ist einleuchtend, dass einem Kreise auf der einen Kugel invers stets wieder ein Kreis auf der anderen Kugel entsprechen muss, oder mit anderen Worten: betrachtet man den Ähnlichkeitspunkt A als Scheitel eines Kegels, welcher durch einen Kreis auf der Kugel S_1 geht, so wird dieser Kegel die zweite Kugel stets in zwei Kreisen schneiden, von welchen der eine zu dem ersteren Kreise ähnlich, der andere hingegen zu dem ersteren Kreise invers liegt.

Von diesem Umstande kann in nachstehender Weise Gebrauch gemacht werden. Wir legen durch den Kreis C_2 auf der Kugel S_2 einen Kegel, dessen Scheitel der Ähnlichkeitspunkt A ist und denken uns den Schnitt dieses Kegels mit der ersten Kugel S_1 bestimmt. Das Gesagte ist sehr leicht durchführbar, da, wie wir eben gesehen haben, dieser Schnitt in zwei Kreise zerfällt. Von diesen Kreisen beachten wir aber nur jenen C'_2, welcher dem Kreise C_2 invers entspricht. Bezeichneter Kreis C'_2 schneidet den Kreis C_1 in zwei Punkten p_1 und p'_1. Der Construction zufolge treffen sodann die Geraden Ap_1 und Ap'_1 den Kreis C_2 auf S_2 ebenfalls in zwei Punkten p_2 und p'_2, welche, den vorhergehenden Entwickelungen gemäß, die Berührpunkte der Kugeln S_1 und S_2 mit zwei Lagen der verlangten Kugeln Σ darstellen.

Nennt man O_1 und O_2 die Mittelpunkte von S_1 und S_2, so schneiden sich die Geraden O_1p_1 und O_2p_2; $O_1p'_1$ und $O_2p'_2$ in zwei Punkten M und M', welches die Mittelpunkte der beiden Lagen der Kugel Σ sind.

Beachtet man endlich, dass man bei den vorstehenden Constructionen ebenso gut auch von dem inneren Ähnlichkeitspunkt der Kugeln S_1 und S_2 hätte Gebrauch machen können, so ergibt sich, dass im ganzen vier verschiedene Kugeln der Aufgabe entsprechen.

§. 490.

133. Aufgabe. Es ist eine Kugel von gegebenem Radius zu construieren, welche drei gegebene Ebenen in Kreisen von gleichfalls gegebenen Radien schneidet.

Seien e_1, e_2 und e_3 die drei gegebenen Ebenen; die Radien der in diesen Ebenen liegenden Kugelkreise K_1, K_2 und K_3 mögen beziehungsweise gleich r_1, r_2 und r_3 sein, ferner sei R der Radius der zu construierenden Kugel Σ.

Einer Ebene, welche eine Kugel vom Radius R in einem Kreise vom Radius r schneidet, entspricht, wie wir bereits gezeigt haben, vom Kugelmittelpunkte ein Abstand d, welcher durch $d = \sqrt{R^2 - r^2}$ ausgedrückt wird.

Im vorliegenden Falle wird daher der Mittelpunkt der zu suchenden Kugel von den drei Ebenen e_1, e_2 und e_3 beziehungsweise die Abstände $d_1 = \sqrt{R^2 - r_1^2}$; $d_2 = \sqrt{R^2 - r_2^2}$ und $d_3 = \sqrt{R^2 - r_3^2}$ besitzen. Der Kugelmittelpunkt wird sich somit im Schnitte jener Ebenen ε_1 ergeben, welche von den obgenannten Ebenen e_1, e_2, e_3 beziehungsweise die vorbezeichneten Abstände haben.

Nachdem zu jeder Ebene zwei parallele Ebenen in gegebenem Abstande gelegt werden können, entsprechen der Aufgabe acht Auflösungen.

§. 491.

134. Aufgabe. Es ist eine Kugel von bestimmtem Radius zu construieren, welche zwei gegebene Ebenen in Kreisen von bestimmten Radien trifft und auf einer gegebenen Geraden eine Sehne von bestimmter Länge abschneidet.

Seien e_1 und e_2 die beiden gegebenen Ebenen, r_1 und r_2 die Radien der in denselben liegenden Kugelkreise, l die gegebene Gerade und Δ das auf dieser Geraden durch die zu bestimmenden Kugeln abzuschneidende Sehnenstück, während R den Radius der zu suchenden Kugel repräsentiere.

Da der Mittelpunkt der festzustellenden Kugel von der Ebene e_1 den Abstand $d_1 = \sqrt{R^2 - r_1^2}$, und von der Ebene e_2 den Abstand $d_2 = \sqrt{R^2 - r_2^2}$ besitzen muss, so liegt derselbe in einer von den vier Schnittgeraden g_1, g_2, g_3, g_4 jener vier Ebenen, welche von den gegebenen Ebenen e_1 und e_2 die genannten diesbezüglichen Abstände d_1, resp. d_2 besitzen.

Nachdem ferner der Abstand δ einer Sehne, welcher eine Länge Δ in einer Kugel vom Radius R zukömmt, von dem Mittelpunkte dieser

Kugel gleich $\delta = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}\Delta^2}$ ist, so wird der Mittelpunkt der zu ermittelnden Kugel offenbar auf einem geraden Kreiscylinder liegen müssen, dessen Achse die gegebene Gerade l und dessen senkrechter Querschnitt ein Kreis vom Radius $\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}\Delta^2}$ ist. Im Schnitte dieses Cylinders mit den vier Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 liegen die Mittelpunkte der gesuchten Kugeln. Der gestellten Aufgabe entsprechen somit im allgemeinen acht verschiedene Kugellagen.

§. 492.

135. Aufgabe. Es ist eine Kugel zu construieren, welche eine gegebene Gerade in einem bestimmten Punkte berührt, durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Ebene in einem Kreise von bestimmtem Radius schneidet.

Wählen wir die gegebene Ebene E unmittelbar als horizontale Projectionsebene. Die gegebene Gerade erscheint sonach direct durch ihre Projectionen (l, l') (Taf. XVIII, Fig. 114), der auf derselben liegende Berührungspunkt durch seine Projectionen (a, a') und der gegebene Punkt durch seine Projectionen (p, p') dargestellt; ferner sei r der Radius jenes Kreises C, in welchem die zu suchende Kugel die gegebene Ebene, diesfalls also die horizontale Projectionsebene, schneiden soll.

Der Mittelpunkt der zu ermittelnden Kugel wird einerseits in jener Ebene $e^1_v e^1_h$ liegen, welche durch den Berührungspunkt (a, a') der Kugeltangente (l, l') senkrecht auf diese gelegt wird; andererseits aber, da die besagte Kugel durch die beiden Punkte (a, a') und (p, p') gehen soll, auch in jener Ebene $e^2_v e^2_h$ gelegen sein, welche durch den Mittelpunkt (m, m') der Strecke $(ap, a'p')$ zu dieser senkrecht geführt werden kann, woraus folgt, dass sich derselbe in der Schnittgeraden (s, s') dieser beiden Ebenen vorfinden müsse.

Denken wir uns ferner den Durchstoßpunkt (δ, δ') der gegebenen Geraden (l, l') mit der horizontalen Projectionsebene aufgesucht, so repräsentiert die Größe $\mu = \overline{\delta a}^2$ (δa selbstverständlich in wahrer Größe aufgefasst) die Potenz des Punktes (δ, δ') in Bezug auf die zu suchende Kugel.

Besagte Kugel soll aber, der gestellten Forderung gemäß, die horizontale Projectionsebene in einem Kreise (C, C') schneiden, welcher den gegebenen Radius r besitzt.

Die Potenz des Punktes (δ, δ') in Bezug auf diesen Kreis (C, C') muss selbstverständlich auch jener $\mu = \overline{\delta a}^2$ gleich sein, oder mit

anderen Worten: die von δ' aus an den Kreis C' gezogenen Tangenten müssen die Länge δa_0 haben.

Nachdem weiters der Kreis C' einen gegebenen Radius $r = a_0 n$ besitzen soll, so wird der Abstand ε seines Mittelpunktes von dem Punkte δ' durch

$$\sqrt{r^2 + \overline{\delta a_0}^2} = \delta' n = \varepsilon$$

dargestellt erscheinen. Dieser Mittelpunkt wird also auf einem Kreise K liegen, welcher in der horizontalen Projectionsebene aus dem Mittelpunkte δ' mit dem Radius $\delta' n$ beschrieben wird.

Da aber bekanntlich der Mittelpunkt des Kugelkreises (C, C') gleichzeitig die Orthogonalprojection des Kugelmittelpunktes auf seine Ebene ist, so folgt, dass die horizontale Projection des gesuchten Kugelmittelpunktes ebenfalls auf dem Kreise K liegen müsse. Nachdem ferner der besagte Mittelpunkt, wie vorher bewiesen, auch auf der Geraden (s, s') liegen soll, so ergibt sich seine horizontale Projection im Schnitte M'_1 (oder M'_2) der Geraden s' mit dem Kreise K. Die verticale Projection M_1 (oder M_2) dieses Punktes (M_1, M'_1) ergibt sich sofort in der Geraden s.

Die horizontale Projection M'_1 (oder M'_2) stellt gleichzeitig den Mittelpunkt (O_1, O'_1) (oder o_2, o'_2) desjenigen Kreises (C, C') von dem gegebenen Radius r dar, in welchem die gesuchte Kugel die horizontale Projectionsebene schneidet. Den durchgeführten Constructionen ist direct zu entnehmen, dass der vorliegenden Aufgabe zwei verschiedene Kugellagen entsprechen.

§. 493.

136. Aufgabe. In der Bildebene ist ein Kreis gegeben; ferner ist eine gegen die Bildebene geneigte Ebene durch ihre Bildflächtrace und durch ihren Neigungswinkel gegen die Bildebene bestimmt; es ist in dieser Ebene ein Kreis von gegebenem Radius derart zu verzeichnen, dass dessen Centralprojection der in der Bildebene gegebene Kreis sei. Das diesbezügliche Projectionscentrum ist festzustellen.

Sei K (Taf. XVIII, Fig. 115) der in der Bildebene gegebene Kreis, O dessen Mittelpunkt; E_b sei die Bildflächtrace der gegebenen Ebene, α deren Neigungswinkel gegen die Bildebene und r der Radius des zu suchenden Kreises K_0.

Der besagte Kreis K_0 soll, der gestellten Forderung gemäß, in der Ebene E in eine derartige Lage gebracht werden, dass dessen Centralprojection der in der Bildebene liegende Kreis K sei, d. h. dass derselbe mit diesem letzteren zwei nicht parallele Kreisschnitte eines Kegels darstelle.

Dieser Auffassung entsprechend, ist es aber stets möglich, durch die beiden Kreise eine Kugel zu legen. Wie somit ersichtlich, reduciert sich die gestellte Aufgabe auf die: „durch den gegebenen Kreis K in der Bildebene eine Kugel zu legen, welche die Ebene E in einem Kreise vom Radius r schneidet".

Dieser Kreis ist, wenn man sich denselben um E_b in die Bildebene nach K_0 umgelegt denkt, leicht zu construieren. Nachdem nämlich der bezeichnete Kreis, ebenso wie der Kreis K, auf einer und derselben Kugel liegen, so hat jeder Punkt der Schnittgeraden ihrer Ebenen, d. i. der Bildflächtrace E_b, in Bezug auf die beiden Kreise, die gleiche Potenz.

Zieht man daher von irgend einem Punkte x_1 der Bildflächtrace E_b eine Tangente $x_1 p_1$ an den Kreis K und gleichzeitig eine Tangente $x_1 p^0_1$ an den umgelegten Kreis K_0, so müssen diese beiden Tangenten eine gleiche Länge haben. Da aber der Radius r des Kreises K_0 gegeben ist, so ist auch die Entfernung seines Mittelpunktes o_0 von dem Punkte x_1 bekannt, denn dieselbe ergibt sich direct als die Hypotenuse $x_1 n$ eines rechtwinkeligen Dreieckes $x_1 p_1 n$, in welchem die eine Kathete durch die Tangente $x_1 p_1$ und die andere Kathete $p_1 n$ durch den gegebenen Kreisradius r dargestellt wird.

Beschreibt man daher aus dem Punkte x_1 einen Kreis mit dem Radius $x_1 n$, so muss auf demselben der Mittelpunkt o_0 des umgelegten Kreises K_0 liegen.

Fällen wir ferner von dem Mittelpunkte O des Kreises K eine Senkrechte auf die Bildflächtrace E_b, so lässt sich unschwer nachweisen, dass der Mittelpunkt o_0 des Kreises K_0 der Durchschnittspunkt dieser Senkrechten mit dem eben construierten Kreise (x_1) sein müsse. Denn, nimmt man auf der Bildflächtrace E_b jenen Punkt x_2 an, welcher, in Bezug auf die genannte Senkrechte δO als Symmetriegerade, symmetrisch gegen x_1 liegt, so erkennt man sofort, dass die von diesem Punkte x_2 aus an K gezogene Tangente ebenfalls die Länge $x_1 p_1$ besitze, dass also auch die Entfernung $o_0 x_2$ des gesuchten Mittelpunktes von dem Punkte x_2 die nämliche wie vom Punkte x_1, d. i. gleich $x_1 n$ sein müsse. Letzteres kann aber nur dann eintreten, wenn o_0 auf der Senkrechten $O\delta$ selbst liegt.

Zu dem gleichen Resultate gelangt man auch durch folgende Betrachtung. Da die beiden Kreisschnitte des Projectionskegels auf einer und derselben Kugel liegen, und deren Mittelpunkte die Fußpunkte der von dem Kugelmittelpunkte auf ihren Ebenen gefällten Perpendikel sind, so liegen diese Mittelpunkte mit dem Kugelmittelpunkte in einer und derselben zur Schnittgeraden E_b der beiden

Kreisebenen senkrechten Ebene und müssen daher, nach der Drehung um E_b, in eine und dieselbe zu E_b senkrechte Gerade $\delta O o_0$ fallen.

Ist demnach der Punkt o_0 ermittelt, so kann man auch den umgelegten Kreis K_0 mit dem Radius r verzeichnen. K_0 stellt sodann den um E_b umgelegten Kreis dar, dessen Centralprojection K ist. Zieht man an K und K_0 die beiden äußeren gemeinschaftlichen Tangenten, so schneiden sich diese bekanntlich in dem umgelegten Projectionscentrum C_0. (Die beiden inneren gemeinschaftlichen Tangenten ergeben eine zweite Auflösung der Aufgabe.) Denken wir uns ferner durch dieses umgelegte Centrum C_0 den Parallelstrahl $C_0 v$ zu der Tangente $x_1 p^0_1$ gezogen, so trifft diese bekanntlich die Centralprojection $x_1 p_1$ dieser Tangente in deren Fluchtpunkt v.

Die Parallele E_v durch v zu der Bildflächtrace E_b, stellt sodann die Fluchttrace der Kreisebene dar. Endlich wird das Projectionscentrum im Raume dargestellt durch seinen Hauptpunkt A und seine Distanz AC, wenn man das umgelegte Centrum C_0 um die Fluchttrace E_b um den gegebenen Winkel α dreht.

§. 494.

137. Aufgabe. Im Raume sind drei beliebige Kugeln S_1, S_2 und S_3 und ein Punkt A gegeben; es ist ein gerader Kreiskegel zu construieren, dessen Scheitel der gegebene Punkt A ist und welcher die drei gegebenen Kugeln berührt.

Denken wir uns, dass der zu suchende Kegel die Kugel S_1 in einem Punkte a_1 berühre, so wird die Gerade Aa_1 eine Erzeugende dieses Kegels und gleichzeitig eine Tangente der Kugel S_1 im Punkte a_1 sein müssen. Ferner wird auch die Kugel S_1 im Punkte a_1 dieselbe Tangentialebene wie der Kegel besitzen.

Hieraus lässt sich aber die Folgerung ziehen, dass der zu suchende Kreiskegel auch jenen Kreiskegel (längs einer Erzeugenden) berühren müsse, welcher aus dem Scheitel A der Kugel S_1 umschrieben ist. Das Gleiche gilt offenbar auch von den beiden anderen Kugeln S_2 und S_3, so, dass die gestellte Aufgabe identisch ist mit der: „einen geraden Kreiskegel zu construieren, welcher drei gegebene Kreiskegel Σ_1, Σ_2 und Σ_3, die einen und denselben Scheitel A haben, längs Erzeugenden berührt".

Diese Aufgabe kann demnach folgendermaßen gelöst werden.

Denken wir uns den gemeinschaftlichen Scheitel A aller vier Kegel als Mittelpunkt einer Kugel S_0, so werden die drei gegebenen Kegel Σ_1, Σ_2, Σ_3 von dieser Kugel in drei Kreisen K_1, K_2, K_3, und

der gesuchte Kegel Σ in einem Kreise K geschnitten, welcher die drei Kreise K_1, K_2 und K_3 berühren muss.

Hiernach gelangen wir zu einer zweiten Reduction und zwar zu der einfachen Aufgabe: „auf einer Kugel einen Kreis zu construieren, welcher drei gegebene Kreise auf der Kugel berührt“.

Aber selbst auch diese Aufgabe gestattet noch eine dritte Zurückführung auf ein bekanntes Problem.

Nimmt man nämlich auf der Kugel einen beliebigen Punkt an, und denkt man sich eine Ebene parallel zur Kugel-Berührebene in diesem Punkte als Projectionsebene angenommen, so projicieren sich stereographisch von diesem Punkte aus, die sämmtlichen Kreise der Kugel auf die genannte Ebene wieder als Kreise.

Sucht man daher die stereographischen Projectionen der gegebenen drei Kreise K_1, K_2, K_3 auf diese Ebene, so hat man bloß die bekannte planimetrische appolonische Aufgabe zu lösen und den gefundenen Kreis auf die Kugel zurückzuprojicieren.

Der Kegel, welcher aus dem Kugelmittelpunkte als Scheitel durch den gefundenen Kugelkreis gelegt wird, ist sodann der verlangte Kreiskegel.

XXIV. Capitel.

Constructionsaufgaben, das Rotations-Ellipsoid betreffend.

§. 495.

Um im weiteren Verlaufe unserer Discussion unnütze Wiederholungen zu vermeiden, setzen wir fest, dass, so lange nicht ausdrücklich etwas anderes verlangt oder bemerkt wird, die Rotationsachse (Z, Z') stets senkrecht auf der horizontalen Projectionsebene stehe.

Denjenigen Meridian, welcher alsdann eine zur verticalen Projectionsebene parallele Lage besitzt, werden wir den „Hauptmeridian“ und dessen Ebene die „Hauptmeridianebene“ nennen. Den ersteren wollen wir durchwegs mit K, die letztere dagegen mit η und ihre horizontale, zur Grundlinie parallele Trace mit η_h bezeichnen.

§. 496.

138. Aufgabe. Es ist der Schnitt eines Rotationsellipsoides mit einer beliebigen Ebene direct durch seine Achsen darzustellen.

Erste Auflösung: *a*) unter der Voraussetzung, dass die Hauptmeridianellipse K gezeichnet vorliegt. Die schneidende Ebene sei E_v, E_h (Taf. XVIII, Fig. 116).

Zeichnen wir vor allem die zu der schneidenden Ebene E senkrechte Meridianebene, d. i. jene durch die Rotationsachse (Z, Z') gehende Ebene, deren Horizontaltrace P_h auf der Horizontaltrace E_h der schneidenden Ebene senkrecht steht.

Die besagte Meridianebene P ist eine Symmetrieebene für die schneidende Ebene E sowohl, als auch eine Symmetrieebene für das Rotationsellipsoid und mithin gleichzeitig eine Symmetrieebene für den gesuchten Schnitt.

Die Schnittgerade (s, s') dieser Ebene P_h mit der Ebene $E_v E_h$ wird demnach eine Achse des gesuchten Schnittes sein. Die bezeichnete Schnittgerade ist einerseits durch den Punkt (h, h'), in welchem sich die Horizontaltracen P_h und E_h schneiden, und andererseits durch den Punkt (σ, σ'), in welchem die Ebene E_v E_h die Rotationsachse (Z, Z') trifft, bestimmt.

Es handelt sich somit nur darum, die Endpunkte dieser Achse (s, s') zu construieren. Die genannten Achsen-Endpunkte sind offenbar keine anderen, als die Schnittpunkte der Geraden (s, s') mit dem Ellipsoide, oder specieller mit dem in der Ebene P_h liegenden Meridiane.

Um diese Punkte zu bestimmen, drehen wir die Ebene P_h sammt der Geraden (s, s') und dem zugehörigen Meridiane um die Achse (Z, Z') in die zur Bildebene parallele Lage. Infolge dieser Drehung fällt der Meridian mit dem Hauptmeridiane K zusammen und die Gerade (s, s') kommt in eine Lage s_0, in welcher sie den Hauptmeridian K in den beiden Punkten a_0 und b_0 schneidet. Führt man diese Punkte in die Gerade (s, s') zurück, so erhält man die gesuchten Endpunkte (a, a') und (b, b') der Achse (s, s'). Der Mittelpunkt (o, o') dieser Achse ist gleichzeitig der Mittelpunkt der Schnittcurve; die zweite Achse derselben muss daher nothwendigerweise durch den letztgenannten Punkt hindurch gehen.

Nachdem die Achse (s, s') zur Horizontaltrace E_h der schneidenden Ebene $E_v E_h$ senkrecht ist, so wird die zweite Achse offenbar die durch den Mittelpunkt (o, o') parallel zu E_h gezogene Gerade $(\varepsilon, \varepsilon')$ sein. Es erübrigt demnach nur noch, deren Endpunkte zu bestimmen. Zu diesem Behufe legen wir durch $(\varepsilon, \varepsilon')$ die Parallelkreisebene ε_v. Dem durch diese Ebene bestimmten Parallelkreise (γ, γ') entspricht ein Durchmesser, welcher dem von K begrenzten Stücke $\alpha\beta$ von ε gleichkömmt. Dieser Parallelkreis (γ, γ') schneidet die Achse $(\varepsilon, \varepsilon')$, in deren Endpunkten (c, c'), (d, d'), womit die Aufgabe gelöst erscheint.

§. 497.

Zweite Auflösung: *b*) Die Hauptmeridianellipse K ist bloß durch ihre Achsen AB, (Z) und CD (Taf. XIX, Fig. 117) gegeben.

Wie im vorhergehenden Falle bestimmen wir die Schnittgerade (s, s') der schneidenden Ebene $E_v E_h$ mit der zu ihr senkrechten Meridianebene P_h. Die Endpunkte der Achse (s, s') sind deren Schnittpunkte mit dem in der Ebene P_h liegenden Meridiane. Die eine Achse dieses Meridians ist die Rotationsachse $(AB, A'B')$, die zweite Achse desselben ist der in der Ebene P_h liegende Durchmesser $(m\,n, m'n')$ des Äquatorialkreises.

Die verticale Projection des fraglichen Meridians ist mithin eine Ellipse, deren Achsen AB und $m\,n$ sind. Die Schnittpunkte der Geraden s mit dieser Ellipse bestimmen wir durch Zuhilfenahme des über AB beschriebenen Affinkreises K_0. Hierbei verwandelt sich, wie aus früherem bekannt, die Gerade s in die ihr affine Gerade s_0, welch letztere den Kreis K_0 in den beiden Punkten a_0 und b_0 schneidet. Diesen Punkten a_0 und b_0 entsprechen affin die Schnittpunkte a und b von s mit der Ellipse (AB, mn).

Die besagten Punkte a und b sind aber offenbar nichts anderes, als die Verticalprojectionen der gesuchten Achsen-Endpunkte; die Horizontalprojectionen a' und b' derselben ergeben sich unmittelbar in der Geraden s'.

Halbiert man die Strecke $(a\,b, a'\,b')$ durch den Punkt (o, o'), so repräsentiert dieser letztere Punkt den Mittelpunkt des Schnittes. Die Gerade $(\varepsilon, \varepsilon')$, welche durch denselben parallel zur Horizontaltrace E_h der schneidenden Ebene gezogen wird, stellt die zweite Achse des verlangten Schnittes dar.

Um die Endpunkte dieser Achse $(\varepsilon, \varepsilon')$ zu ermitteln, denken wir uns durch dieselbe eine horizontale Ebene gelegt, welche das Ellipsoid in einem Kreise (γ, γ') schneiden wird. Der Durchmesser dieses Kreises ist demjenigen Stücke der Geraden ε gleich, welches von der Hauptmeridianellipse $AB\,CD$ begrenzt wird. Wir haben mithin zunächst die Schnittpunkte der Geraden ε mit der Meridianellipse $ABCD$ zu bestimmen.

Letzteres vollführen wir wieder in der Weise, dass wir die Ellipse $A\,B\,C\,D$ als affin mit dem über $A\,B$ beschriebenen Kreise K_0 betrachten. Dem Punkte D entspricht sodann affin der Punkt D_0 und der Geraden $D_0 \varDelta \alpha_0$ (wobei α_0 den Schnittpunkt von ε mit K_0 und $\varDelta$ den Schnittpunkt von $D_0 \alpha_0$ mit der Affinitätsachse $A\,B$ repräsentiert) die Gerade $D \varDelta \alpha$. Hiernach ist α der eine Schnittpunkt von ε mit

der Meridianellipse und folglich der Abstand des Punktes α von der Achse AB gleichzeitig der Radius des gesuchten Parallelkreises (γ, γ'). Derselbe erscheint in horizontaler Projection in wahrer Größe concentrisch mit dem Äquatorialkreise und schneidet die Achse $(\varepsilon, \varepsilon')$ in deren Endpunkten (c, c') und (d, d').

§. 498.

Dritte Lösungsmethode: *c)* Die Hauptmeridianellipse ist nur durch deren Achsen $(AB,\ CD)$ gegeben.

Die schneidende Ebene sei wieder $E_v E_h$ (Taf. XIX, Fig. 118). Aus den vorher aufgestellten Sätzen 314) oder 329) ist bekannt, dass ein Rotationsellipsoid S in die demselben, längs des Äquatorialkreises, um- oder eingeschriebene Kugel S_0 affin transformiert werden kann, und dass hierbei die Äquatorebene die Affinitätsebene und das Achsenverhältnis der Meridianellipse den Affinitätsmodul repräsentieren.

Denken wir uns die schneidende Ebene $E_v E_h$ gleichzeitig mittransformiert, so wird mit derselben auch der gesuchte Schnitt des Ellipsoides in einen Kugelschnitt verwandelt, welcher mit dem ersteren die nämliche Horizontalprojection besitzt.

Von dieser Eigenschaft machen wir in nachstehender Weise Gebrauch. Die Ebene $E_v E_h$ schneidet die Hauptmeridianebene η_h in der Geraden (λ, λ'), welche sich affin in die Gerade (λ_0, λ') verwandelt. Ziehen wir durch den Horizontaldurchstoßpunkt (δ_0, δ'_0) dieser transformierten Geraden (λ_0, λ') eine Gerade E^0_h parallel zur Horizontaltrace E_h der gegebenen Ebene E, so repräsentiert diese offenbar die Horizontaltrace der affin verwandelten Ebene.

Bestimmen wir weiters den Schnitt dieser Ebene E^0 mit der Kugel S_0 in der Weise, wie es in Aufgabe 51) entwickelt wurde, so ergeben sich die Achsen desselben in $(a_0 b_0,\ a' b')$ und $(c_0 d_0,\ c' d')$.

Wie bereits vorher angedeutet wurde, ist die Horizontalprojection $(a' b',\ c' d')$ der transformierten Schnittcurve gleichzeitig auch die Horizontalprojection der ursprünglichen Schnittcurve. Die Verticalprojection $(a b,\ c d)$ ist sodann einfach dadurch zu bestimmen, dass man $a' b'$ und $c' d'$ als Geraden in der ursprünglich gegebenen Ebene $E_v E_h$ betrachtet und hieraus die Verticalprojectionen ab und cd ableitet.

§. 499.

139. Aufgabe. Es ist der Schnitt einer Geraden mit einem Rotationsellipsoide unter der Voraussetzung zu bestimmen, dass die Gerade die Rotationsachse schneidet.

Nebenbei sei hier bemerkt, dass wir von nun an immer annehmen werden, dass die Hauptmeridianellipse K bloß durch ihre Achsen $A B$

und CD gegeben sei, und dass, wenn wir eine andere Bestimmungsweise voraussetzen, dieses ausdrücklich erwähnen werden.

Sei (g, g') (Taf. XIX, Fig. 119) die gegebene Gerade, welche die Rotationsachse im Punkte (δ, δ') schneiden möge.

Legen wir durch diese Gerade (g, g') die Meridianebene P_h. Der in dieser Ebene liegende Meridian besitzt als die eine Achse die Rotationsachse AB und als zweite Achse den Durchmesser $(mn, m'n')$ des Äquators. Die verticale Projection dieses Meridians ist mithin jene Ellipse, welche AB und mn als Achsen besitzt.

Die zu bestimmenden Schnittpunkte sind die Schnittpunkte der Geraden (g, g') mit dem obgenannten Meridiane. Die Verticalprojectionen dieser Schnittpunkte werden sich somit als die Schnittpunkte der Geraden g mit der Ellipse (AB, mn) ergeben. Diese letzteren sind nun sehr leicht zu ermitteln.

Betrachten wir zu diesem Behufe die Ellipse $ABmn$ als affin mit dem über der Achse AB beschriebenen Kreise K_0, so repräsentieren die beiden zur Achse AB Parallelen mx und $m_0 x_0$ zwei entsprechende Geraden; es wird somit der Geraden g oder δx die Gerade g_0 oder δx_0 affin entsprechen. Die letztere Gerade δx_0 schneidet den Kreis K_0 in a_0 und b_0, welche Punkte auf δx projiciert, die verticalen Projectionen a und b der gesuchten Schnittpunkte ergeben. Die Horizontalprojectionen a' und b' können nunmehr unmittelbar aus a und b abgeleitet und in der Geraden g' festgestellt werden.

§. 500.

140. Aufgabe. Es sind die Schnittpunkte eines Rotationsellipsoides S mit einer Geraden (g, g'), welche die Rotationsachse nicht schneidet, zu ermitteln.

Erste Methode. Durch affine Transformation des Ellipsoides in eine Kugel.

Wir transformieren diesfalls das Ellipsoid S in die demselben längs des Äquators (C, C') um- oder eingeschriebene Kugel S_0. Hierbei betrachten wir die Äquatorialebene gleichzeitig als die Affinitätsebene. Die Affinitätsstrahlen stehen senkrecht auf derselben und der Affinitätsmodul ist dem Achsenverhältnisse der Meridianellipse (AB, CD) gleich.

Mit dem Ellipsoid transformieren wir zugleich auch die gegebene Gerade (g, g') (Taf. XIX, Fig. 120). Letzteres kann sehr leicht in folgender Weise bewerkstelligt werden.

Der Schnittpunkt (δ, δ') der Geraden mit der Affinitätsebene ε_v bleibt ungeändert. Ferner entspricht der Tangentialebene T_m des Ellip-

soides im Scheitel A die ihr parallele Tangentialebene $T_m{}^0$ in dem Endpunkte A_0 des entsprechenden, zur Affinitätsebene ε_v senkrechten Kugeldurchmessers. Dem Punkte m, in welchem die Gerade g die erstere Ebene trifft, entspricht sodann ein Punkt m_0 in der zweiten Ebene $T^0{}_m$, durch welchen die transformierte Gerade g_0 geht. Die letztgenannte Gerade ergibt sich somit als die Verbindungsgerade der Punkte m_0 und δ. Die horizontale Projection g' der Geraden bleibt bekanntlich bei dieser affinen Transformation ungeändert.

Bestimmen wir nun den Schnitt der Geraden (g_0, g') mit der affinen Kugel S_0 (K_0, K'_1) allenfalls durch Umlegung der Geraden (g_0, g') und des in ihrer horizontal-projicierenden Ebene P_h liegenden Kugelkreises k'_2 um g' in die Horizontalebene nach $k^0{}_2$ und $g^0{}_0$.

Die Schnittpunkte der Geraden g_0 mit k_2 ergeben sich diesfalls direct in (a_0, a') und (b_0, b'). Transformieren wir diese beiden Punkte vermittelst der Senkrechten zur Affinitätsebene ε_v in die ursprüngliche Gerade (g, g') zurück, so erhalten wir daselbst unmittelbar die gesuchten Schnittpunkte (a, a') und (b, b') der Geraden (g, g') mit dem Ellipsoide (S, S').

§. 501.

Zweite Methode.

Die gegebene Gerade sei wieder (g, g') (Taf. XIX, Fig. 121). Denken wir uns durch dieselbe eine vertical-projicierende Ebene P_v gelegt, so schneidet diese Ebene das Ellipsoid in einem Kegelschnitte, dessen eine Achse von jenen beiden Punkten begrenzt wird, in welchen die Ebene P_v oder beziehungsweise die Verticalprojection g die Meridianellipse AB, CD trifft.

Die vorgenannten Punkte (m, m') und (n, n') können vermittelst des zur Ellipse (AB, CD) affinen, über AB beschriebenen Kreises K_0, wie bereits bekannt, bestimmt werden.

Mit Berufung auf den Satz 328), ist sichergestellt, dass derjenige Kegel, welcher einen Scheitel des Ellipsoides, etwa den Scheitel (A, A') zum Mittelpunkte hat und durch irgend einen beliebigen auf dem Ellipsoide gelegenen Kegelschnitt geht, eine zur Rotationsachse senkrechte Ebene, im vorliegenden Falle also die horizontale Projectionsebene, stets in einem Kreise schneidet.

Indem wir hier von dieser Eigenschaft Gebrauch machen, denken wir uns aus dem Scheitel (A, A') jenen Kegel construiert, der durch denjenigen Kegelschnitt geht, in welchem die vertical-projicierende Ebene P_v das Ellipsoid schneidet. Dieser Kegel wird somit die horizontale Projectionsebene in einem Kreise k'_2 treffen, welcher unschwer zu construieren ist.

Da nämlich der besagte Kegelschnitt gegen die Hauptmeridianebene symmetrisch liegt, so wird sich dessen Achse $(mn, m'n')$, welche in der genannten Ebene η_h gelegen ist, aus dem Scheitel (A, A') auf die horizontale Projectionsebene als ein Durchmesser $(\mu\nu, \mu'\nu')$ des fraglichen Kreises k'_2 projicieren. Berücksichtigen wir zu diesem Behufe, dass einerseits die gesuchten Schnittpunkte der Geraden (g, g') mit dem Ellipsoide gleichzeitig auch die Schnittpunkte dieser Geraden mit demjenigen Kegelschnitte sind, in welchem die Ebene P_v das Ellipsoid schneidet, und beachten wir andererseits, dass dieser Kegelschnitt dem eben construierten Kegel angehört, so ergibt sich unmittelbar, dass diese Schnittpunkte auch die Treffpunkte der Geraden (g, g') mit dem Kegel (A, k'_2) sein werden.

Projicieren wir daher aus dem Punkte (A, A') die Punkte (m, m'_1) und (n, n'_1) der Geraden (g, g') auf die horizontale Projectionsebene nach μ'_1 und ν'_1, so ist die Verbindungsgerade γ oder $\mu'_1\nu'_1$ offenbar nichts anderes, als die Horizontaltrace jener Ebene, welche durch den Kegelscheitel (A, A') und durch die Gerade (g, g') gelegt werden kann.

Die besagte Gerade γ' schneidet den Kreis k'_2 in zwei Punkten α' und β'; es werden demnach die Geraden $A'\alpha'$ und $A'\beta'$ die horizontalen Projectionen derjenigen Erzeugenden des Kegels (A, k'_2) darstellen, welche gleichzeitig in der Ebene (A, g) liegen. Die Schnittpunkte a' und b' von g' mit $A'\alpha'$ und $A'\beta'$ repräsentieren mithin die Horizontalprojectionen jener Punkte, in welchen die Gerade (g, g') den Kegel und somit auch das Ellipsoid schneidet. Die Verticalprojectionen a und b erhalten wir unmittelbar aus a' und b' in der Geraden g.

§. 502.

141. Aufgabe. **An ein Rotationsellipsoid ist in einem Punkte desselben eine Berührebene zu construieren.**

Die Hauptmeridianellipse sei durch (AB, CD) (Taf. XIX, Fig. 122) bestimmt. Der Berührungspunkt sei bloß durch dessen Verticalprojection p gegeben.

E r s t e M e t h o d e. *a*) M i t t e l s t d e r A f f i n k u g e l.

Denken wir uns zunächst das Ellipsoid S, indem wir die Äquatorebene als die Affinitätsebene annehmen, in die längs des Äquatorialkreises eingeschriebene Kugel S_0 affin transformiert.

Hierbei wird der Punkt p des Ellipsoides in einen Punkt p_0 der Affinkugel S_0 übergehen, den wir folgendermaßen bestimmen.

Dem Scheitel A des Ellipsoides entspricht der Endpunkt A_0 des zur Affinitätsebene senkrechten Kugeldurchmessers; der Geraden pA,

welche die Affinitätsebene ε_v in $\varDelta$ schneidet, mithin die Gerade $\varDelta A_0$ und auf dieser dem Punkte p der Punkt p_0.

Da somit der Punkt p_0 der Kugel S_0 angehört, so ist dessen Horizontalprojection p' leicht zu ermitteln. Diese Horizontalprojection p' stellt aber gleichzeitig auch die horizontale Projection des dem Ellipsoide S angehörigen Punktes p dar.

Legen wir im Punkte (p_0, p') die Tangentialebene $E^0{}_v\ E^0{}_h$ an die Kugel S_0, d. i. die durch (p_0, p') gehende, auf dem Kugelradius $(Op_0, O'p')$ senkrechte Ebene, so wird dieser Ebene affin die gesuchte Berührebene des Ellipsoides S entsprechen. Der Verticaltrace $E^0{}_v$ entspricht selbstverständlich die Verticaltrace E_v. Die letztere kann, wie folgt, construiert werden. Der Punkt δ, in welchem $E^0{}_v$ die Affinitätsebene ε_v trifft, bleibt, als in der Affinitätsachse liegend, bei der Transformation ungeändert. Ferner entsprechen sich die horizontalen Berührebenen T_A und $T^0{}_A$ des Ellipsoides S und der Kugel S_0 in den Punkten A und A_0. Dem Schnittpunkt m_0 von $T^0{}_A$ und $E^0{}_v$ wird demgemäß der Schnittpunkt m von T_A und E_v entsprechen, so dass sich die Verticaltrace E_v der gesuchten Berührebene als Verbindungsgerade der Punkte δ und m ergibt.

Berücksichtigen wir ferner, dass sich die beiden Ebenen $E^0{}_v\, E^0{}_h$ und $E_v\, E_h$ in derselben der Affinitätsebene angehörenden Geraden schneiden, so werden, da diese Affinitätsebene horizontal ist, die Horizontaltracen $E^0{}_h$ und E_h zu der genannten Geraden, also auch unter einander parallel sein, woraus unmittelbar die Construction von E_h hervorgeht.

Zweite Methode. *b*) Durch directe Bestimmung der Meridiantangente im gegebenen Berührungspunkte.

Die Verticalprojection des gegebenen Berührungspunktes sei p (Taf. XIX, Fig. 123). Denken wir uns durch diesen Punkt die Meridianebene P gelegt, so schneidet diese das Ellipsoid S in einer Meridianellipse, deren Verticalprojection gleichfalls eine Ellipse sein wird, welcher die Rotationsachse AB als die eine Hauptachse entspricht und durch den Punkt p geht.

Es wird nun keinerlei Schwierigkeit bieten, die zweite Hauptachse dieser Verticalprojection ABp sowohl, als auch die Tangente derselben im Punkte p zu ermitteln.

Betrachten wir nämlich die Ellipse ABp als affin mit dem über deren Achse AB beschriebenen Kreise K_0. Hierbei stellt diese Achse AB gleichzeitig auch die Affinitätsachse dar. Die Senkrechte von p auf AB trifft den Kreis K_0 in dem dem Punkte p entsprechenden Punkte p_0.

Legt man nun an den Kreis K_0 in p_0 die Tangente t_0, welche die Affinitätsachse AB im Punkte π schneidet, so repräsentiert offenbar die gerade Verbindungslinie von π und p die der Tangente t_0 entsprechende Gerade πp oder t, d. i. die Tangente der Ellipse ABp im Punkte p.

Da die Ellipse ABp die verticale Projection der durch den Punkt p gehenden Meridianellipse darstellt, so repräsentiert auch die Gerade t die Verticalprojection der Tangente dieses Meridians im Punkte p.

Die Horizontalprojection dieser Tangente wird, wie folgt, bestimmt. Zunächst ermitteln wir die zweite Achse der Ellipse ABp. Dieselbe ist natürlich jene Gerade, welche dem zu AB senkrechten Durchmesser des Kreises K_0 affin entspricht. Ist daher d_0 ein Endpunkt dieses Durchmessers, und ziehen wir die Gerade $p_0 d_0$, welche die Affinitätsachse AB in Δ schneidet, so ist Δp die dieser Geraden $p_0 d_0$ entsprechende Gerade, auf welcher selbstverständlich auch jener Punkt d liegen muss, der dem Punkte d_0 entspricht. Es repräsentiert somit Od die zweite Halbachse der Ellipse ABp.

Der Punkt d ist aber die Verticalprojection desjenigen Punktes der Meridianellipse ABp, welcher auf dem Äquatorialkreise liegt, so dass also dessen Horizontalprojection d' (d. i. einer von den beiden Punkten, in welchem die Horizontalprojection k_1' des Äquators von der durch d senkrecht zur Grundlinie $\chi\chi$ gezogenen Geraden getroffen wird) sich unmittelbar construieren lässt. Es stellt sodann die Gerade P_h oder $O'd'$ sowohl die Horizontalprojection der gesuchten Meridianellipse, als auch die Trace der entsprechenden Meridianebene, zugleich aber auch die Horizontalprojection t' der Meridiantangente t dar.

Legen wir nun durch die Gerade (t, t') eine Ebene $E_v E_h$ senkrecht zu der obbezeichneten Meridianebene, so ist diese bereits die gesuchte Berührebene des Ellipsoides im Punkte p. Die Horizontalprojection p' des durch seine Verticalprojection p gegebenen Punktes (p, p') findet man unmittelbar in P_h.

§. 503.

142. Aufgabe. Parallel zu einer gegebenen Ebene $e_v e_h$ ist an ein Rotationsellipsoid eine Berührebene zu legen.

Erste Methode. *a*) Vermittelst einer affinen Kugel.

Wird das Ellipsoid S in die Kugel S_0 transformiert, so übergeht gleichzeitig auch die gegebene Ebene $e_v e_h$ (Taf. XIX, Fig. 124) in eine zweite Ebene, deren Horizontaltrace zu der ursprünglichen Hori-

zontaltrace e_h parallel läuft und deren Verticaltrace e^0_v mit der Verticaltrace e_v affin ist.

Die Trace e^0_v kann ohne jedwede Schwierigkeit bestimmt werden. Der Punkt δ_1, in welchem e_v die Affinitätsebene ε_v trifft, bleibt bei der Transformation selbstverständlich ungeändert. Da sich ferner die Berührebenen T_A und T^0_A in den Punkten A und A_0 des Ellipsoides resp. der Kugel wechselseitig entsprechen, so entsprechen sich auch deren Schnittpunkte m und m_0 mit den bezüglichen Tracen e_v und e^0_v. Es ergibt sich somit e^0_v als die Verbindungsgerade der Punkte δ und m_0.

Da parallele Ebenen durch affine Transformation wieder in zu einander parallele Ebenen übergehen, so wird der zur Ebene $e_v e_h$ parallelen Berührebene des Ellipsoides S die zur Ebene $e^0_v e^0_h$ parallele Berührebene der Kugel S_0 entsprechen. Bestimmen wir daher die letztere.

Der Berührungspunkt (p_0, p') derselben ist einer derjenigen beiden Punkte, in welchen der zur Ebene $e^0_v e^0_h$ senkrechte Kugeldurchmesser (Ox, Ox') die Kugel trifft. Der besagte Punkt kann allenfalls durch Drehung des eben genannten Durchmessers in die zur verticalen Projectionsebene parallele Lage ermittelt werden.

Dem so erhaltenen Punkte (p_0, p') entspricht affin der Berührungspunkt (p, p') der gesuchten Berührebene. Die Horizontalprojection desselben ist wieder p', während dessen Verticalprojection p dem Punkte p_0 affin entspricht und direct erhalten wird, wenn man irgend eine durch p_0 gehende Gerade, etwa $A_0 p_0 \Delta$, und die ihr entsprechende Gerade $A p \Delta$ zeichnet. Legt man sodann durch (p, p') eine Ebene $E_v E_h$ parallel zur gegebenen Ebene $e_v e_h$, so repräsentiert diese die gesuchte Berührebene.

§. 504.

Zweite Methode. Sei wieder $e_v e_h$ (Taf. XIX, Fig. 125) die gegebene Ebene. Wie wir bereits nachgewiesen haben, steht die Berührebene eines Rotations-Ellipsoides senkrecht auf der Meridianebene ihres Berührungspunktes. Da aber diesfalls die Berührebene zu der gegebenen Ebene $e_v e_h$ parallel sein soll, so ist einleuchtend, dass der Berührungspunkt derselben in der zur Ebene $e_v e_h$ senkrechten Meridianebene P_h liegen muss.

Ferner ist klar, dass auch die Tangente an den Meridian in der Ebene P_h in dem betreffenden Berührungspunkte parallel sein müsse zu der Schnittgeraden (s, s') der obbezeichneten Meridianebene P_h mit der gegebenen Ebene $e_v e_h$.

Die in der Ebene P_h liegende Meridianellipse hat zu der einen Achse die Rotationsachse AB, zu der anderen aber den Durchmesser $(mn, m'n')$ des Äquatorialkreises. Die Verticalprojection der Meridianellipse ist daher eine Ellipse mit den Achsen AB und mn.

Soll nun an die besagte Meridianellipse parallel zu (s, s') eine Tangente (t, t') gezogen werden, so wird deren Verticalprojection t eine Tangente der Ellipse (AB, mn) sein, welche Tangente zur Verticalprojection s parallel läuft.

Diese oberwähnte Tangente t construieren wir mittelst des über der Achse AB beschriebenen Affinkreises K_0 in der Weise, dass wir die der Geraden s affin entsprechende Gerade s_0 ermitteln, parallel zu s_0 an den Kreis K_0 die Tangente t_0 (da zwei derartige Tangenten möglich sind, gibt es offenbar auch zwei Lösungen der Aufgabe) führen und zu dem Berührungspunkte p_0 derselben den affin entsprechenden Punkt p aufsuchen. Der letztgenannte Punkt p ist sodann ein Punkt der Ellipse (AB, mn), und die Tangente t in demselben ist parallel zur Geraden s.

Andererseits repräsentiert aber auch die Gerade t die Verticalprojection der zu (s, s') parallelen Meridiantangente; die Horizontalprojection t' fällt mit der Trace P_h der Meridianebene zusammen.

Legen wir nun durch (t, t') die Ebene $E_v E_h$ parallel zu der gegebenen Ebene $e_v e_h$, so stellt diese die gesuchte Berührebene dar. Der Berührungspunkt derselben ist der Punkt (p, p').

Die zweite zu s_0 parallele Kreistangente t_0' liefert selbstverständlich eine zweite Lage der gesuchten Berührebene.

§. 505.

143. Aufgabe. **Durch eine gegebene Gerade sind an ein Rotationsellipsoid die möglichen Berührebenen zu legen.**

Erste Methode. *a*) Mittelst der affinen Kugel.

Die gegebene Gerade sei (g, g') (Taf. XX, Fig. 126). Transformieren wir zunächst das Ellipsoid S affin in die längs des Äquatorialkreises berührende Kugel S_0. Hiebei übergeht gleichzeitig die Gerade (g, g') in eine zweite (g_0, g'), deren Horizontalprojection g' mit jener der gegebenen Geraden zusammenfällt. Die Verticalprojection g_0 dagegen ist affin mit der Geraden g, und wird folgendermaßen construiert.

Der Punkt δ, in welchem g die Affinitätsebene ε_v schneidet, bleibt bei der Transformation ungeändert; ferner schneidet die Gerade g die Tangentialebene T_A des Ellipsoides im Punkte A, in einem Punkte m, welchem affin der Punkt m_0 in der entsprechenden Ebene T^0_A (Be-

rührebene der Kugel S_0 in dem Endpunkte A_0 des horizontal-projicierenden Kugeldurchmessers) entspricht. Die Gerade g_0 ergibt sich daher als Verbindungsgerade der beiden Punkte m_0 und δ.

Durch die Gerade (g_0, g') sind jetzt die Berührungsebenen an die Kugel S_0 zu legen, oder beziehungsweise deren Berührungspunkte aufzusuchen.

Zu diesem Zwecke führen wir durch den Kugelmittelpunkt (O, O') eine zur Geraden $(g_0 . g')$ senkrechte Ebene $D_v D_h$, und construieren den Schnittkreis K_2 derselben mit der Kugel S_0, sowie auch ihren Schnittpunkt (σ, σ') mit der Geraden $(g_0 . g')$. Letzteres vollführen wir, indem wir die besagte Ebene sammt den bezeichneten Schnitten um ihre Horizontaltrace D_h in die horizontale Projectionsebene nach $K_2{}^0$ resp. nach σ_0 umlegen.

Zieht man von σ_0 aus an $K^0{}_2$ die Tangenten $\sigma_0 a'_0$ und $\sigma_0 b'_0$, so ergeben, deren Berührungspunkte a'_0 und b'_0 in die Ebene $D_v D_h$ zurückgeführt, die Berührungspunkte (a_0, a') und (b_0, b') der Kugel S_0 mit den durch die Gerade (g_0, g') gehenden Berührebenen.

Den Punkten (a_0, a') und (b_0, b') entsprechen affin die Berührungspunkte (a, a') und (b, b') des Ellipsoides S mit den gesuchten durch (g, g') gehenden Berührebenen. Um beispielsweise den dem Punkte b_0 affin entsprechenden Punkt b zu finden, ziehen wir etwa die Gerade $A_0 b_0 \Delta$, welche die Affinitätsebene ε_v in Δ schneidet. — Dieser Geraden entspricht affin die Gerade ΔA, auf welche selbstverständlich der gesuchte, dem Ellipsoide S angehörende Punkt b liegen muss.

Legt man nun durch (g, g') und durch den Punkt (a, a') eine Ebene $E_v^a E_h^a$, so wird durch dieselbe eine Lage der gesuchten Berührungsebene dargestellt. Die zweite mögliche Lage ist durch die Gerade (g, g') und den Punkt (b, b') bestimmt.

§. 506.

Zweite Methode. Die gegebene Gerade sei (g, g') (Taf. XX, Fig. 127). Bestimmen wir zunächst deren Schnittpunkt (δ, δ') mit der Ebene ε_v des Äquatorialkreises (K_1, K'_1). Die Gerade $(\delta\, O,\ \delta'\, O')$, welche diesen Punkt mit dem Mittelpunkte des Ellipsoides verbindet, kann offenbar als eine Achse des Ellipsoides betrachtet werden. Die Polarebene des Punktes δ, δ' in Bezug auf das Ellipsoid wird demgemäß auf der Geraden $(\delta\, O,\ \delta'\, O')$ senkrecht stehen.

Die besagte Polarebene ist aber auch die Ebene der Berührungscurve des Ellipsoides mit dem demselben aus dem Punkte (δ, δ') umschriebenen Kegel; dieselbe muss daher durch diejenigen Punkte (m, m')

und (n, n') gehen, in welchen der Äquatorialkreis (K_1, K'_1) von den durch (δ, δ') gehenden Tangenten berührt wird. Die Ebene dieser Berührungscurve ist also die durch die Punkte (m, m') und (n, n') gehende horizontal-projicierende Ebene $e_v e_h$.

Nachdem somit die genannte Ebene horizontal-projicierend und daher parallel zu einer Meridianebene des Ellipsoides ist, so schneidet sie das letztere in einer der Meridianellipse ähnlichen Ellipse Σ, deren Mittelpunkt der Schnittpunkt (o, o') von $e_v e_h$ und $(\delta O, \delta' O')$ ist. Andererseits repräsentiert diese Ellipse Σ aber auch die Berührungscurve des Ellipsoides mit dem demselben aus dem Punkte (δ, δ') umschriebenen Kegel. Als natürliche Folgerung des eben Angeführten werden daher auch die Berührebenen, welche durch die Gerade (g, g') an den vorbezeichneten Kegel (δ, Σ) gelegt werden, gleichzeitig die durch (g, g') gehenden Tangentialebenen des Ellipsoides darstellen.

Aus diesen Erörterungen ist zu ersehen, dass die gestellte Aufgabe auf jene: „durch die Gerade (g, g') die möglichen Berührebenen an den Kegel (δ, Σ) zu legen“ reduciert erscheint.

Diese Berührebenen werden bekanntlich auch diejenigen Tangenten enthalten, welche an den Kegelschnitt Σ von dem Punkte (s, s'), in welchem die Gerade (g, g') die Ebene $e_v e_h$ des Kegelschnittes Σ trifft, gezogen werden können.

Um die genannten Tangenten zu construieren, drehen wir sowohl die Ellipse Σ, als auch den Punkt (s, s') um die Verticaltrace e_v in die verticale Projectionsebene. Dabei gelangt der Punkt (s, s') nach s_0, der Mittelpunkt (o, o') des Kegelschnittes Σ nach o_0 und die eine Achse $(mn, m'n')$ nach $m_0 n_0$.

Nachdem der Kegelschnitt Σ eine der Meridianellipse ähnliche Ellipse ist, so wird offenbar die zweite Achse $p_0 q_0$ derselben gefunden werden, wenn man durch m_0 und n_0 zu der Geraden AC, welche die Endpunkte beider Achsen der Hauptmeridianellipse $(ABCD)$ verbindet, Parallele führt. An die so erhaltene Ellipse $m_0 n_0 p_0 q_0$ können nun anstandslos von s_0 aus die Tangenten mit Zuhilfenahme des über $p_0 q_0$ beschriebenen Affinitätskreises K_0 gelegt werden.

Ist beispielsweise t_0 eine dieser Tangenten und a_0 deren Berührungspunkt, so hat man nur den letzteren in die Ebene $e_v e_h$ nach (a, a') zurückzuführen, um den Berührungspunkt einer der verlangten Berührebenen zu erhalten. Die Ebene $E_v^a E_h^a$ selbst wird bestimmt, wenn man beachtet, dass dieselbe sowohl die Gerade (g, g'), als auch den Punkt (a, a') enthalten muss.

Der zweiten von s_0 an die Ellipse $(m_0 n_0 p_0 q_0)$ möglicherweise zu ziehenden Tangente entspricht offenbar auch eine zweite Lage der

zu bestimmenden Berührebene und wird diese in voller Übereinstimmung mit dem für $E^a_v E^a_h$ gewählten Vorgang construiert werden können.

§. 507.

144. Aufgabe. **Es ist die Berührungscurve eines Rotationsellipsoides mit einem demselben aus einem gegebenen Punkte umschriebenen Kegel zu construieren.**

Erste Methode. Mit Zuhilfenahme einer affinen Kugel.

Der gegebene Kegelscheitel sei (P, P') (Taf. XX, Fig. 128). Transformieren wir das Ellipsoid S oder (AB, CD) affin in die Kugel S_0, welche demselben längs des Äquators eingeschrieben wird, so verwandelt sich gleichzeitig der aus dem Punkte (P, P') umschriebene Kegel in einen zweiten Kegel, welcher der Kugel aus jenem Punkte (P_0, P') umschrieben ist, der dem Punkte (P, P') affin entspricht.

Sucht man daher zunächst den Punkt P_0 und bestimmt man sodann die Ebene $E^0{}_v\, E^0{}_h$ der Berührungscurve der Kugel S_0 mit dem derselben aus dem Punkte (P_0, P') umschriebenen Kegel (Aufgabe 56), sowie die dieser Ebene affin entsprechende Ebene $E_v\, E_h$, so erhält man durch die letztere bereits die Ebene der gesuchten Berührcurve dargestellt.

Die Berührungscurve selbst ist der Schnitt der letztconstruierten Ebene mit dem Ellipsoide und kann dieser Schnitt direct durch seine Achsen, wie in Aufgabe 138) dargestellt werden.

Zweite, directe Methode.

Ist (P, P') (Taf. XX, Fig. 128) der gegebene, außerhalb der Fläche liegende Punkt, so wird es offenbar genügen, die Ebene der geforderten Berührungscurve zu ermitteln, da sich, wie schon vorher angedeutet, die Berührungscurve selbst einfach als Schnitt derselben mit dem Ellipsoide ergibt.

Die nachfolgende Methode hat jedoch überdies den Zweck, uns gleichzeitig die Mittel zu bieten, die Achsen der Berührungscurve auf eine möglichst einfache Weise finden zu können.

Die Ebene der Berührungscurve des dem Ellipsoide S aus dem Punkte (P, P') umschriebenen Kegels ist bekanntlich gleichzeitig die Polarebene dieses Punktes (P, P') in Bezug auf das Ellipsoid.

Denken wir uns daher durch den Punkt (P, P') eine beliebige Ebene geführt, so schneidet dieselbe (nach Satz 399, Band II) die Polarebene in einer Geraden, das Ellipsoid aber in einer Ellipse und

ist, wie wir bereits wissen, die erstere die Polare des Punktes (P, P') in Bezug auf die letztere.

Nachdem die durch (P, P') zu führende Ebene willkürlich angenommen werden kann, wählen wir diesfalls insbesondere die durch den Punkt (P, P') gehende Meridianebene P_h.

Die besagte Ebene schneidet das Ellipsoid in einem Meridiane, dessen Achsen die Rotationsachse $(AB, A'B')$ und der in der Ebene P_h liegende Durchmesser $(mn, m'n')$ des Äquators ist.

Die verticale Projection dieses Meridianes ist mithin eine Ellipse, welcher die Achsen AB und mn zukommen.

An den eben bezeichneten Meridian sind nunmehr vom Punkte (P, P') aus die beiden Tangenten zu ziehen. Selbstverständlich wird es auch hier wieder genügen, die Tangenten von P an die verticale Projection (AB, mn) dieses Meridians zu kennen.

Behufs einfacher Erreichung dieses Zweckes transformieren wir die Ellipse (AB, mn) affin in den über AB als Durchmesser beschriebenen Kreis K_0. In Verbindung mit dieser affinen Transformation übergeht gleichzeitig auch der Punkt P nach P_0. Ziehen wir somit von P_0 aus die Tangenten $P_0 a_0$ und $P_0 b_0$ an den Kreis K_0, so entsprechen den Berührungspunkten a_0 und b_0 derselben affin die Punkte a und b. Die letzteren stellen demnach die Verticalprojectionen der Berührungspunkte der von (P, P') aus an den Meridian $(ABmn, A'B'm'n')$ gezogenen Tangenten dar.

Die Horizontalprojectionen a' und b' dieser Berührpunkte ergeben sich sofort auf der Geraden P_h.

Die Gerade $(ab, a'b')$ ist als die Berührungssehne der von (P, P') aus an den Meridian (AB, mn) gezogenen Tangenten gleichzeitig die Polare des Punktes (P, P') in Bezug auf diesen Meridian, mithin also eine Gerade, welche, den früheren Erörterungen gemäß, in der Ebene der Berührungscurve liegt.

Berücksichtigen wir aber, dass das Ellipsoid durch die Meridianebene P_h des Punktes (P, P') in zwei symmetrische Hälften getheilt wird, so gelangen wir zu dem Schlusse, dass auch die Berührungscurve des von dem Punkte (P, P') aus beschriebenen Kegels gegen diese Meridianebene symmetrisch sein werde. Letzteres kann aber wieder nur dann der Fall sein, wenn die Ebene $E_v E_h$ der besagten Curve zu dieser Meridianebene senkrecht steht.

Hiermit erhalten wir also die Ebene $E_v E_h$ der gesuchten Berührungscurve als diejenige, welche durch die Gerade $(ab, a'b')$ senkrecht zu der Meridianebene P_h geführt wird.

Was die Berührungscurve selbst anbelangt, so ist, wie man ohneweiters aus den nämlichen Symmetrie-Eigenschaften folgern kann, die Gerade $(ab, a'b')$ gleichzeitig eine Achse derselben. Der Mittelpunkt (o, o') der Strecke $(ab, a'b')$ ist mithin der Mittelpunkt der Berührungscurve.

Die zweite Achse wird demnach die durch den Punkt (o, o') parallel zur Horizontaltrace E_h gezogene Gerade $(cd, c'd')$ sein, deren Endpunkte (c, c') und (d, d') wie in Aufgabe 138) ermittelt und festgestellt werden können.

§. 508.

145. Aufgabe. Es ist der Schlagschatten eines Rotationsellipsoides für centrale Beleuchtung auf die horizontale Projectionsebene zu bestimmen.

Da diesfalls die Lichtquelle als ein Punkt (P, P') (Taf. XX, Fig. 129) vorausgesetzt wird, so kann man kurz auch sagen: es ist der Schnitt des dem Ellipsoide aus dem Punkte (P, P') umschriebenen Kegels mit der horizontalen Projectionsebene zu bestimmen.

Um diese Aufgabe zu lösen, legen wir wieder, wie im vorhergehenden Falle, durch den Punkt (P, P') die Meridianebene P_h und führen an den in ihr liegenden Meridian $(ABmn, A'B'm'n')$, vermittelst des über AB beschriebenen Affinkreises K_0, von (P, P') aus die Tangenten (t_1, t'_1) und (t_2, t'_2). Die horizontalen Durchstoßpunkte (a, a') und (b, b') der eben genannten Tangenten werden bereits zwei Punkte des gesuchten Kegelschnittes darstellen. Infolge der Symmetrie des Ellipsoides, als auch des demselben aus dem Punkte (P, P') umschriebenen Kegels gegen die Meridianebene P_h ergibt sich unmittelbar, dass die Gerade $(ab, a'b')$ eine Achse des verlangten Kegelschnittes sein müsse.

Verbinden wir weiters den gegebenen Punkt (P, P') mit den Endpunkten der Rotationsachse $(AB, A'B')$, so sind (nach Satz 330) die horizontalen Durchstoßpunkte (f_1, f'_1) und (f_2, f'_2) der beiden Geraden $(PA, P'A')$ und $(PB, P'B')$ die Brennpunkte des zu bestimmenden Kegelschnittes, welcher nunmehr durch dieselben und durch die Endpunkte (a, a') und (b, b') der großen Achse vollständig bestimmt erscheint.

Die kleine Achse ist auf bekannte elementare Weise zu bestimmen. Man halbiert nämlich die Strecke $a'b'$ oder $f_1 f_2$, um den Mittelpunkt o' des Kegelschnittes (der im vorliegenden Falle eine Ellipse ist) zu erhalten und durchschneidet die zu $a'b'$ durch o' senk-

recht gezogene Gerade mit einem Kreisbogen vom Radius $a'o'$ aus einem der Punkte f_1 oder f_2 in den Punkten c' und d'.

§. 509.

146. Aufgabe. Es ist die Ebene der Berührungscurve eines Rotationsellipsoides mit einem demselben, parallel zu einer gegebenen Geraden umschriebenen Cylinders zu ermitteln.

Erste Methode. Mit Zuhilfenahme einer affinen Kugel.

Ist g die gegebene Gerade, so wird man, um möglichst einfach zum Ziele zu gelangen, das Ellipsoid (AB, CD) oder S affin in die dasselbe längs des Äquatorialkreises berührende Kugel S_0 transformieren. Dass hierbei gleichzeitig auch die gegebene Gerade g in eine Gerade g_0 übergehe, ist mit Zugrundelegung des Vorhergegangenen selbstverständlich.

Dem Cylinder, welcher dem Ellipsoide parallel zu g umschrieben wird, entspricht jener Cylinder, welchen man der affinen Kugel S_0 parallel zur Geraden g_0 umschreiben kann.

Es wird folglich auch der Ebene der Berührungscurve des ersteren die Ebene der Berührungscurve des letzteren entsprechen.

Die Ebene $E^0{}_h E^0{}_v$ der Berührungscurve des der Kugel parallel zur Geraden g_0 umschriebenen Cylinders ist um so leichter zu construieren, als bekannt ist, dass die besagte Ebene jene sei, welche durch den Kugelmittelpunkt senkrecht zur Geraden g_0 geführt werden kann. Wird nun die so erhaltene Ebene $E^0{}_v E^0{}_h$ affin zurücktransformiert, so findet man die Ebene $E_v E_h$ der gesuchten Berührungscurve, deren Schnitt mit dem Ellipsoide auf die bereits mehrfach besprochene Weise anstandslos construiert werden kann.

Zweite, directe Methode.

Diese Methode bietet den Vortheil, dass mit Zuhilfenahme derselben nicht nur die Ebene der Berührungscurve an und für sich, sondern auch die Achsen der letzteren unmittelbar bestimmbar sind.

Sei (g, g') (Taf. XX, Fig. 130) die gegebene Gerade. Die verlangte Berührungscurve ist, wie wir wissen, der Ort der Berührungspunkte aller Berührungsebenen, welche parallel zu der Geraden (g, g') an das Ellipsoid gelegt werden können.

Führen wir an die horizontale Projection K_1' des Äquatorialkreises die beiden Tangenten $T^1{}_h$ und $T^2{}_h$ parallel zur Horizontalprojection g' der gegebenen Geraden. Besagte Tangenten, welche den Kreis K_1' in den Punkten c' und d' berühren, stellen offenbar die

Horizontaltracen zweier zur Geraden (g, g') parallelen Berührebenen des Ellipsoides dar, während die Punkte c' und d' die Horizontalprojectionen ihrer auf dem Äquator liegenden Berührungspunkte (c, c') und (d, d') repräsentieren.

Die genannten Punkte sind bereits zwei der gesuchten Berührungscurve angehörende Punkte. Nachdem dieselben aber überdies die Berührungspunkte des Ellipsoides mit zwei zu einander parallelen Berührebenen $T^1{}_h$ und $T^2{}_h$ sind, so wird deren Verbindungsgerade einen Durchmesser, resp. eine Achse des Ellipsoides und mithin auch eine Achse der gesuchten Berührungscurve darstellen.

Die zweite Achse der Berührungscurve ist senkrecht zu $(cd, c'd')$ und muss, da $(cd, c'd')$ horizontal ist, in der zu $(cd, c'd')$ senkrechten Meridianebene P_h des Ellipsoides liegen. Da diese Meridianebene parallel zur Geraden (g, g') ist, wird man an den in derselben liegenden Meridian parallele Tangenten zu der Geraden (g, g') ziehen können. Die so bestimmten Berührungspunkte (a, a') und (b, b') dieser Tangenten gehören sodann gleichfalls der Berührungscurve an und werden, wie wir sogleich sehen werden, gleichzeitig die Endpunkte der zweiten Achse der Berührungscurve darstellen.

Die in der Meridianebene P_h liegende Meridianellipse hat zur Verticalprojection eine Ellipse, deren eine Achse die Rotationsachse AB und deren zweite Achse mn die Verticalprojection des in der Ebene P_h liegenden Äquatorialdurchmessers $(mn, m'n')$ ist.

Es wird demnach hinreichen, an diese Verticalprojection, mit Zuhilfenahme des über AB als Durchmesser beschriebenen affinen Kreises K_0, die zu g parallelen Tangenten t_1 und t_2 zu legen und deren Berührungspunkte a und b zu construieren. Die Geraden t_1 und t_2 repräsentieren sodann die Verticalprojectionen der zu (g, g') parallelen Tangenten des in der Ebene P_h liegenden Meridians, während a und b die Verticalprojectionen ihrer Berührungspunkte darstellen. Die Horizontalprojectionen a' und b' erhält man unmittelbar in P_h.

Die Gerade $(ab, a'b')$ ist ein Durchmesser der Meridianellipse und folglich auch ein Durchmesser des Ellipsoides. Die Endpunkte (a, a') und (b, b') derselben gehören der Berührungscurve an und, da $(ab, a'b')$ zu der Achse $(cd, c'd')$ der Berührungscurve senkrecht ist, stellt die besagte Gerade selbst die zweite Achse derselben dar. Die Ebene $E_v E_h$ der Berührungscurve lässt sich nunmehr als die Ebene der beiden Geraden ab und cd leicht construieren.

§. 510.

147. Aufgabe. Es ist der Schlagschatten eines Rotationsellipsoides, unter Voraussetzung paralleler Beleuchtung, auf die horizontale Projectionsebene zu construieren, oder mit anderen Worten: Es ist die Horizontaltrace eines dem Rotations-Ellipsoide umschriebenen Cylinders zu ermitteln.

Die Richtung der Cylindererzeugenden sei (g, g') (Taf. XX, Fig. 131).

Der Schnitt des dem Ellipsoide umschriebenen Cylinders mit der horizontalen Projectionsebene kann auf zweifache Weise erzeugt gedacht werden und zwar das einemal als Ort der Durchstoßpunkte aller zur Geraden (g, g') parallelen Tangenten des Ellipsoides, das anderemal dagegen als Enveloppe der horizontalen Tracen aller zur Geraden (g, g') parallelen Tangentialebenen des Ellipsoides.

Führt man demnach an die Horizontalprojection K_1' des Äquatorialkreises zwei zu g' parallele Tangenten $T^1{}_h$ und $T^2{}_h$, welche diesen Kreis beziehungsweise in c' und d' berühren mögen, so repräsentieren dieselben die Horizontaltracen zweier horizontal-projicierenden, zur Geraden (g, g') parallelen Tangentialebenen des Ellipsoides und mithin gleichzeitig zwei parallele Tangenten desjenigen Kegelschnittes Σ_s, in welchem der dem Ellipsoid, parallel zur Geraden (g, g'), umschriebene Cylinder die horizontale Projectionsebene schneidet.

Führen wir ferner durch die beiden Scheitel (A, A') und (B, B') des Ellipsoides Parallele zu der Geraden (g, g'), so treffen diese die horizontale Projectionsebene in zwei Punkten f_1 und f_2, welche (nach Satz 330) die Brennpunkte des gesuchten Kegelschnittes Σ_s darstellen.

Die Gerade $f_1 f_2$ ist somit die Richtung der einen Achse des Kegelschnittes und, da $f_1 f_2$ zu den Kegelschnittstangenten $T^1{}_h$ und $T^2{}_h$ parallel läuft, so stellt der Abstand dieser letzteren bereits die Länge der kleinen Achse dieses Kegelschnittes Σ_s dar.

Die kleine Achse $c_s d_s$ selbst wird der Lage nach erhalten, wenn man im Mittelpunkte o_s der Strecke $f_1 f_2$ (Mittelpunkt des Kegelschnittes Σ_s) eine Senkrechte zu $f_1 f_2$ zieht und sie von den Tangenten $T^1{}_h$ und $T^2{}_h$ begrenzen lässt. Die große Achse $a_s b_s$ ergibt sich auf bekanntem elementaren Wege.

Die vorstehende Aufgabe lässt sich auch zu einer eleganten Lösung des folgenden Problemes verwenden, welches bereits früher, jedoch auf anderem Wege (Aufgabe 143) durchgeführt wurde.

§. 511.

148. Aufgabe. Durch eine gegebene Gerade sollen an ein Rotationsellipsoid Berührebenen gelegt werden.

Die gegebene Gerade sei durch ihre Projectionen g und g' (Taf. XX, Fig. 132) gegeben.

Denken wir uns parallel zu der gegebenen Geraden (g, g') dem Ellipsoide einen Cylinder umschrieben, so werden die durch diese Gerade (g, g') gehenden Berührebenen des Cylinders gleichzeitig auch die gesuchten Berührebenen des Ellipsoides sein.

Die Horizontaltracen dieser Berührebenen müssen sodann aber nothwendig diejenigen Tangenten der Horizontalspur Σ_s des parallel zu (g, g') dem Ellipsoide umschriebenen Cylinders sein, welche gleichzeitig durch den horizontalen Durchstoßpunkt h' der gegebenen Geraden gehen.

Bestimmen wir demnach die Brennpunkte f_1 und f_2 der Horizontalspur Σ_s des genannten Cylinders, sowie auch die große und die kleine Achse $a_s b_s$ resp. $c_s d_s$ derselben, so wird man nichts anderes zu thun haben, als durch h' an die Ellipse $(a_s b_s, c_s d_s)$ die Tangenten zu ziehen, um durch diese letzteren bereits die Horizontaltracen der gesuchten Ebenen zu erhalten.

Dieser Forderung dürfte folgendermaßen wohl am einfachsten entsprochen werden.

Man beschreibt einen der Ellipse Σ_s concentrischen Kreis K_2, dessen Radius der großen Halbachse der Ellipse gleich ist. Ferner verzeichne man einen Kreis K_3 über der Geraden $h'f_2$ als Durchmesser. Diese beiden Kreise K_2 und K_3 schneiden sich in zwei Punkten α und β, welche mit h' verbunden, bereits die gesuchten Tangenten E^1_h und E^2_h, d. i. die Horizontaltracen der zu construierenden Berührebenen ergeben.

Letzteres folgt aus dem bekannten Satze, dass die Fußpunkte $\alpha\beta$ der von einem Brennpunkte f_2 auf die Ellipsentangenten gefällten Perpendikel auf dem Kreise K_2 liegen müssen.

§. 512.

Wir wollen nun darauf übergehen, einige Probleme zu lösen, welche verschiedene Anwendungen der bisher durchgeführten Constructionsaufgaben in sich schließen.

149. Aufgabe. Es sind eine Ellipse und eine Hyperbel in einer derartigen Lage gegeben, dass die imaginäre Achse der letzteren in eine Achse der ersteren fällt; es sind durch directe Construction

(d. h. ohne jedwede Curvenzeichnung) die gemeinschaftlichen Punkte beider Kegelschnitte zu finden.

Seien (AB, CD) (Taf. XXI, Fig. 133) die Achsen der gegebenen Ellipse E. Die imaginäre Achse der gleichfalls gegebenen Hyperbel H falle, der Lage nach, mit der Achse AB der Ellipse zusammen. Der Mittelpunkt der Hyperbel H sei M, die reelle Achse derselben sei cd und eine Asymptote g.

Denken wir uns die gemeinsame Achse AB als Rotationsachse angenommen, so wird bei der Drehung von E und H um AB, die Ellipse E ein Rotationsellipsoid und die Hyperbel H ein einfaches windschiefes Rotationshyperboloid beschreiben, während die gemeinschaftlichen Punkte beider Curven gemeinschaftliche Parallelkreise beider Rotationsflächen durchlaufen. Der Äquatorialkreis des Ellipsoides und der Kehlkreis des Rotationshyperboloides besitzen concentrische horizontale Projectionen K'_1 und K'_2, deren Radien beziehungsweise den Halbachsen CO und cM gleich sind.

Ziehen wir an die horizontale Projection K'_2 des Kehlkreises eine zur Grundlinie parallele Gerade g', so stellt diese bekanntlich die horizontale Projection einer zur verticalen Projectionsebene parallelen Erzeugenden des Rotationshyperboloides dar, deren Verticalprojection mit der Asymptote g der gegebenen Hyperbel zusammenfällt.

Bestimmen wir die Schnittpunkte dieser Erzeugenden mit dem Rotationsellipsoide und legen wir zu diesem Behufe durch die Gerade (g, g') eine zur verticalen Projectionsebene parallele Ebene ε_h, so schneidet diese das Rotationsellipsoid in einer Ellipse, welche mit der Hauptmeridianellipse $ABCD$ ähnlich und ähnlich gelegen ist. Die eine Achse dieser Ellipse ist durch das Sehnenstück $\gamma' \delta'$ der Geraden g' auf dem Äquatorialkreise K'_1 dargestellt. Die verticale Projection dieser Schnittellipse ist, wie bereits angedeutet, mit der Hauptmeridianellipse $ABCD$ ähnlich und concentrisch, und entspricht derselben eine der vorgenannten Sehne gleiche Achse $\gamma\delta$.

Auf Grund dieser Daten lassen sich nunmehr auch die Endpunkte α und β der anderen Achse vermittelst der ähnlichen Dreiecke AOC, $\alpha O \gamma$ und BOC, $\beta O \gamma$ leicht construieren.

Die Schnittpunkte P_0 und (P_0) der Ellipse $(\alpha\beta, \gamma\delta)$ mit der Geraden g sind die Verticalprojectionen der Schnittpunkte des Ellipsoides mit der Geraden (g, g') und werden auf bekannte Weise vermittelst des über $\alpha\beta$ als Durchmesser beschriebenen affinen Kreises K_0 construiert. Die Horizontalprojectionen besagter Schnittpunkte ergeben sich unmittelbar auf g' in P'_0 und (P'_0).

Die Punkte (P_0, P'_0) und $[(P_0), (P'_0)]$ gehören beiden Flächen gleichzeitig an, sind daher auch Punkte der beiden Parallelkreise (K_4, K'_4) und (K_3, K'_3), längs welchen sich die beiden Rotationsflächen schneiden. Die gemeinschaftlichen Sehnen $P_2(P_2)$ und $P_1(P_1)$ der beiden Kegelschnitte können somit direct bestimmt werden. Die Endpunkte derselben gehören selbstverständlich den Meridianen E und H an, stellen mithin die verlangten Schnittpunkte der Ellipse E mit der Hyperbel H dar.

Auf demselben Principe beruhend, kann auch das nachstehende Problem gelöst werden.

§. 513.

150. Aufgabe. Eine Ellipse und eine Hyperbel sind gegeben; die imaginäre Achse der Hyperbel und die eine Achse der Ellipse liegen in einer und derselben Geraden; durch directe Construction (d. h. ohne Curvenzeichnung) sind die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kegelschnitte zu bestimmen.

Obwohl die constructive Durchführung des gestellten Problems an dieser Stelle überflüssig erscheinen dürfte, so wollen wir denn doch zum besseren Verständnis der Lösung von einer Skizze Gebrauch machen.

Es sei E (Taf. XXI, Fig. 134) die gegebene Ellipse und H die gegebene Hyperbel, deren imaginäre Achse mit der großen Achse der Ellipse E zusammenfallen möge.

Denken wir uns an die beiden Curven die gemeinschaftliche Tangente T gezogen.

Betrachten wir ferner die gemeinschaftliche Achse Z der beiden Curven E und H als Rotationsachse, so wird bei der Drehung um dieselbe die Ellipse E ein Rotations-Ellipsoid und die Hyperbel H ein windschiefes Rotations-Hyperboloid erzeugen.

Die beiden gegebenen Curven E und H können gleichzeitig als Hauptmeridiane der beiden Rotationsflächen aufgefasst werden.

Die gemeinschaftliche Tangente T von E und H kann ohne weiters als die Verticaltrace einer vertical-projicierenden, beiden Flächen gemeinsamen Berührebene angesehen werden. Die besagte Ebene muss sodann ebenso wie jede andere Berührebene eines windschiefen Hyperboloides eine (eigentlich zwei verschiedenen Systemen angehörende) Erzeugende enthalten.

Denken wir uns nun auch diese Ebene sammt der letztgenannten Erzeugenden um Z gedreht, so wird die Ebene einen die beiden Rotationsflächen gemeinschaftlich berührenden Rotationskegel beschreiben,

während die Erzeugende nach und nach alle möglichen Lagen auf dem Rotations-Hyperboloide annehmen wird.

Denken wir uns daher durch eine beliebige Erzeugende des Rotations-Hyperboloides (nach der einen oder der anderen in der Aufgabe 143 entwickelten Methode) an das Rotations-Ellipsoid eine Berührebene gelegt, so wird dieselbe nothwendig dem vorgenannten Kegel (oder einem zweiten ebenfalls ganz bestimmten Kegel) als Tangentialebene angehören und überdies auch eine Berührebene des Rotationshyperboloides darstellen.

Stellen wir uns vor, dass diese Ebene durch Drehung um die Achse Z in eine vertical-projicierende Lage gebracht worden wäre, so wird deren Verticaltrace sowohl die Contour E, als auch die Contour H der beiden Rotationsflächen berühren und mithin eine der gesuchten gemeinschaftlichen Tangenten repräsentieren. Eine zweite Lage ist in Bezug auf Z zu dieser Tangente symmetrisch. Ebenso ergeben sich durch Benützung der zweiten Tangentialebene des Ellipsoides, welche durch die gewählte Erzeugende des Hyperboloides gelegt werden kann, zwei weitere gegen Z symmetrische Lagen.

Eine Reihe anderer Aufgaben, die sich hier anschließen lassen, besteht in der Bestimmung von Rotationsflächen, welche durch Punkte, Tangentialebenen oder durch andere besondere Bedingungen gegeben sind.

§. 514.

151. Aufgabe. Es ist die Rotationsachse eines Rotationsellipsoides und ein Punkt auf der Fläche gegeben, man soll die Hauptmeridianellipse construieren, d. i. deren zweite Achse bestimmen.

Die gegebene, zur horizontalen Projectionsebene senkrecht stehende Rotationsachse sei $(AB, A'B')$ (Taf. XXI, Fig. 135); (P, P') sei der gegebene Punkt.

Den vorliegenden Bestimmungsstücken gemäß, repräsentiert die Rotationsachse gleichzeitig auch eine Achse der Hauptmeridianellipse E. Denken wir uns den gegebenen Punkt (P, P') um $(AB, A'B')$ so lange gedreht, bis derselbe in die Ebene η_h des Hauptmeridians E gelangt, so stellt in dieser Lage dessen Verticalprojection P_1 einen Punkt der gesuchten Meridianellipse E dar. Die zweite (kleine) Achse der letzteren kann folgendermaßen bestimmt werden.

Beschreiben wir zunächst über der Rotationsachse AB als Durchmesser den Kreis K_0 und betrachten wir denselben als affin mit der Ellipse ABP_1, so entspricht dem Punkte P_1 der Punkt P_0, in welchem der affine Kreis K_0 von der durch P_1 senkrecht zu AB gezogenen

Geraden geschnitten wird. Ziehen wir ferner durch den Mittelpunkt O von AB die zu AB senkrechte Gerade OD_0, so stellt diese die Lage der zu bestimmenden Achse dar. Der Schnittpunkt D_0 mit dem Kreise K_0 entspricht affin dem einen Endpunkte D dieser Achse und kann der letztere somit anstandslos construiert werden. Führt man nämlich die Gerade $P_0 D_0$, welche AB in δ trifft, so entspricht derselben affin die Gerade δP_1. Dort wo $P_1 \delta$ die Gerade OD_0 schneidet erhält man bereits den gesuchten Achsenendpunkt D.

Beschreibt man endlich noch aus der Horizontalprojection O' des Mittelpunktes (O, O') einen Kreis K'_1 mit einem der Halbachse OD gleichen Radius, so stellt dieser den Äquatorialkreis K'_1 des Ellipsoides dar.

§. 515.

152. Aufgabe. Die Rotationsachse eines Rotationsellipsoides ist der Länge und Lage nach, so wie ferner eine Tangentialebene desselben gegeben; es ist der Äquatorialkreis der Größe und Lage nach zu bestimmen.

Die horizontale Projectionsebene wählen wir senkrecht zu der gegebenen Rotationsachse. Dieser Voraussetzung gemäß erscheint die letztere als die horizontal-projicierende Gerade $(AB, A'B')$ (Taf. XXI, Fig. 136) dargestellt. Die gegebene Tangentialebene T des Ellipsoides besitze unter den obwaltenden Verhältnissen die Tracen T_v und T_h.

Drehen wir diese Ebene T so lange um die Rotationsachse $(AB, A'B')$, bis dieselbe in eine zur verticalen Projectionsebene senkrechte Lage $t_v t_h$ gelangt, so wird die Verticaltrace t_v der obbezeichneten Ebene gleichzeitig eine Tangente an die verticale Contour des Ellipsoides, d. i. eine Tangente der gesuchten Hauptmeridianellipse sein. Es handelt sich somit bloß um die Construction der zweiten Achse CD einer Ellipse, von welcher bereits eine Achse AB und eine Tangente t_v als bekannt vorliegt.

Diese Construction kann vermittelst des über AB als Durchmesser beschriebenen Kreises K_0 durchgeführt werden.

Schneidet die Tangente t_v die Affinitätsachse AB im Punkte σ, so ist die Tangente t_0 des Kreises K_0, welche durch diesen Punkt geht, die der Geraden t_v entsprechende Gerade. Fällt man von dem Berührungspunkte p_0 des Kreises K_0 mit der Tangente t_0 eine Senkrechte auf die Affinitätsachse AB, so trifft dieselbe die Tangente t_v in den dem Punkte p_0 entsprechenden Punkt p. Dieser letztere ist bereits der Berührungspunkt der Tangente t_v mit der zu bestimmenden Hauptmeridian-Ellipse E.

Errichten wir endlich im Mittelpunkte O der Strecke AB auf die gegebene Achse AB eine Senkrechte OD_0, so repräsentiert diese die Lage der zweiten Achse der Meridianellipse. Dieselbe Gerade OD_0 schneidet den Kreis K_0 in dem Punkte D_0, welchem affin ein Endpunkt D der gesuchten zweiten Achse entsprechen wird. Behufs Bestimmung des Punktes D führen wir die Gerade $p_0 D_0$, welche die Affinitätsachse AB in δ trifft, und bestimmen die ihr entsprechende Gerade $p\delta$, welche OD_0 bereits in dem gesuchten Punkte D schneidet. Macht man endlich $OC = OD$, so ist CD die gesuchte zweite Achse.

Der aus dem Mittelpunkte O' mit dem Radius $R = OD$ beschriebene Kreis K'_1 stellt sodann die Horizontalprojection des gesuchten Äquatorialkreises (K, K'_1) dar.

§. 516.

153. Aufgabe. Von einem Rotationsellipsoide sind die Rotationsachse der Lage (nicht auch der Länge) nach, der Mittelpunkt der Fläche in dieser Achse und zwei auf der Fläche liegende Punkte gegeben; es ist die Größe der Rotationsachse und jene des Äquatorialkreises zu bestimmen.

Wählen wir wieder die horizontale Projectionsebene senkrecht zu der Rotationsachse (durch geeignete Transformation stets zu erreichen), so wird sich die letztere als die horizontal-projicierende Gerade (Z, Z') (Taf. XXI, Fig. 137) darstellen. Der Mittelpunkt des Ellipsoides sei (O, O'); die beiden gegebenen Punkte seien durch (a, a') und (b, b') bestimmt.

Vor allem ist diesfalls ersichtlich, dass die Gerade Z die eine und die Gerade Y, welche in O senkrecht auf Z gezogen wird, die zweite Achse der Hauptmeridianellipse der Lage nach repräsentieren werden.

Denken wir uns weiters die beiden Punkte (a, a') und (b, b') um (Z, Z') so lange gedreht, bis dieselben in die Hauptmeridianebene, d. i. in die durch (Z, Z') zur verticalen Projectionsebene parallel gelegte Ebene η_h gelangen, so stellen dieselben in dieser Lage (a_0, a'_0) und (b_0, b'_0) bereits zwei Punkte der Hauptmeridian-Ellipse dar.

Wie nunmehr unschwer einzusehen, wird es sich bloß darum handeln, die Achsenlängen einer Ellipse E zu finden, von welcher die Lagen der Achsen (Z und Y), sowie zwei Punkte a_0 und b_0 bekannt sind. Diese Aufgabe wurde aber bereits früher gelöst und können wir daher anstandslos auf die dort (Aufgabe 100, Band I) gegebene Construction verweisen.

Beschreiben wir schließlich aus dem Punkte O' einen Kreis K'_1 mit dem Radius $R = OC = OD$, so repräsentiert dieser die Horizontalprojection des gesuchten Äquatorialkreises.

§. 517.

154. Aufgabe. Ein bifocales Ellipsoid ist durch vier Tangentialebenen und einen Brennpunkt gegeben; die Rotationsachse und der Äquator sind zu construieren.

Die vier Tangentialebenen seien t_1, t_2, t_3, t_4 und F_1 sei der gegebene Brennpunkt. Fällt man von F_1 auf diese vier Ebenen die betreffenden Perpendikel $F_1 a_1$, $F_1 a_2$, $F_1 a_3$ und $F_1 a_4$, so liegen (nach Satz 323) die Fußpunkte a_1, a_2, a_3, a_4 derselben auf einer mit dem Ellipsoide concentrischen Kugel, deren Radius die grosse Halbachse der Meridianellipse ist.

Man hat also zunächst den Mittelpunkt O der durch die vier Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 gehenden Kugel zu ermitteln, um durch denselben gleichzeitig auch den Mittelpunkt des Ellipsoides dargestellt zu erhalten. Die Verbindungsgerade OF_1 bestimmt sodann die Rotationsachse. Auf derselben erhält man den zweiten Brennpunkt F_2, indem man einfach $OF_2 = OF_1$ macht.

Nun lässt sich ebenso leicht auch die Länge der großen und der kleinen Achse der Meridianellipse feststellen.

Zunächst wissen wir nämlich, dass der Berührungspunkt einer Tangentialebene, beispielsweise der Berührungspunkt p_1 von t_1, der Glanzpunkt dieser Ebene für die beiden Brennpunkte F_1 und F_2 ist. Verlängert man daher das Perpendikel $F_1 a_1$ und trägt die Strecke $F_1 a_1$ nochmals von a_1 bis α_1 auf, so wird die Gerade $F_2 \alpha_1$ die Ebene t_1 in dem Glanzpunkte p_1 von F_1 und F_2, d. h. in dem Berührungspunkte schneiden.

Die Summe der Leitstrahlen $F_1 p_1 + F_2 p_1 = F_2 \alpha_1$ gibt nunmehr die Länge der Rotationsachse AB an. Aus der letzteren und aus der Distanz der Brennpunkte F_1 und F_2 bestimmt man sodann die kleine Achse CD der Meridianellipse, oder was dasselbe ist, den Durchmesser des Äquatorialkreises.

§. 518.

155. Aufgabe. Ein bifocales Rotationsellipsoid ist durch einen Brennpunkt, zwei Tangentialebenen und den Berührungspunkt der einen dieser beiden Ebenen gegeben; es ist die Rotationsachse und der Äquatorialkreis zu construieren.

Der gegebene Brennpunkt sei F_1, die beiden Tangentialebenen seien t_1 und t_2 und der Berührungspunkt von t_1 werde durch p_1 (Taf. XXI, Fig. 138) dargestellt.

Fällen wir zunächst von dem gegebenen Brennpunkte F_1 die Senkrechte $F_1 a_1$ auf die Berührebene t_1 und tragen wir auf derselben von dem Fußpunkt a_1 die Strecke $F_1 a_1$ nochmals bis α_1 auf, so dass die beiden Punkte F_1 und α_1 eine gegen die Ebene t_1 symmetrische Lage annehmen. Verbindet man nun sowohl F_1 als auch α_1 mit dem gegebenen Berührungspunkte p_1, so liegen diese beiden Geraden in einer und derselben zu t_1 senkrechten Ebene und schließen mit t_1 die einander gleichen Winkel $F_1 p_1 a_1$ und $\alpha_1 p_1 a_1$ ein. Hieraus folgt, dass die Gerade $\alpha_1 p_1$ durch den zweiten noch unbekannten Brennpunkt F_2 gehen müsse.

Fällen wir weiters auf die zweite der gegebenen Tangentialebenen t_2 des Ellipsoides, vom Brennpunkte F_1 die Senkrechte $F_1 a_2$, und tragen wir die Strecke $F_1 a_2$ von ihrem Fußpunkte a_2 nochmals nach α_2 auf, so dass F_1 und α_2 symmetrisch gegen die Ebene t_2 liegen.

Stellen wir uns vor, wir hätten den zweiten Brennpunkt F_2, der, wie wir vorher zeigten, auf der Geraden $\alpha_1 p_1$ liegen muss, bereits gefunden. Denken wir uns ferner den Punkt F_2 mit dem Punkte α_2 verbunden, so wird diese Verbindungsgerade $F_2 \alpha_2$ die Ebene t_2 in deren Berührungspunkte p_2 treffen müssen.

Dies vorausgesetzt, wird einerseits, da $F_1 p_1 = p_1 \alpha_1$ ist, $F_1 p_1 + F_2 p_1 = F_2 \alpha_1$ gleich der Länge der Rotationsachse, und ebenso wird andererseits, da $F_1 p_2 = \alpha_2 p_2$ ist, $F_1 p_2 + F_2 p_2 = F_2 \alpha_2$ wieder der Rotationsachse gleich sein.

Diesem Ergebnisse entnehmen wir, dass das Dreieck $\alpha_1 \alpha_2 F_2$ ein gleichschenkliges Dreieck sei. Aus diesem einfachen Resultate folgt weiters unmittelbar die Construction des Brennpunktes F_2. Man hat nämlich nichts anderes zu thun, als durch den Mittelpunkt der Strecke $\alpha_1 \alpha_2$ eine senkrechte Ebene auf die besagte Gerade $\alpha_1 \alpha_2$ zu legen und den Schnitt dieser Ebene mit der Geraden $\alpha_1 p_1$ aufzusuchen, um im Schnittpunkte beider den verlangten Brennpunkt F_2 zu erhalten.

Die Verbindungsgerade $F_1 F_2$ repräsentiert sodann die L a g e der R o t a t i o n s a c h s e. Die L ä n g e derselben ist auf Grund des oben Gesagten gleich der Strecke $F_2 \alpha_1 = F_2 \alpha_2$. Halbiert man $F_1 F_2$, so ist der Halbierungspunkt O der M i t t e l p u n k t des Ellipsoides. Trägt man auf $F_1 F_2$, von O aus, zu beiden Seiten die Strecke $OA = OB = \frac{1}{2} F_2 \alpha_1$ auf, so erhält man die E n d p u n k t e A und B der R o t a t i o n s a c h s e. Die k l e i n e A c h s e der Meridianellipse oder was dasselbe ist, der Durchmesser des Äquatorialkreises kann, wie

bereits mehrfach erwähnt, construiert werden. Schließlich ist noch zu bemerken, dass der Schnittpunkt p_2 von $F_2\alpha_2$ mit t_2, gleichzeitig den Berührungspunkt dieser Ebene mit dem Ellipsoide darstelle.

§. 519.

156. Aufgabe. Ein bifocales Rotationsellipsoid ist durch einen Brennpunkt, durch zwei Punkte der Fläche und die Tangentialebene in einem dieser Punkte gegeben; es ist die Rotationsachse und der Äquator zu bestimmen.

Sei F_1 (Taf. XXI, Fig. 139) der gegebene Brennpunkt, p_1 und p_2 seien die beiden gegebenen Punkte des Ellipsoides; ferner sei t_1 die Berührebene im Punkte p_1.

Fällen wir von F_1 die Senkrechte $F_1 a_1$ auf die Tangentialebene t_1, und bestimmen wir den zu F_1 symmetrischen Punkt α_1 auf derselben, indem $a_1\alpha_1 = a_1 F_1$ gemacht wird, so muss auf der Geraden $\alpha_1 p_1$ der zweite Brennpunkt F_2 des Ellipsoides in einer Entfernung von α_1 liegen, welche der Länge der Rotationsachse gleich kommt.

Verbinden wir ferner den zweiten gegebenen Punkt p_2 mit dem gegebenen Brennpunkte F_1, und denken wir denselben auch stillschweigend mit dem zu suchenden Brennpunkte F_2 verbunden, so wird offenbar $F_1 p_2 + F_2 p_2$ die Länge der Rotationsachse bestimmen.

Es kömmt somit bloß darauf an, einen Punkt F_2 auf der Geraden $\alpha_1 p_1$ derart zu construieren, dass $F_2\alpha_1 = F_1 p_2 + F_2 p_2$ wird. Dies dürfte wohl am einfachsten in folgender Weise erreicht werden. Aus der Beziehung $F_2\alpha_1 = F_2 p_2 + F_1 p_2$ folgt sofort, dass:

$$F_2 p_2 = F_2\alpha_1 - F_1 p_2.$$

Denkt man sich daher die Strecke $F_1 p_2$ auf der Geraden $\alpha_1 p_1$, vom Punkte α_1 aus, nach π_1 aufgetragen, so, dass $\alpha_1\pi_1 = F_1 p_2$ ist, so wird die zu suchende Strecke $F_2\pi_1$ offenbar gleich $F_2\alpha_1 - F_1 p_2$, also auch gleich $F_2 p_2$ sein. Dies Ergebnis sagt aus, dass der zu bestimmende Punkt F_2 von den bekannten Punkten p_2 und π_1 gleich weit entfernt sein solle.

Um demnach den Punkt F_2 constructiv festzustellen, hat man die Gerade $\alpha_1 p_1$ mit jener Ebene zum Schnitte zu bringen, welche im Halbierungspunkte der Strecke $p_2\pi_1$ auf diese letztere senkrecht geführt wird.

Die Verbindungsgerade $F_1 F_2$ stellt sodann die Lage der Rotationsachse dar, während die Länge der Rotationsachse durch die Strecke $F_2\alpha_1$ bestimmt wird. Halbiert man $F_1 F_2$, so liefert der

Halbierpunkt O den Mittelpunkt des Ellipsoides, und trägt man auf F_1F_2 von O aus die Strecken $OA = OB = \frac{1}{2} F_2 \alpha_1$ auf, so erhält man in A und B die Endpunkte der Rotationsachse. Der Äquator ist auf bekannte Weise zu construieren.

§. 520.

157. Aufgabe. Ein Rotationsellipsoid ist durch einen Brennpunkt, zwei Tangentialebenen und zwei Punkte gegeben; es ist der zweite Brennpunkt zu construieren.

Gleich von vorneherein sei bemerkt, dass, wenn der zweite Brennpunkt gefunden ist, sich auch die Rotationsachse und der Äquatorialkreis mit Leichtigkeit ergeben wird. Sei also F_1 der gegebene Brennpunkt; seien ferner p_1 und p_2 die gegebenen Punkte und t_1, t_2 die beiden gegebenen Tangentialebenen.

Fällt man von dem Brennpunkte F_1 eine Senkrechte $F_1 a_1$ auf die Tangentialebene t_1 und trägt auf deren Verlängerung die Strecke $F_1 a_1$ nochmals bis α_1 auf, so zwar, dass α_1 und F_1 symmetrisch gegen die Ebene t_1 liegen; bestimmt man ferner in übereinstimmender Weise den Punkt α_2, welcher mit F_1 symmetrisch gegen die zweite Tangentialebene t_2 liegt; denken wir uns weiters die beiden gegebenen Punkte p_1 und p_2 mit dem gegebenen Brennpunkte F_1 verbunden und stellen wir uns endlich vor, es sei F_2, als der zweite Brennpunkt, bereits gefunden, so muss $F_2\alpha_1 = F_2\alpha_2$ gleich der Länge der Rotationsachse sein. Ebenso wird aber auch

$$F_2p_1 + F_1p_1 = F_2p_2 + F_1p_2$$

dieser Rotationsachse gleich sein müssen.

Denken wir uns demgemäß die Geraden F_2p_1 und F_2p_2 gezogen, und auf denselben die Strecken $p_1\pi_1$ und $p_2\pi_2$ beziehungsweise gleich F_1p_1 und F_1p_2 aufgetragen, so werden $F_2\pi_1$ und $F_2\pi_2$ wieder der Länge der Rotationsachse gleich sein. Hiernach gelangt man zu dem Resultate, dass: $F_2\alpha_1 = F_2\alpha_2 = F_2\pi_1 = F_2\pi_2$ sei.

Denken wir uns also jetzt eine Kugel S aus dem Mittelpunkte F_2 beschrieben, welche durch die vier Punkte α_1, α_2, π_1 und π_2 geht, und somit die Länge der Rotationsachse des Ellipsoides als Radius hat, so wird diese Kugel S offenbar jene beiden anderen Kugeln S_1 und S_2, welche beziehungsweise aus den Mittelpunkten p_1 und p_2 durch den gegebenen Brennpunkt F_1 gelegt werden, in π_1 und π_2 berühren.

Hieraus ergibt sich unmittelbar die nachstehende Construction für den zweiten Brennpunkt F_2. Man construiert, wie eingangs an-

gegeben wurde, die Punkte α_1 und α_2, beschreibt sodann aus den Mittelpunkten p_1 und p_2 zwei durch den gegebenen Brennpunkt F_1 gehende Kugeln S_1 und S_2, deren Radien beziehungsweise $p_1 F_1$ und $p_2 F_1$ sind, und bestimmt schließlich den gesuchten Brennpunkt als Mittelpunkt jener Kugel S, welche durch die beiden Punkte α_1 und α_2 geht und die beiden Kugeln S_1, S_2 derart berührt, dass selbe von der zu construierenden Kugel S umschlossen werden. Der Radius dieser Kugel S stimmt, den vorausgeschickten Betrachtungen gemäß, mit der Länge der Rotationsachse überein.

§. 521.

158. Aufgabe. Ein Rotationsellipsoid ist durch drei Punkte, eine Tangentialebene und einen Brennpunkt gegeben; der zweite Brennpunkt ist zu bestimmen.

Die Lösung dieses Problems beruht auf demselben Principe, wie die des vorhergehenden.

Sind nämlich p_1, p_2, p_3 die drei gegebenen Punkte, ist F_1 der gegebene Brennpunkt und t die gegebene Tangentialebene, so wird man wieder den Punkt α bestimmen, welcher mit F_1 symmetrisch gegen die Ebene t liegt, und weiters aus den drei Punkten p_1, p_2 und p_3, indem wir dieselben als Mittelpunkte annehmen, die drei Kugeln S_1, S_2 und S_3 beschreiben, welche durch den gegebenen Brennpunkt F_1 gehen.

Construieren wir sodann eine Kugel S, welche durch den Punkt α geht, und die drei Kugeln S_1, S_2, S_3 umschließend berührt, so ist, wie sich leicht zeigen lässt, der Mittelpunkt F_2 dieser Kugel der verlangte Brennpunkt.

Die Kugel S berührt nämlich die drei Kugeln S_1, S_2 und S_3 in jenen drei Punkten π_1, π_2 und π_3, in welchen dieselben von den Geraden $F_2 p_1$, $F_2 p_2$ und $F_2 p_3$ geschnitten werden.

Weiters sind die Radien $F_2\alpha$, $F_2 p_1$, $F_2 p_2$ und $F_2 p_3$ der Kugel S einander gleich α; ebenso ist $p_1 \pi_1$ als Radius der Kugel S_1 gleich dem Radius $F_1 p_1$, und in gleicher Weise wird $p_2 \pi_2 = F_1 p_2$ und $p_3 \pi_3 = F_1 p_3$ sein. Endlich wird auch, da $F_2 \pi_1 = F_2 p_1 + \pi_1 p_1$; $F_2 \pi_2 = F_2 p_2 + \pi_2 p_2$ und $F_2 \pi_3 = F_2 p_3 + \pi_3 p_3$ ist:

$$F_2 \alpha = F_2 p_1 + F_1 p_1 = F_2 p_2 + F_1 p_1 = F_2 p_3 + F_1 p_3$$

sein, wodurch man unmittelbar zu dem Schlusse gelangt, dass, falls F_1 und F_2 als Brennpunkte und die Strecke $F_2\alpha$ als Länge der Rotationsachse angenommen werden, die drei Punkte p_1, p_2 und p_3 auf dem

dadurch bestimmten Ellipsoide liegen müssen, und letzteres von der Ebene t berührt werde.

§. 522.

159. Aufgabe. Ein Rotationsellipsoid ist durch drei Tangentialebenen, einen Punkt der Fläche und einen Brennpunkt gegeben; es ist der zweite Brennpunkt zu bestimmen.

Sei F_1 der gegebene Brennpunkt, p der gegebene Punkt der Fläche, und seien t_1, t_2 und t_3 die drei Tangentialebenen des Ellipsoides.

Man bestimmt vorerst die drei Punkte α_1, α_2 und α_3, welche mit dem Punkte F_1, in Bezug auf die drei Ebenen t_1, t_2, t_3, symmetrisch liegen.

Ferner beschreibt man aus dem Mittelpunkte p eine durch den Brennpunkt F_1 gehende Kugel S_1.

Der Mittelpunkt F_2 jener Kugel S, welche durch die drei Punkte α_1, α_2 und α_3 geht, und die Kugel S_1 umschließend berührt, ist bereits der gesuchte zweite Brennpunkt.

Denn der Berührungspunkt π beider Kugeln S und S_1 liegt auf der Geraden F_2p; es ist daher, da $F_2\pi = F_2p + p\pi$ ist, auch

$$F_2\alpha_1 = F_2\alpha_2 = F_2\alpha_3 = F_1p + F_2p.$$

Denkt man sich daher F_1 und F_2 als die Brennpunkte und die Strecke $F_2\alpha_1$ als die Länge der Rotationsachse eines Rotationsellipsoides, so ist einleuchtend, dass der Punkt p dem Ellipsoide angehören wird und dass t_1, t_2 und t_3 die drei Tangentialebenen des Ellipsoides darstellen werden.

§. 523.

160. Aufgabe. Ein Rotationsellipsoid ist durch einen Brennpunkt, drei Tangentialebenen und die Focaldistanz (d. i. die Entfernung der beiden Brennpunkte) gegeben; die Lage des zweiten Brennpunktes ist festzustellen.

Seien F_1a_1, F_1a_2 und F_1a_3 (Taf. XXI, Fig. 140) die Perpendikel von dem gegebenen Brennpunkte F_1 auf die drei Tangentialebenen t_1, t_2 und t_3, und a_1, a_2 und a_3 deren Fußpunkte.

Wie aus Früherem bekannt, liegen die genannten Fußpunkte auf einer mit dem Ellipsoide concentrischen Kugel (Satz 323). Der Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche durch die drei Punkte a_1, a_2 und a_3 gehen, ist diejenige Gerade s, welche im Mittelpunkte m des dem Dreiecke $a_1a_2a_3$ umschriebenen Kreises auf die Ebene e der drei Punkte a_1, a_2, a_3 senkrecht gezogen werden kann. Auf dieser Geraden s muss daher auch der Mittelpunkt O des Ellipsoides liegen.

Da aber auch die Focaldistanz als gegeben vorliegt, so gibt die Hälfte derselben die Entfernung des Mittelpunktes von dem gegebenen Brennpunkte F_1 an. Es wird daher, um besagten Mittelpunkt O zu finden, genügen, eine der halben gegebenen Focaldistanz gleiche Strecke zwischen dem Brennpunkte F_1 und der Geraden s einzuschalten.

§. 524.

161. Aufgabe. **Ein Ellipsoid ist durch vier Punkte und einen Brennpunkt gegeben; es ist der zweite Brennpunkt zu ermitteln.**

Die vier gegebenen Punkte seien p_1, p_2, p_3 und p_4. Der gegebene Brennpunkt sei F_1.

Man betrachtet die vier Punkte p_1, p_2, p_3 und p_4 als die Mittelpunkte von vier Kugeln S_1, S_2, S_3 und S_4 mit den bezüglichen Radien $r_1 = F_1 p_1$; $r_2 = F_1 p_2$; $r_3 = F_1 p_3$; $r_4 = F_1 p_4$. Diese Kugeln gehen demnach sämmtlich durch den Brennpunkt F_1. Construiert man nun eine Kugel S, welche die besagten vier Kugeln umschließend berührt, so repräsentiert der Mittelpunkt F_2 von S den gesuchten zweiten Brennpunkt, während der Radius der besagten Kugel S die Länge der Rotationsachse des Ellipsoides darstellt.

Die Geraden $F_2 p_1$, $F_2 p_2$, $F_2 p_3$ und $F_2 p_4$, welche den Mittelpunkt F_2 der zu suchenden Kugel S mit den Mittelpunkten p_1, p_2, p_3, p_4 der vier Kugeln S_1, S_2, S_3 und S_4 verbinden, schneiden letztere noch in den vier Berührungspunkten π_1, π_2, π_3, π_4 mit der Kugel S, und da $p_1 \pi_1 = p_1 F_1$; $p_2 \pi_2 = p_2 F_1$; $p_3 \pi_3 = p_3 F_1$ und $p_4 \pi_4 = p_4 F_1$ ist, folgt unmittelbar aus:

$$F_2 \pi_1 = F_2 p_1 + p_1 \pi_1 = F_2 \pi_2 = F_2 p_2 + p_2 \pi_2 = F_2 \pi_3 = \\ = F_2 p_3 + p_3 \pi_3 = F_2 \pi_4 = F_2 p_4 + p_4 \pi_4$$

die Beziehung:

$$F_1 p_1 + F_2 p_1 = F_1 p_2 + F_2 p_2 = F_1 p_3 + F_2 p_3 = F_1 p_4 + F_2 p_4,$$

womit die Richtigkeit der vorangegebenen Construction bewiesen ist.

Was die Construction der Kugel S, welche die vier gegebenen Kugeln S_1, S_2, S_3 und S_4 berühren soll, betrifft, so ist dieselbe im vorliegenden Falle, da sämmtliche vier Kugeln S_1, S_2, S_3 und S_4 denselben Punkt F_1 gemein haben, einfach auszuführen.

Wählt man nämlich den besagten Punkt F_1 als Inversionscentrum und nimmt einen beliebigen Inversionsmodul an, so transformieren sich die vier Kugeln S_1, S_2, S_3, S_4 invers in vier Ebenen e_1, e_2, e_3, e_4, und die zu suchende Kugel S in eine Kugel Σ, welche diese vier Ebenen berührt.

Es genügt daher, diese Kugel Σ zu construieren, und ihre vier Berührungspunkte mit den Ebenen auf die Kugeln S_1, S_2, S_3 und S_4 zurückzutransformieren, um daselbst die Berührungspunkte π_1, π_2, π_3, π_4 zu erhalten. Verbindet man zwei dieser letzteren, allenfalls π_1 und π_2, mit den zugehörigen Mittelpunkten p_1 und p_2, so schneiden sich diese Verbindungsgeraden bereits in dem gesuchten Kugelmittelpunkte (Brennpunkt) F_2.

§. 525.

Die vorstehende Aufgabe kann noch auf einem zweiten, von dem vorigen wesentlich verschiedenem Wege gelöst werden.

Um zu dieser Lösung zu gelangen, stellen wir folgende Betrachtung an.

Aus der Theorie der Kegelschnitte wissen wir, dass einem Kreise K_0 (Taf. XXI, Fig. 141), dessen Mittelpunkt C als Collineationscentrum angenommen wird, stets ein Kegelschnitt collinear entspricht, welcher den Punkt C zum Brennpunkte hat, und umgekehrt, dass, wenn man den einen Brennpunkt C eines Kegelschnittes K als Mittelpunkt eines Kreises K_0 von beliebigem Radius wählt, dieser Kreis K_0 stets mit dem Kegelschnitt K perspectivisch collinear ist, wobei der genannte Brennpunkt C das Collineationscentrum und die zugehörige Directrix G_a des Kegelschnittes K die eine Gegenachse darstellt.

Denken wir uns nun sowohl den Kegelschnitt K, als auch den Kreis K_0 um die Brennpunktsachse AB gedreht, so erzeugt der erstere eine Rotationsfläche S zweiten Grades und der Kreis K_0, da dessen Radius willkürlich angenommen wurde, eine Kugel S_0, welche mit einem beliebigen Radius aus einem der Brennpunkte C der Rotationsfläche als Mittelpunkt beschrieben ist.

Ferner erzeugen die Collineationsachse C_a und die Gegenachse G_a, nachdem beide auf der Rotationsachse ABC senkrecht stehen, zwei zu dieser Rotationsachse senkrecht stehende Ebenen C_e und G_e.

Es ist einleuchtend, dass, sobald C als Collineationscentrum im Raume, die Ebene C_e als Collineationsebene und die Ebene G_e als Gegenebene angenommen wird, die Rotationsfläche S und die Kugel S_0 zwei collineare Gebilde darstellen, da irgend eine beliebige, durch die Rotationsachse gelegte Ebene diese Flächen in collinearen Curven schneidet.

Diese Bemerkungen vorausgeschickt, gelangen wir zu der nachstehenden Lösung der vorher (§. 524) gestellten Aufgabe.

Sind p_1, p_2, p_3 und p_4 die vier gegebenen Punkte des Rotationsellipsoides, und ist F_1 der gegebene Brennpunkt, so wird man eine Kugel Σ von beliebigem Radius zeichnen, welche den Brennpunkt F_1 zum Mittelpunkte hat. Diese Kugel Σ ist mit dem zu bestimmenden Ellipsoide in Bezug auf den Brennpunkt F_1 als Collineationscentrum centrisch collinear.

Zieht man daher die Geraden $F_1 p_1$, $F_1 p_2$, $F_1 p_3$ und $F_1 p_4$, so werden diese die Kugel Σ in den den Punkten p_1, p_2, p_3 und p_4 collinear entsprechenden Punkten π_1, π_2, π_3, π_4 schneiden. Nebenbei sei hier noch bemerkt, dass, da jeder der vorgenannten Strahlen die Kugel in zwei Punkten π trifft, die Aufgabe, je nachdem die Punkte combiniert werden, verschiedene Lösungen zulasse. Ein Theil der dem Probleme entsprechenden Flächen wird im allgemeinen durch Ellipsoide, ein anderer Theil dagegen durch Hyperboloide repräsentiert erscheinen.

Verbindet man drei Paare dieser entsprechenden Punkte durch Geraden, so erhält man drei entsprechende Geradenpaare, wie beispielsweise $p_1 p_2$ und $\pi_1 \pi_2$; $p_2 p_3$ und $\pi_2 \pi_3$; $p_3 p_4$ und $\pi_3 \pi_4$. Jedes solche Geradenpaar hat einen Punkt δ_1, δ_2, δ_3 gemein, welcher der Collineationsebene C_e angehört, so zwar, dass diese letztere durch die drei Punkte δ_1, δ_2 und δ_3 vollständig bestimmt ist.

Zieht man nun durch F_1 die Senkrechte Z zu der Collineationsebene C_e, so repräsentiert dieselbe, der früheren Betrachtung gemäß, die Rotationsachse des Ellipsoides. Die Endpunkte A und B der Rotationsachse ergeben sich als diejenigen Punkte, welche den Schnittpunkten A_0 und B_0 der Geraden Z mit der Kugel Σ entsprechen.

Die Construction der letztangeführten Punkte kann in folgender Weise vollführt werden. Man zieht die Gerade $A_0 \pi_1$, welche die Collineationsebene C_e in einem Punkte Δ trifft; die ihr entsprechende Gerade Δp_1 schneidet sodann Z in dem gesuchten Punkte A. Ebenso kann auch der zweite Punkt B aus B_0 abgeleitet werden, womit die Aufgabe als gelöst erscheint.

§. 526.

162. Aufgabe. **Ein Rotationsellipsoid ist durch seinen Mittelpunkt, durch zwei Punkte der Fläche und die Tangentialebene in einem dieser Punkte gegeben; es ist die Rotationsachse und der Äquatorialkreis zu bestimmen.**

Der gegebene Mittelpunkt des Ellipsoides sei O (Taf. XXI, Fig. 142), T sei die gegebene Tangentialebene, p deren Berührungspunkt und a der gegebene Punkt der Fläche.

Denken wir uns den Durchmesser pO des Ellipsoides gezogen; legen wir ferner durch den Punkt a eine Ebene P parallel zu der gegebenen Tangentialebene T, so wird die letztgenannte Ebene das Ellipsoid in einer Ellipse K schneiden, deren Mittelpunkt offenbar der Schnittpunkt m dieser Ebene mit dem conjugierten Durchmesser Op sein wird. Ferner wird diese Ellipse K durch den Punkt a gehen.

Bestimmen wir zunächst die Tangentialebene im Punkte a.

Die Gerade Op schneidet das zweitemal das Ellipsoid in einem Punkte p_1, welcher einfach durch Übertragung der Strecke Op nach Op_1 erhalten wird. Sucht man zu den drei Punkten p, p_1, m den vierten harmonischen Punkt Σ, so ist dieser bekanntlich der Pol der Ebene P in Bezug auf das Ellipsoid.

Als natürliche Folge des Angedeuteten ist aber der Punkt Σ gleichzeitig auch der Scheitel des dem Ellipsoide längs des Kegelschnittes K umschriebenen Kegels, mithin die Gerade Σa eine Tangente des Ellipsoides im Punkte a.

Eine zweite Tangente der Fläche in demselben Punkte a ergibt sich folgendermaßen. Denken wir uns die beiden Punkte p und a verbunden und suchen wir einen Punkt der Polare dieser Verbindungsgeraden in Bezug auf das Ellipsoid.

Diese Polare muss einerseits in der Tangentialebene T des Punktes p und andererseits in der der Geraden ap conjugierten Diametralebene liegen. Können wir auch die letztere nicht bestimmen, so unterliegt es doch keinem Anstande, eine in ihr liegende Gerade anzugeben; es ist dies die Verbindungsgerade des Mittelpunktes O des Ellipsoides mit dem Halbierpunkte α der Strecke ap. Die Gerade $O\alpha$ schneidet die Tangentialebene T in einem Punkte x, welcher der Polare der Geraden ap angehört; es ist demnach ax ebenfalls eine Tangente des Ellipsoides im Punkte a. Die beiden Tangenten Σa und xa bestimmen nun die Tangentialebene T_a des Punktes a.

Führen wir weiters durch Oa die zu der obbezeichneten Ebene T_a senkrechte Ebene R_1, so repräsentiert diese die Meridianebene des Punktes a. Besagte Ebene wird von der durch Op senkrecht zur Ebene T geführten Meridianebene R des Punktes p in einer Geraden Z getroffen, welche nothwendig die Rotationsachse der Fläche darstellen muss.

Hiemit ist die vorgegebene Aufgabe auf die früher gestellte (Aufgabe 153) „ein Ellipsoid zu bestimmen, wenn der Mittelpunkt O, die Lage der Rotationsachse Z und zwei Punkte a und p desselben gegeben sind“ zurückgeführt.

§. 527.

163. Aufgabe. Ein Rotationsellipsoid ist durch zwei Punkte und deren Tangentialebenen, sowie durch einen Punkt der Rotationsachse gegeben; es ist die Rotationsachse und der Äquator zu bestimmen.

Seien T_a und T_b die beiden Tangentialebenen, a und b deren Berührungspunkte und s ein Punkt der Rotationsachse.

Die Meridianebene des Punktes a geht selbstverständlich durch diesen Punkt a, enthält überdies den der Rotationachse angehörenden Punkt s und steht auf der Tangentialebene T_a senkrecht; die besagte Meridianebene ist also jene Ebene M_1, welche durch die Gerade sa senkrecht zur Ebene T_a geführt wird. In gleicher Weise ergibt sich die Meridianebene M_2 des Punktes b als diejenige Ebene, welche durch die Gerade sb senkrecht zu der Tangentialebene T_b geführt werden kann. Diese beiden Meridianebenen M_1 und M_2 schneiden sich offenbar in der Rotationsachse Z.

Denken wir uns die eine dieser Tangentialebenen, etwa T_b, so lange um Z gedreht, bis sie zur Meridianebene M_1 senkrecht wird, so repräsentiert dieselbe in dieser Lage T'_b gleichfalls eine Tangentialebene des Ellipsoides und der gedrehte Punkt b' deren Berührungspunkt.

Die Meridianebene M_1 schneidet ferner das Ellipsoid in einer Meridianellipse E, von welcher Z eine Achse ist, a und b' zwei Punkte und die Schnittgeraden t_a und t'_b mit den Tangentialebenen T_a und T'_b die Tangenten in diesen zwei Punkten sind.

Das vorliegende Problem ist somit auf das: „eine Ellipse zu construieren, von welcher die Lage einer Achse, zwei Punkte und deren Tangenten bekannt sind", reduciert.

Diese Aufgabe kann folgendermaßen constructiv durchgeführt werden.

Die gegebene Achse der Ellipse E sei x (Taf. XXI, Fig. 143), a und b seien die beiden gegebenen Punkte und t_a, t_b deren Tangenten.

Wenn wir die Punkte a und b durch eine Gerade verbinden und den Halbierungspunkt c der Strecke ab bestimmen, so enthält die Gerade, welche den Punkt c mit dem Schnittpunkte s der beiden Tangenten verbindet, den Mittelpunkt der Ellipse. Letzterer wird sich daher direct im Schnitte O der Geraden sc und x ergeben. Die Senkrechte in O auf x repräsentiert sodann die Lage der zweiten Achse.

Denken wir uns die Ellipse als orthogonal affin mit einem erst näher zu bestimmenden Kreise E_0, indem wir die Achse x als

Affinitätsachse voraussetzen, so wird der Geraden ab eine Gerade $a_0 b_0$ affin entsprechen, welche durch den Schnittpunkt δ von ab mit der Affinitätsachse x, und ebenso der Geraden Oc eine Gerade Oc_0 entsprechen, welche nach dem Mittelpunkt c_0 der Kreissehne $a_0 b_0$ geht. Nachdem aber $a_0 b_0$ und Oc_0 auf einander senkrecht stehen müssen, folgt unmittelbar, dass der Punkt c_0 auf dem über $O\delta$ als Durchmesser beschriebenen Kreise K' liegt, und dass sich der besagte Punkt c_0 im Schnitte dieses Kreises mit der durch c zur Affinitätsachse x senkrecht gezogenen Geraden ergeben werde.

Hiernach erhalten wir in c und c_0 zwei affin entsprechende Punkte. Die Gerade δc_0 entspricht sodann der Geraden δc und auf derselben dem Punkte a der Ellipse E, der Punkt a_0 des affinen Kreises E_0. Der letztgenannte Kreis kann nun, da nebst dem Punkte a_0 auch dessen Mittelpunkt O bekannt ist, sofort gezeichnet werden. Derselbe schneidet die Affinitätsachse x in den beiden Punkten A und B, welche bereits die Endpunkte der einen Achse der Ellipse E darstellen.

Ein Endpunkt C der zweiten Achse y ergibt sich, vermittelst der beiden affin entsprechenden Geraden $C_0 c_0 \Delta$ und $Cc\Delta$, direct als der dem Endpunkte C_0 des Kreisdurchmessers y entsprechende Punkt.

§. 528.

164. Aufgabe. **Eine Ellipse und innerhalb derselben ein Punkt sind gegeben; es ist ein Kreis zu zeichnen, welcher die Ellipse doppelt (in zwei Punkten) berührt und durch den gegebenen Punkt geht.**

Diese Aufgabe kann auf eine ebenso interessante als einfache Weise mittelst eines Rotationsellipsoides gelöst werden.

Die Ellipse E sei durch ihre Achsen AB und CD (Taf. XXI, Fig. 144) bestimmt; p sei der gegebene Punkt innerhalb derselben.

Diese Ellipse betrachten wir als den Hauptmeridian eines Rotationsellipsoides; die Grundlinie XX nehmen wir demgemäß senkrecht zur großen Achse AB an. Die horizontale Projection K'_1 des Äquatorialkreises ist sodann ein Kreis, welcher aus einem Punkte O' der verlängerten Achse AB mit einem der kleinen Halbachse CO der gegebenen Ellipse gleichen Radius beschrieben wird. Ferner denken wir uns den gegebenen Punkt p als die Verticalprojection eines Punktes auf dem Rotationsellipsoide und bestimmen, dieser Voraussetzung entsprechend, dessen Horizontalprojection p'.

Nach diesen allgemeinen Vorbereitungen können wir somit die eigentliche Aufgabe unmittelbar der Lösung zuführen.

Zunächst sei noch nachgewiesen, dass jeder Kegelschnitt — im vorliegenden Falle jede Ellipse — welche der gegebenen Meridian-

ellipse $ABCD$ derart eingeschrieben wird, dass sie dieselbe in zwei Punkten α und β berührt, stets als die orthogonale (verticale) Projection eines ebenen Schnittes des Rotationsellipsoides betrachtet werden darf.

Nennen wir eine solche Ellipse, welche der Hauptmeridianellipse in der Weise eingeschrieben ist, dass sie dieselbe in α und β berührt, γ, und denken wir uns durch diese Ellipse γ einen vertical-projicierenden Cylinder gelegt. Die vertical-projicierenden Ebenen, welche durch die gemeinschaftlichen Tangenten t_α und t_β der Ellipsen $ABCD$ und γ in den Punkten α und β gelegt werden, sind Berührebenen des Rotationsellipsoides sowohl, als auch des Cylinders in den betreffenden Punkten α und β, woraus folgt, dass der obbezeichnete Cylinder das Rotationsellipsoid in den beiden Punkten α und β berühre.

Mit Zugrundelegung des Gesagten zerfällt aber die Schnittcurve des Cylinders und des Ellipsoides, da beide Flächen vom zweiten Grade sind (nach Satz 449, Band II) in zwei ebene Curven, deren verticale Projection durch die Ellipse γ dargestellt wird.

Denken wir uns nun der gegebenen Ellipse $ABCD$ jenen Kreis K_1 eingeschrieben, welcher dieselbe in den Endpunkten C und D der kleinen Achse berührt, so sind wir, auf Grund der vorhergegangenen Betrachtung, berechtigt, diesen Kreis als die verticale Projection eines ebenen Schnittes des Rotationsellipsoides anzusehen.

Bestimmen wir die Ebene dieses Schnittes. Besagte Ebene muss offenbar durch die kleine Achse $(CD, C'D')$ der Meridianellipse $ABCD$ gehen. Es ist an und für sich einleuchtend, dass eben dieselbe Gerade $(CD, C'D')$ auch eine Achse der sich als Kreis projicierenden Schnittellipse darstellen wird.

Um die Ebene der letzteren festzustellen, wird es nunmehr hinreichen, einen beliebigen Punkt auf dem Kreise K_1 als verticale Projection eines Punktes auf dem Ellipsoide anzunehmen und darnach seine Horizontalprojection zu bestimmen. Jene Ebene, welche sodann durch den oberwähnten Punkt und durch die Achse $(CD, C'D')$ gelegt wird, ist offenbar die gesuchte Ebene.

Um die Construction möglichst einfach zu gestalten, wählen wir speciell den Punkt n des Kreises K_1, welcher in der Achse AB liegt. Als verticale Projection eines Punktes der Schnittellipse K_1 betrachtet, liegt derselbe in der vertical-projicierenden Meridianebene. Behufs Ermittelung seines Abstandes von der Hauptmeridianebene denken wir uns den vertical-projicierenden Meridian sammt dem Punkte n um die Achse AB um 90° gedreht. Dies vorausgesetzt, fällt der besagte Meridian mit der Ellipse $ABCD$, der Punkt n daher (nach der

Drehung) mit jenem Punkte n'' zusammen, in welchem die durch n zu AB senkrechte Gerade die Ellipse $ABCD$ trifft (n'' wird mittelst des über AB geschlagenen Affinkreises K_{0} ermittelt).

Es ist einleuchtend, dass, wenn man sich die Schnittgerade der vertical-projicierenden Meridianebene mit der zu suchenden (durch n und CD bestimmten) Ebene, um AB in die zur verticalen Projectionsebene parallele Lage gedreht denkt, diese Schnittlinie durch die Gerade On'' dargestellt werde.

In der vertical-projicierenden Meridian-Ebene liegt aber auch der der Diametralebene (n, CD) conjugierte Durchmesser. Derselbe ist gleichzeitig der zu der eben genannten Schnittgeraden nO conjugierte Durchmesser des projicierenden Meridians und stellt sich somit nach erfolgter Drehung als der dem Durchmesser $n''O$ conjugierte Durchmesser d der Ellipse $ABCD$ dar.

Denken wir uns nun parallel zu der Ebene (n, CD) Ebenen gelegt, so werden diese das Ellipsoid durchwegs in ähnlichen Ellipsen schneiden, die sich vertical als Kreise projicieren, welche die gegebene Ellipse jedesmal in zwei Punkten berühren. Die Mittelpunkte dieser Kreise sind die verticalen Projectionen der Ellipsenmittelpunkte, welch letztere bekanntlich auf dem den schneidenden Ebenen conjugierten Durchmesser (der nach seiner Drehung um AB in d gefunden wurde) liegen.

Führt man die zur Ebene (n, CD) parallele schneidende Ebene insbesondere durch den Punkt (p, p'), so wird sich die Schnitt-Ellipse derselben mit dem Ellipsoide vertical als jener Kreis K projicieren, welcher die Meridian-Ellipse $ABCD$ in zwei Punkten berührt und durch den gegebenen Punkt p geht.

Der Mittelpunkt o dieses Kreises K wird auf folgende Weise bestimmt. Man ermittelt die orthogonale Projection des Punktes (p,p') auf der vertical-projicierenden Meridianebene und dreht dieselbe (ebenfalls um die Achse AB) um 90^{0} nach p''.

Zieht man ferner durch p'' die Parallele $p''o''$ zu $n''O$, so repräsentiert diese die gedrehte Schnittlinie der gesuchten Ebene mit der vertical-projicierenden Meridianebene und der Schnittpunkt o'' dieser Geraden mit d'' den gedrehten Mittelpunkt der Schnittellipse. Dreht man den letzteren nach o (in AB) zurück, so erhält man den Mittelpunkt des gesuchten Kreises K, welcher nun direct als der durch die Bedingungen der Aufgabe geforderte, durch den Punkt p gehende Kreis K verzeichnet werden kann.

Auf Grund der vorhergehenden Aufgabe wird nunmehr auch die Durchführung der nachstehenden keinerlei Schwierigkeit darbieten.

§. 529.

165. Aufgabe. Im Inneren eines bifocalen Rotationsellipsoides ist ein Punkt gegeben; durch denselben ist eine Ebene derart zu legen, dass ihr Schnitt mit dem Ellipsoide den gegebenen Punkt zum Brennpunkte hat.

Es wurde früher (Satz 327) nachgewiesen, dass, wenn eine Ebene das bifocale Rotationsellipsoid in einer Ellipse schneidet, die Brennpunkte dieser Ellipse sich als die Berührungspunkte der schneidenden Ebene mit jenen Kugeln ergeben, welche gleichzeitig dem Ellipsoide längs Kreisen eingeschrieben sind.

Bei Lösung der vorstehenden Aufgabe wird es also bloß darauf ankommen, eine Kugel zu construieren, welche durch den gegebenen Punkt geht und das Ellipsoid in einem Kreise berührt. Die Berührebene der Kugel in dem gegebenen Punkte wird sodann schon die gesuchte Ebene darstellen.

Die Meridianebene, welche durch den gegebenen Punkt geht, schneidet das Ellipsoid in einer Meridianellipse und die eingeschriebene Kugel in einem größten Kreise, welcher einerseits durch den besagten Punkt geht, andererseits aber die Meridianellipse in zwei Punkten berührt.

Führt man daher durch den gegebenen Punkt p die Meridianebene, so hat man, wie in der früheren Aufgabe gezeigt wurde, einen durch p gehenden Kreis zu construieren, welcher die Meridianellipse in zwei Punkten berührt.

Legt man sodann durch diesen Kreis eine Kugel von dem nämlichen Radius, so wird diese offenbar das Ellipsoid längs eines Parallelkreises berühren und durch den gegebenen Punkt p gehen.

Die Tangentialebene der Kugel im Punkte p wird, dem vorher citierten Satze 327) gemäß, das Rotationsellipsoid in einer Ellipse schneiden, deren eine Brennpunkt der gegebene Punkt p ist.

Nachdem durch einen Punkt p zwei Kreise geführt werden können, welche eine Ellipse doppelt berühren, so gestattet auch die vorliegende Aufgabe zwei Lösungen.

§. 530.

166. Aufgabe. Ein Rotationsellipsoid, dessen Meridianellipse in wahrer Größe vorliegt, soll unter der Voraussetzung dargestellt werden, dass die Rotationsachse mit einer gegen beide Projections-

ebenen geneigten Geraden, und der Mittelpunkt der Fläche mit einem gegebenen Punkte dieser Geraden zusammenfalle.

Sei *abcd* (Taf. XXII, Fig. 145) die in wahrer Größe gegebene Meridianellipse; (Z, Z') die gegebene, gegen beide Projectionsebenen geneigte Rotationsachse und auf derselben (O, O') der gegebene Mittelpunkt der Fläche.

Diesen Bedingungen entsprechend, soll das Ellipsoid dargestellt, d. h. dessen Contouren auf den beiden Projectionsebenen durch conjugierte Durchmesser oder durch Achsen bestimmt werden.

Die horizontale Contour wird der Schnitt der horizontalen Projectionsebene mit dem dem Ellipsoide umschriebenen horizontal-projicierenden Cylinder sein.

Die durch die Rotationsachse (Z, Z') gehende horizontal-projicierende Ebene P_h ist eine Meridianebene, also eine Symmetrieebene für das Ellipsoid. Auf Grund dessen ist einleuchtend, das besagte Ebene auch eine Symmetrie- oder Hauptebene des dem Rotationsellipsoide umschriebenen horizontal-projicierenden Cylinders sei. Es wird demnach deren Horizontaltrace P_h, welche mit der Horizontalprojection Z' der Rotationsachse identisch ist, eine Symmetrieachse der Horizontaltrace dieses Cylinders, oder mit anderen Worten, eine Achse der Horizontalcontour des Ellipsoides darstellen.

Wir wollen nun die Endpunkte dieser Achse aufsuchen.

Die Tangenten der Contour in diesen Endpunkten A' und B' werden zur Achse $A'B'$ senkrecht stehen und daher die Tracen zweier Berührebenen des Ellipsoides repräsentieren, welche einerseits horizontal-projicierend sind und andererseits auch auf der horizontal-projicierenden Meridianebene P_h senkrecht stehen. Hieraus folgt, dass ihre Schnittgeraden mit dieser Ebene P_h zwei durch die gesuchten Endpunkte A' und B' gehende horizontal-projicierende Tangenten der in der Meridianebene P_h liegenden Meridianellipse sein werden.

Diese einfache Betrachtung führt zu der folgenden Construction.

Wir denken uns die genannte Meridianellipse um die Trace P_h in die horizontale Projectionsebene umgelegt, legen also die Rotationsachse (Z, Z') sammt dem Mittelpunkte (O, O') nach Z_0 und O_0 um und verzeichnen daselbst die Meridianellipse, d. i. deren Achsen $a_0 b_0$, $c_0 d_0$ congruent mit der in wahrer Größe gegebenen Meridianellipse *abcd* derart, dass der Mittelpunkt mit O_0 und die Achse $a_0 b_0$ mit Z_0 zusammenfallen.

Der vorausgeschickten Betrachtung gemäß werden sich die gesuchten Achsen-Endpunkte A' und B' als die Fußpunkte der zu Z'

senkrechten Tangenten t_1 und t_2 der umgelegten Meridianellipse $a_0 b_0 c_0 d_0$ ergeben.

Zur Construction dieser Tangenten verwenden wir den über $a_0 b_0$ als Durchmesser beschriebenen Kreis K_0, welchen wir als affin mit der Ellipse $a_0 b_0 c_0 d_0$ betrachten. Der durch O_0 zu Z' senkrecht gezogenen Geraden r entspricht sodann die Gerade ϱ. Die an K_0 parallel zu ϱ gezogenen Tangenten τ und τ_2 treffen die Affinitätsachse $a_0 b_0$ beziehungsweise in μ_1 und μ_2, und die durch μ_1 und μ_2 senkrecht zu Z' (d. i. parallel zu r) gezogenen Geraden t'_0 und t^2_0 sind die gesuchten Tangenten, welche die Achse Z' in den Endpunkten A' und B' treffen.

Es erübrigt jetzt noch die Bestimmung der zweiten Achse CD' der Horizontalcontour.

Die Lage dieser Achse ist, wie bekannt, mittelst der zu Z' durch O' senkrecht gezogene Gerade festgestellt. Die Tangenten in ihren Endpunkten C' und D' müssen zur Achse Z' parallel sein und werden daher die Tracen zweier zur Meridianebene P_h paralleler Tangentialebenen des Ellipsoides repräsentieren.

Es wurde bereits nachgewiesen, dass eine zu einer Meridianebene parallele Tangentialebene eines Rotationsellipsoides das letztere in einem Punkte des zu dieser Meridianebene senkrechten Durchmessers des Äquators berührt und dass demnach der Abstand dieser beiden Ebenen von der genannten Meridianebene dem Radius des Äquators, oder was dasselbe ist, der kleinen Halbachse $co = do$ der gegebenen Meridianellipse $abcd$ gleich sei.

Da im vorliegenden Falle die Meridianebene P_h horizontalprojicierend ist, so werden auch die Tracen der beiden genannten Tangentialebenen, d. i. die Tangenten der Contour, welche zu $A'B'$ parallel sind, von der letzteren Geraden den Abstand co besitzen, oder was dasselbe ist, die kleine Achse $C'D'$ der Contour ist der kleinen Achse der Meridianellipse $abcd$ gleich. Hiemit ist die Horizontalcontour durch ihre Achsen $A'B'$ und CD' vollkommen bestimmt.

In gleicher Weise könnte man nun auch die Achsen $A_1 B_1$, $C_1 D_1$ der Verticalcontour construieren. Man kann indes, sobald die Horizontalcontour bestimmt ist, das Verfahren in folgender Weise abkürzen.

Die Lage der einen Achse $A_1 B_1$ stimmt mit der verticalen Projection der Rotationsachse überein. Der Mittelpunkt der Contour ist gleichzeitig die verticale Projection O des Mittelpunktes des Ellipsoides, nachdem auf Grund früherer Erörterungen bekannt ist, dass die Achse eines jeden einer Fläche zweiten Grades umschriebenen Cylinders durch

den Mittelpunkt der Fläche geht und dass der Mittelpunkt eines ebenen Schnittes eines Cylinders zweiten Grades stets auf der Achse desselben liegt.

Die zweite Achse $C_1 D_1$ der Contour ist der Lage nach die durch O senkrecht auf Z gezogene Gerade; deren Länge $C_1 D_1$ wird, wie oben gezeigt wurde, der kleinen Halbachse der Meridianellipe $abcd$ (da wir die große Achse als Rotationsachse voraussetzen) gleich sein.

Zur Bestimmung der Achse $A_1 B_1$ wird offenbar die Kenntnis eines Punktes oder einer Tangente der verticalen Contour vollständig genügen. Wir werden sofort sehen, dass die Construction einer der beiden zur Grundlinie parallelen Tangenten der Verticalcontour, allenfalls der Tangente t_3, sich ohne jedwede Schwierigkeit bewerkstelligen lasse.

Besagte Tangente ist nämlich die Verticaltrace einer zur horizontalen Projectionsebene parallelen Tangentialebene des Ellipsoides. Der Berührungspunkt dieser Ebene muss auf dem zur Horizontalebene senkrecht stehenden Meridiane liegen, welch letzterer aber wieder nur der in der horizontal-projicierenden Ebene P_h liegende Meridian sein kann.

Der Schnitt der vorgenannten horizontalen Tangentialebene mit der Meridianebene P_h ihres Berührungspunktes ist eine horizontale Tangente des in P_h liegenden Meridianes. Der bezeichnete Schnitt wird sich daher, nach der Umlegung um P_h in die horizontale Projectionsebene, als eine zu P_h parallele Tangente t^0_3 der umgelegten Meridianellipse $a_0 b_0 c_0 d_0$ darstellen. Die letztgenannte Gerade t^0_3 kann mittelst des affinen Kreises K_0 leicht construiert werden. Der Geraden Z' entspricht nämlich die Gerade ζ; zieht man daher parallel zu ζ die Tangente τ_3 an K_0, welche die Affinitätsachse $a_0 b_0$ in v schneiden mag, so ist die gesuchte Tangente t^0_3 die Parallele durch v zu Z'. Diese Tangente t^0_3 hat von Z' den nämlichen Abstand, wie die vorgenannte horizontale Tangentialebene des Ellipsoides von der horizontalen Projectionsebene.

Führt man daher in demselben Abstande die Gerade t_3 parallel zur Grundlinie, so stellt dieselbe die Verticaltrace jener Tangentialebene, also auch eine Tangente der verticalen Contour dar. Aus dieser Tangente t_3 und der Achse $C_1 D_1$ lässt sich nun leicht die Achse $A_1 B_1$ ableiten.

Zu diesem Zwecke betrachten wir die Contourellipse als affin mit dem über der Achse $C_1 D_1$ als Durchmesser beschriebenen Kreise K^0_1. Die Tangente t_3 trifft die Affinitätsachse $C_1 D_1$ in einem Punkte δ; die durch δ an den Kreis K^0_1 gezogene Tangente t^0_3 entspricht

sodann affin der Tangente t_3; dem Berührungspunkt σ_0 von t^0_3 entspricht in der Tangente t_3 der Berührungspunkt σ (wobei $\sigma\sigma_0$ senkrecht zu $C_1 D_1$ ist).

Dem Schnittpunkte A^0_1 des Kreises K^0_1 mit Z wird der eine Endpunkt A_1 der Achse entsprechen. Derselbe ergibt sich, wenn man die Gerade $\sigma_0 A_0 \varDelta$ zieht ($\varDelta$ in der Affinitätsachse $C_1 D_1$) und hierauf die affin entsprechende Gerade $\sigma \varDelta$ zeichnet, welche Z bereits in dem verlangten Endpunkte A_1 trifft.

Überträgt man endlich $A_1 O = B_1 O$ nach B_1, so ergibt sich der zweite Achsen-Endpunkt, womit die Aufgabe, den gestellten Bedingungen entsprechend, gelöst und durchgeführt ist.

§. 531.

167. Aufgabe. Ein Rotationsellipsoid, dessen Rotationsachse mit einer gegebenen zu einer Projectionsebene parallelen Geraden und dessen Mittelpunkt mit einem gegebenen Punkte dieser Geraden zusammenfällt, ist darzustellen, d. i. durch seine Achsen zu bestimmen, wenn die Meridianellipse in ihrer wahren Größe gegeben ist.

Setzen wir voraus, die Rotationsachse (Z, Z') (Taf. XXI, Fig. 146) sei parallel zur verticalen Projectionsebene; (O, O') seien die Projectionen des auf derselben liegenden Mittelpunktes des Ellipsoides; endlich sei $abcd$ die durch ihre Achsen gegebene Meridianellipse.

Die durch die Rotationsachse (Z, Z') gelegte horizontal-projicierende Ebene P_h ist eine zur verticalen Projectionsebene parallele Meridianebene; die in ihr liegende Meridianellipse wird sich daher vertical in wahrer Größe projicieren. Wir erhalten dieselbe somit als eine mit der gegebenen Meridianellipse $abcd$ congruente Ellipse $ABCD$, deren Mittelpunkt O ist und deren große Achse AB in die Gerade Z fällt.

Berücksichtigt man, dass jeder einem Rotationsellipsoide, längs eines Meridians umschriebene Cylinder zu der Ebene dieses Meridians senkrecht stehe, so ergibt sich sofort, dass der dem Ellipsoide längs des Meridians $ABCD$ umschriebene Cylinder vertical-projicierend sei, und dass demgemäß die Verticalprojection $ABCD$ dieses Meridianes gleichzeitig die Verticaltrace des umschriebenen, vertical-projicierenden Cylinders, oder mit anderen Worten, die Verticalcontour des Ellipsoides darstelle.

Die horizontale Contour hat den Punkt O' zum Mittelpunkte, die horizontale Projection Z' der Rotationsachse zur einen Achse und die durch O auf dieselbe senkrecht gezogene Gerade Y zur zweiten Achse. Die Länge $C'_1 D'_1$ dieser zweiten Achse ist, wie unschwer einzusehen, wieder der kleinen Achse cd der gegebenen Meridianellipse

gleich. Denn die zur horizontal-projicierenden Meridianebene P_h parallelen Tangentialebenen des Ellipsoides haben von dieser Ebene P_h einen dem Radius des Äquators gleichen Abstand, also eine Entfernung, welche der kleinen Halbachse $co = do$ der Meridianellipse $abcd$ gleichkömmt. Die horizontalen Tracen derselben, das sind die zur Achse Z' parallelen Tangenten der Horizontalcontour, haben mithin von Z' denselben Abstand, und wird das Gleiche also auch von den Endpunkten C'_1 und D'_1 der kleinen Achse dieser Contour gelten.

Die Länge der großen Achse $A'_1B'_1$ wird, wie folgt, bestimmt. Ziehen wir behufs Erreichung dieses Zweckes an die verticale Contour $ABCD$ die zur Grundlinie senkrechten Tangenten t_1 und t_2. Dies kann einfach dadurch bewirkt werden, dass man die Ellipse $ABCD$ als affin mit dem über AB als Durchmesser beschriebenen Kreise K_0 voraussetzt.

Bestimmt man nun zu irgend einer zur Grundlinie senkrechten Geraden r die affin entsprechende Gerade ϱ und zieht an den Kreis K_0 die zu ϱ parallelen Tangenten τ_1 und τ_2, welche die Affinitätsachse AB beziehungsweise in α_1 und α_2 schneiden, so erhält man in den Geraden t_1 und t_2, welche durch α_1 und α_2 senkrecht zur Grundlinie gezogen werden, die gesuchten Tangenten von $ABCD$.

Diese Tangenten t_1 und t_2 repräsentieren bereits die Verticaltracen zweier vertical-projicierenden Tangentialebenen des Rotationsellipsoides. Da aber die Verticaltracen senkrecht zur Grundlinie stehen, so sind diese Tangentialebenen gleichzeitig auch horizontalprojicierend. Die Horizontaltracen derselben, d. i. die Verlängerungen von t_1 und t_2 sind somit zwei Tangenten an die horizontale Contour des Ellipsoides.

Berücksichtigt man aber, dass diese Tangenten zur kleinen Achse $C'_1D'_1$ der Horizontalcontour des Ellipsoides parallel sind, so müssen deren Berührungspunkte die Endpunkte der großen Achse sein. Die Achsenendpunkte ergeben sich daher als die Schnittpunkte A'_1 und B'_1 von Z' mit t_1 und t_2.

Nachdem somit die horizontale Contour gleichfalls durch ihre Achsen $A'_1B'_1$ und $C'_1D'_1$ bestimmt ist, erscheint die Aufgabe, den gestellten Bedingungen gemäß, vollkommen durchgeführt.

Wäre die Rotationsachse (Z, Z') zu den beiden Projectionsebenen parallel, d. i. parallel zur Grundlinie, so würden die durch diese Achse parallel zu den beiden Projectionsebenen gelegten Ebenen zwei Meridianebenen darstellen, welche zwei zu den Projectionsebenen parallele, also in wahrer Größe erscheinende Meridianellipsen bestimmen würden,

die ihrerseits gleichzeitig die beiden Contouren des Ellipsoides repräsentieren.

§. 532.

168. Aufgabe. Ein Rotationsellipsoid ist in schiefer Projection darzustellen, d. h. die Contour desselben ist auf der Bildebene unter der Bedingung zu bestimmen, dass die Rotationsachse mit einer gegen die Projectionsebene geneigten gegebenen Geraden und der Mittelpunkt des Ellipsoides mit einem in dieser Geraden gegebenen Punkte zusammenfalle; die Meridianellipse ist in wahrer Größe gegeben.

Das Projectionsdreieck sei $\sigma\delta\delta_0$ (Taf. XXII, Fig. 147), dv stelle die gegebene Rotationsachse, O die schiefe Projection des in der Geraden dv gegebenen Mittelpunktes des Ellipsoides dar; ferner repräsentiere $abcd$ die durch ihre Achsen in wahrer Größe dargestellte Meridianellipse.

Vor allem ist klar, dass die schiefe Projection O des Mittelpunktes des Rotationsellipsoides gleichzeitig auch der Mittelpunkt der gesuchten Contour sein müsse; denn der durch O gehende, schief projicierende Strahl ist die Achse des schief projicierenden, dem Ellipsoide umschriebenen Cylinders, dessen Schnittpunkt O mit der Bildebene daher den Mittelpunkt der Bildflächtrace (d. h. der gesuchten Contour) dieses Cylinders darstellt.

Die schiefe Projection dv der gegebenen Rotationsachse wird folglich, da dieselbe durch O geht, selbst einen Durchmesser der Contourellipse darstellen und es wird sich bloß darum handeln, die Endpunkte dieses Durchmessers zu bestimmen.

Die besagten Endpunkte müssen selbstverständlich die Durchstoßpunkte der Bildebene mit zwei zum schief-projicierenden Strahle parallelen Tangenten des Ellipsoides (d. h. also mit zwei Erzeugenden des umschriebenen Cylinders) sein. Da aber deren Durchstoßpunkte auf dv liegen sollen, so müssen diese Flächentangenten in der durch dv gehenden schief-projicierenden Ebene liegen und mithin auch parallele Tangenten zum schief-projicierenden Strahle an jenen Kegelschnitt sein, in welchem die eben genannte schief-projicierende Ebene das Ellipsoid schneidet.

Diesen Betrachtungen entsprechend, haben wir also den Schnitt des Ellipsoides mit der durch die Gerade dv gehenden schiefprojicierenden Ebene zu bestimmen und parallel zum schief-projicierenden Strahle die Tangenten an die erhaltene Schnittcurve zu zeichnen. Die Durchstoßpunkte A und B dieser Tangenten mit der Bildebene

werden, den vorstehenden Erörterungen gemäß, die Endpunkte des Durchmessers dv der Contour darstellen.

Nachdem dv die Rotationsachse repräsentiert, so wird jede durch dv gelegte, also auch die schief-projicierende Ebene P (deren Trace P_b mit der Projection dv zusammenfällt) das Ellipsoid in Meridianellipsen, d. i. in Ellipsen, welche der gegebenen Ellipse $abcd$ congruent sind, schneiden.

Legen wir daher die besagte schief-projicierende Ebene P sammt der Rotationsachse dv, dem Mittelpunkte O und der in ihr liegenden Meridianellipse in die Bildebene um, so gelangt, indem v nach v_0 fällt (die Gerade vv_0 also die Richtung der umgelegten, schiefprojicierenden Strahlen in der Ebene P darstellt) die Rotationsachse nach dv_0 und der Mittelpunkt O nach O_0, wobei selbstverständlich OO_0 parallel zu vv_0 ist.

Die umgelegte Meridianellipse ist leicht zu zeichnen. Dieselbe wird durch eine Ellipse $a_0 b_0 c_0 d_0$ dargestellt, welche mit der in wahrer Größe gegebenen Ellipse $abcd$ congruent ist, deren Mittelpunkt nach O_0, und deren eine Achse $a_0 b_0$ in die umgelegte Rotationsachse dv_0 fällt.

An diese Ellipse sind nun Tangenten parallel zum schiefprojicierenden Strahle, welcher in der Umlegung durch vv_0 oder OO_0 dargestellt erscheint, zu ziehen. Zu diesem Zwecke betrachtet man die Ellipse $a_0 b_0 c_0 d_0$ als orthogonal affin mit dem über der Achse $a_0 b_0$ als Durchmesser gezeichneten Kreise K_0. Der Geraden OO_0 oder r_0 entspricht sodann affin die Gerade ϱ_0.

Zieht man weiters, parallel zu ϱ_0, an den Kreis K_0 die Tangenten τ^1_0 und τ^2_0, welche die Affinitätsachse $a_0 b_0$ beziehungsweise in α_1 und α_2 schneiden mögen, so entsprechen denselben die oberwähnten gesuchten, zu vv_0 oder OO_0 parallelen Tangenten t^1_0 und t^2_0 der Ellipse $a_0 b_0 c_0 d_0$.

Besagte Tangenten können unmittelbar als die durch α_1 und α_2 parallel zu vv_0 gezogenen Geraden gezeichnet werden. Die Durchstoßpunkte derselben mit der Bildebene sind die Schnittpunkte A und B mit der Bildflächtrace P_b. Die letztgenannten Punkte A und B repräsentieren, den früheren Erörterungen zufolge, die Endpunkte des mit der Projection dv zusammenfallenden Durchmessers der Contourellipse.

Es wird sich nun noch darum handeln, den diesem Durchmesser AB conjugierten Durchmesser CD der Contourellipse des Ellipsoides zu finden.

Die Tangenten in den Endpunkten C und D des zu bestimmenden Durchmessers müssen offenbar zum Durchmesser AB parallel sein. Dieselben werden daher die Bildflächtracen zweier zu der schiefprojicierenden Meridianebene P_b parallelen Tangentialebenen $P^1{}_b$ und $P^2{}_b$ des Ellipsoides darstellen, während ihre Berührungspunkte C und D die schiefen Projectionen der Berührungspunkte des Ellipsoides mit den beiden Tangentialebenen $P^1{}_h$ und $P^2{}_h$ repräsentieren.

Nun wissen wir aber, dass die Berührungspunkte eines Ellipsoides mit den beiden zu irgend einer Meridianebene parallelen Berührebenen die Endpunkte des zu dieser Meridianebene senkrechten Durchmessers des Äquatorkreises sein müssen.

Wir haben demnach vor allem diesen Durchmesser der Lage nach zu bestimmen; im vorliegenden Falle also durch den Mittelpunkt O des Ellipsoides eine Senkrechte s zu der Ebene P_b zu führen.

Letzteres wird dadurch bewerkstelligt, dass man zunächst an beliebiger Stelle der Ebene P_b, am einfachsten im Punkte v selbst, durch welchen bereits, behufs Umlegung, das Projectionsdreieck $v\varDelta\varDelta_0$ geführt wurde, zur Ebene P_b die Senkrechte vd_s legt. Die wahre Größe der Geraden vd_s wurde durch Umlegung um die Trace H ihrer orthogonal-projicierenden Ebene in v'_0d_s erhalten. Zieht man durch O parallel zu vd_s die Gerade s, so repräsentiert diese die schiefe Projection der im Punkte O auf die Ebene P_b senkrecht geführten Geraden. Diese Gerade s stellt mithin auch die schiefe Projection jenes Durchmessers des Äquatorialkreises dar, in dessen Endpunkten die zur Meridianebene P_b parallelen Berührebenen $P^1{}_b$ und $P^2{}_b$ das Ellipsoid tangieren.

Die schiefen Projectionen der bezeichneten Endpunkte sind unschwer zu bestimmen. Tragen wir nämlich auf der umgelegten Senkrechten $v_0'd_s$ die Strecke $v_0'x_0$ gleich dem Radius des Äquators, also auch gleich der kleinen Halbachse $co = do$ der gegebenen Meridianellipse auf, so repräsentiert die Strecke xv (wobei x auf vd_s mittelst der Geraden xx_0 parallel zu vv_0' erhalten wurde), die Größe der Projection jenes Radius, welcher auf der zur Ebene P_b senkrechten Geraden liegt. Trägt man demnach auf s die Strecken $OC = OD = vx$ auf, so stellen die Punkte C und D die schiefen Projectionen der Endpunkte des zu P_b senkrechten Äquatorialdurchmessers, d. h. die schiefen Projectionen der Berührungspunkte des Ellipsoides mit den zur Meridianebene P_b parallelen Tangentialebenen $P^1{}_b$ und $P^2{}_b$ dar.

Den vorausgeschickten Untersuchungen gemäß sind diese Punkte C und D gleichzeitig die Berührungspunkte der Contour mit den zu

AB parallelen Tangenten P^1_b und P^2_b und daher auch die Endpunkte des dem Durchmesser AB conjugierten Durchmessers der Contour.

Wir kennen somit ein Paar conjugierter Durchmesser AB und CD der gesuchten Contour sowohl der Lage, als auch der Größe nach, und haben demnach den gestellten Anforderungen der Aufgabe vollständig entsprochen.

Der Fall, in welchem die Rotationsachse senkrecht zur Bildebene steht, ist bereits früher (Aufgabe 147) unter anderer Form, „als Schlagschattenbestimmung", auf Grund des erweiterten Dandelin'schen Satzes behandelt worden. Die dort gegebenen Constructionen sind, wenn es sich um die Contourbestimmung in schiefer Projection handeln sollte, nur in der der freien schiefen Projectionsmethode eigenthümlichen Art abzuändern.

§. 533.

169. Aufgabe. Es ist die Contour eines Rotationsellipsoides in centraler Projection unter der Voraussetzung, dass die Rotationsachse durch eine gegebene, gegen die Bildebene geneigte Gerade und der Mittelpunkt der Fläche durch einen in dieser Geraden gegebenen Punkt dargestellt sei, zu bestimmen. Der Meridian ist in wahrer Größe durch seine Achsen gegeben.

Das gegebene Projectionscentrum sei (A, C) (Taf. XXII, Fig. 148); die centrale Projection der Rotationsachse sei dv; O sei die centrale Projection des Mittelpunktes des Ellipsoides, und endlich stelle $abcd$ die durch ihre Achsen in wahrer Größe gegebene Meridianellipse dar.

Nach der Art und Weise, wie die Aufgabe gestellt wurde, werden wir in der Centralprojection nicht mit derselben Bequemlichkeit, wie dies in den früheren Fällen, bei vorausgesetzter Parallelprojection möglich war, die Achsen oder ein Paar conjugierter Durchmesser der Contourcurve bestimmen können; es dürfte unter den obwaltenden Verhältnissen vielmehr zweckmäßig sein, einen indirecten Weg in der Weise einzuschlagen, dass wir zunächst irgend welche fünf Elemente (Punkte oder Tangenten) der Contourcurve zu ermitteln suchen, und sodann erst aus diesen Bestimmungsstücken ein Paar conjugierter Durchmesser oder die Achsen des Contourkegelschnittes ableiten.

Die central-projicierende, durch die Rotationsachse dv gehende Ebene C_v (deren beide in C_v vereinigte Tracen mit der Projection dv zusammenfallen) ist eine Meridianebene des Ellipsoides, und schneidet daher die genannte Fläche in einer Ellipse, welche der gegebenen Ellipse $abcd$ congruent ist.

Werden von dem Projectionscentrum C, welches selbstverständlich in der obbezeichneten Ebene liegt, Tangenten an den Meridian gezogen, so werden dieselben auch zwei Tangenten der Fläche, oder, was dasselbe ist, zwei Erzeugenden des dem Ellipsoide aus dem Projectionscentrum umschriebenen Kegels darstellen; ihre Durchstoßpunkte mit der Bildebene demnach zwei Punkte der Contour repräsentieren.

Um diese Tangenten zu construieren, legen wir das Projectionscentrum C, die Rotationsachse dv und den Mittelpunkt O des Ellipsoides um die Trace C_v der central-projicierenden Meridianebene in die Bildebene um, wobei das Centrum nach C_0, die umgelegte Rotationsachse nach Z_0 und der umgelegte Mittelpunkt nach O_0 gelangt.

Nach diesen einfachen Vorbereitungen kann nunmehr auch der umgelegte Meridian direct verzeichnet werden. Derselbe ist offenbar eine mit der gegebenen Ellipse $abcd$ congruente Ellipse $a_0 b_0 c_0 d_0$ in einer derartigen Lage, dass O_0 deren Mittelpunkt wird, und Z_0 mit einer ihrer Achsen, allenfalls mit $a_0 b_0$, zusammenfällt.

An diese Ellipse $a_0 b_0 c_0 d_0$ sind nun von dem umgelegten Projectionscentrum C_0 aus die beiden Tangenten zu legen. Wir können hiebei, theils um der Abwechslung willen, theils aber auch deshalb, weil das umgelegte Centrum C_0 von den beiden Ellipsenachsen weit absteht, also die Anwendung der Affinität zu Ungenauigkeiten Veranlassung böte, folgendermaßen verfahren.

Bestimmen wir zur Erreichung des vorgegebenen Zweckes einen Brennpunkt f_1 der Ellipse $a_0 b_0 c_0 d_0$; zeichnen wir ferner jenen mit der Ellipse concentrischen Kreis γ, dessen Radius der großen Halbachse $a_0 O_0$ gleich ist, sowie endlich einen zweiten Kreis γ_1 über $C_0 f_1$ als Durchmesser, so werden sich diese beiden Kreise γ und γ_1 im allgemeinen in zwei Punkten α und β treffen, die mit C_0 verbunden die Geraden $C_0 \alpha$ und $C_0 \beta$ liefern, welche nach einem aus der Theorie der Kegelschnitte bekannten Satze die gesuchten Tangenten τ_1 und τ_2 repräsentieren. Die letzteren treffen, in den Raum zurückgedreht, die Bildebene in denselben beiden Punkten m und n, in welchen sie umgelegt, die Trace C_v schneiden. Besagte Punkte m und n sind demnach, als Bildflächspuren zweier projicierenden Tangenten des Ellipsoides, zwei Punkte der gesuchten Contour.

Es unterliegt weiters auch keinerlei Schwierigkeit, die Tangenten der Contour in diesen beiden Punkten m und n zu construieren.

Berücksichtigen wir nämlich, dass die Geraden τ_1 und τ_2 Tangenten des in der central-projicierenden Ebene C_v liegenden Meridians $a_0 b_0 c_0 d_0$ darstellen, so folgt unmittelbar (nach Satz 306), dass die

Ebenen, welche durch dieselben senkrecht zu der Meridianebene C_v gelegt werden, zwei Tangentialebenen des Ellipsoides darstellen.

Die Tracen T_1 und T_2 dieser Ebenen gehen einerseits durch die Punkte m und n, in welchen jene Tangenten die Bildebene treffen, und andererseits, da beide auf der Ebene C_v senkrecht stehen, durch den Punkt V_s, in welchem die Bildebene von der durch das Projectionscentrum senkrecht zu C_v geführten Geraden geschnitten wird. Nachdem aber diese beiden Tangentialebenen des Ellipsoides centralprojicierend sind, so folgt, dass ihre Tracen T_1 und T_2 Tangenten der gesuchten Contour sein müssen.

Wir kennen also bereits vier Bestimmungselemente für die fragliche Contour, nämlich zwei Punkte m und n und die Tangenten T_1 und T_2 der Contourcurve in denselben.

Weitere zwei Stücke, und zwar wieder zwei Tangenten, kann man auf nachstehende Art bestimmen.

Denken wir uns dem Ellipsoide längs des Äquatorialkreises einen Cylinder umschrieben. Die durch das Projectionscentrum an diesen Cylinder gelegten Tangentialebenen sind gleichzeitig Tangentialebenen des Ellipsoides; ihre Bildflächtracen daher zwei Tangenten der Contourcurve.

Bestimmen wir also zunächst die Ebene des Äquatorialkreises, d. i. die durch den Mittelpunkt O senkrecht zur Rotationsachse dv gelegte Ebene $S_b S_v$. Der in dieser Ebene liegende Äquatorialkreis K ist die Leitcurve des Cylinders, während die Erzeugenden desselben zur Rotationsachse dv parallel sind. Es werden daher die Centralprojectionen aller Erzeugenden, sowie die Fluchttracen aller Tangentialebenen des Cylinders durch den Fluchtpunkt v gehen. Insbesondere werden die Contour-Erzeugenden des Cylinders, d. h. diejenigen Erzeugenden, längs welchen die Tangentialebenen des Cylinders centralprojicierend sind, die von v aus an die Centralprojection des Äquatorialkreises K gezogenen Tangenten sein. Es ist einleuchtend, dass dieselben gleichzeitig die Bildflächtracen der beiden central-projicierenden Tangentialebenen des Cylinders repräsentieren, und daher, wie früher gefunden wurde, zwei Tangenten der Contourcurve bestimmen.

Man wird also, um kurz zu sprechen, zwei Tangenten der Contourcurve erhalten, wenn man durch v an die Centralprojection des Äquatorialkreises K die beiden Tangenten zieht.

Letzteres kann bewerkstelligt werden, ohne dass man erst diese Centralprojection verzeichnet. Betrachten wir zu diesem Zwecke v als die Centralprojection eines in der Ebene $S_b S_v$ liegenden Punktes und legen wir denselben, ebenso wie den Äquatorialkreis K, um die Bild-

flächtrace S_b, beziehungsweise nach v_0 und K_0 um. (Den umgelegten Kreis K_0 erhält man bekanntlich, indem man den Punkt O nach O'_0 umlegt, und die kleine Halbachse der gegebenen Ellipse $abcd$ als Radius des Kreises K_0 annimmt.)

Führen wir nun von v_0 an den Kreis K_0 die beiden Tangenten t^1_0 und t^2_0, welche die Bildflächtrace S_b beziehungsweise in den Punkten μ und ν treffen, so sind deren Centralprojectionen offenbar die Geraden $v\mu$ und $v\nu$ oder t_1 und t_2, d. h. t_1 und t_2 sind die beiden durch v an das Bild des Äquators gelegten Tangenten, oder, den vorhergegangenen Betrachtungen gemäß, zwei Tangenten der Contourcurve.

Wir kennen somit sechs Elemente der Contour, von welchen fünf beliebig gewählte hinreichen, um ein Paar conjugierter Durchmesser der Contourcurve bestimmen zu können. Letzteres kann folgendermaßen geschehen.

Nehmen wir somit beispielsweise an, dass die beiden Tangenten T_1 und T_2 (Taf. XXII, Fig. 149) mit ihren Berührungspunkten m und n und die Tangente t als die diesfallsigen Bestimmungsstücke gewählt worden wären.

Den Schnittpunkt V_s von T_1 und T_2 betrachten wir als Collineationscentrum, und einen beliebigen, den Tangenten T_1 und T_2 eingeschriebenen Kreis K_0 fassen wir als Collinearfigur des gegebenen Kegelschnittes auf. Den Berührungspunkten m und n des Kegelschnittes entsprechen collinear die Berührungspunkte m_0 und n_0 des Kreises K_0. Es sind demnach m_0n_0 und mn zwei entsprechende Geraden, und ihr Schnittpunkt δ_1 ein Punkt der Collineationsachse C_a. Die Tangente t schneidet ferner die Gerade mn in einem Punkte v, welchem collinear der Schnittpunkt v_0 von m_0n_0 und V_sv entspricht.

Zieht man nun von v_0 aus eine Tangente t_0 an den Kreis K_0 (man wird je nach der Form des Kegelschnittes, die derselbe als Contour annehmen muss, leicht entscheiden können, welche von den beiden durch v_0 gehenden Kreistangenten zu wählen ist), so entspricht diese der Kegelschnittstangente t, während der Schnittpunkt δ_2 beider, d. i. der Schnitt von t und t_0, einen zweiten Punkt der Collineationsachse C_a, welche sich nunmehr als Verbindungsgerade der beiden Punkte δ_1 und δ_2 ergeben wird, bestimmt.

Führen wir parallel zu der Collineationsachse zwei Tangenten an den Kreis K_0, deren Berührungspunkte A_0 und B_0 sein mögen, so werden diesen beiden Punkten zwei Punkte A und B auf dem Kegelschnitte K entsprechen, in welchen die Tangenten gleichfalls zur Collineationsachse parallel sein werden; AB wird somit einen Durchmesser des Kegelschnittes darstellen.

Halbiert man denselben in O, so erhält man den Mittelpunkt des Kegelschnittes, und zieht man durch O eine zur Collineationsachse C_a Parallele CD, so stellt diese letztere den dem Durchmesser AB conjugierten Durchmesser dar. Die Endpunkte C und D desselben können leicht bestimmt werden.

Dem Punkte O entspricht nämlich auf $A_0 B_0$ der vermittelst des Collineationsstrahles $V_s O O_0$ zu bestimmende Punkt O_0, während der Geraden CD die durch O_0 zur Collineationsachse C_a parallel gezogene Gerade $C_0 D_0$ entsprechen wird. Dieselbe schneidet den Kreis K_0 in zwei Punkten C_0 und D_0, welche vermittelst der Strahlen $C_0 V_s$ und $D_0 V_s$ auf CD zurückprojiciert, die gesuchten Punkte C und D geben.

Bringt man in (Fig. 148, Taf. XXII) eine mit der soeben durchgeführten Construction übereinstimmende zur Geltung, so kann auch die dort gestellte Aufgabe als vollständig durchgeführt betrachtet werden.

§. 534.

170. Aufgabe. **Es sind eine Ellipse und innerhalb derselben drei Punkte gegeben; durch diese drei Punkte ist eine zweite Ellipse zu legen, welche die erstere in zwei Punkten berührt; ferner sind zwei conjugierte Durchmesser derselben zu ermitteln.**

Die Achsen der gegebenen Ellipse E seien AB und CD (Taf. XXII, Fig. 150); die drei innerhalb derselben gegebenen Punkte seien a_1, a_2 und a_3.

Betrachten wir die Ellipse E als den Hauptmeridian eines Rotationsellipsoides und die Achse AB als die Rotationsachse desselben. Als Grundlinie X werden wir demzufolge eine zu AB senkrechte Gerade wählen. Nimmt man ferner in der verlängerten Achse AB einen beliebigen Punkt O' als Horizontalprojection dieser Achse an und beschreibt man aus demselben als Mittelpunkt einen Kreis K'_1 vom Radius r gleich der Halbachse $CO = OD$ der gegebenen Ellipse E, so kann dieser Kreis als die Horizontalprojection des Äquatorialkreises (K_1, K'_1) aufgefasst werden, wodurch das Ellipsoid S vollkommen bestimmt erscheint. Nach dieser Vorbereitung übergehen wir auf die Lösung der eigentlichen Aufgabe.

Nennen wir die Ellipse, welche durch die drei Punkte a_1, a_2 und a_3 gehen und die gegebene Ellipse E doppelt berühren soll, kurz e.

Jede Ellipse, welche die gegebene Ellipse E, also auch die zu suchende Ellipse e, in zwei Punkten berührt, kann, wie aus Früherem bekannt, als die verticale Projection eines ebenen Schnittes des vorbestimmten Rotationsellipsoides angesehen werden.

Nachdem aber diese Ellipse e auch durch die Punkte a_1, a_2 und a_3 gehen soll, so ist nothwendig, dass diese letzteren die verticalen Projectionen von Punkten seien, welche in der schneidenden Ebene sowohl, als auch auf dem Ellipsoide liegen.

Wir haben demgemäß die Punkte a_1, a_2, a_3 als verticale Projectionen von Punkten des Ellipsoides vorauszusetzen und darnach deren Horizontalprojectionen zu bestimmen. Dies kann in der folgenden einfachen Weise geschehen. Der Punkt a_1 gehört, falls er als ein Punkt des Ellipsoides vorausgesetzt wird, einem Meridiane an, dessen verticale Projection eine Ellipse sein muss, die durch den Punkt a_1 geht und deren eine Achse AB ist. Die zweite Achse dieser verticalen Projection ist mittelst des über AB als Durchmesser beschriebenen Affinkreises K_0 leicht zu ermitteln.

Zieht man nämlich $a_1 a_1{}^0$ senkrecht zu AB, wobei der Punkt $a_1{}^0$ dem Kreise K_0 angehört, so sind a_1 und $a_1{}^0$ zwei entsprechende Punkte. Verbinden wir ferner $a_1{}^0$ oder $\alpha_1{}^0$ mit dem Punkte C_0 oder D_0, in welchen Punkten die verlängerte Achse CD den Kreis K_0 das eine- oder anderemal trifft, so wird dieser Geraden $a_1{}^0 C_0$, oder beziehungsweise der Geraden $\alpha_1{}^0 D_0$, welche die Affinitätsachse AB im Punkte δ_1 schneiden, die Gerade $a_1 \delta_1$ entsprechen, welche ihrerseits wieder die Achse CD in dem dem Punkte D_0 entsprechenden Punkte d_1 treffen wird. Dieser Punkt d_1 wird offenbar einen Endpunkt der zweiten Achse der Ellipse ABa_1 darstellen.

Nachdem diese Ellipse die verticale Projection eines Meridians repräsentiert, so stellt ihre zu AB senkrechte Achse die verticale Projection eines Durchmessers des Äquators dar. Besagter Durchmesser wird erhalten, wenn man den Punkt d_1 auf den Kreis K'_1 nach d'_1 projiciert (es gibt selbstverständlich zwei Punkte auf diesem Kreise) und den erhaltenen Punkt d'_1 mit O' verbindet. Die Gerade $d'_1 O'$ ist gleichzeitig die Horizontalprojection des dem Punkte a_1 entsprechenden Meridians; es muss daher die Horizontalprojection a'_1 dieses Punktes nothwendig auf derselben liegen. (Die Horizontalprojection a'_1 des Punktes a_1 ist bekanntlich zwei-deutig, da die vertical-projicierende Gerade a_1 das Ellipsoid in zwei Punkten treffen muss. Die zweite Horizontalprojection von a_1 liegt offenbar symmetrisch mit a'_1 gegen die Hauptmeridianebene.) In gleich einfacher Weise bestimmt man die Horizontalprojectionen a'_2 und a'_3 der beiden übrigen Punkte a_2 und a_3.

Die Construction der horizontalen Projectionen a'_1, a'_2 und a'_3 unter der obangegebenen Bedingung kann ebenso einfach auch auf die zweite, in (Taf. XXII, Fig. 150) angedeutete Bestimmungsweise, die

diesfalls, da sich theilweise zu schiefe Schnitte ergaben, als Controle benützt wurde, vollführt werden.

Legt man nunmehr durch die drei Punkte (a_1, a'_1), (a_2, a'_2) und (a_3, a'_3) eine Ebene $P_v P_h$, so wird diese das Rotationsellipsoid in einer Ellipse schneiden, welche durch diese drei Punkte (a_1, a'_1) (a_2, a'_2) und (a_3, a'_3) geht.

Die Verticalprojection e dieser Ellipse wird sodann durch die drei gegebenen Punkte a_1, a_2 und a_3 gehen, und die Ellipse $E(ABCD)$ in zwei Punkten berühren. Diese Berührung wird jedoch eine reelle oder eine imaginäre sein, je nachdem die Ebene $P_v P_h$ die Meridianellipse E in reellen oder imaginären Punkten schneidet. Wenn (a_1, a'_1), (a_2, a'_2) und (a_3, a'_3) so bestimmt werden, dass sie auf verschiedenen Seiten der Hauptmeridianebene liegen, sind die obgenannten zwei Punkte stets reell.

§. 535.

171. Aufgabe. **Eine Ellipse; innerhalb derselben zwei Punkte und eine Gerade, welche die Ellipse reell schneidet, sind gegeben; es ist eine zweite Ellipse zu bestimmen, welche durch die beiden gegebenen Punkte geht, die gegebene Ellipse in zwei und die gegebene Gerade in einem Punkte berührt. Zwei conjugierte Durchmesser dieser letzteren Ellipse sind constructiv zu ermitteln.**

Die Ellipse E (Taf. XXIII, Fig. 151) sei durch ihre Achsen AB und CD gegeben; a_1 und a_2 seien die innerhalb derselben gegebenen Punkte und t die gegebene Gerade, welche die Ellipse in reellen Punkten schneiden möge.

Die gegebene Ellipse E (AB, CD) betrachten wir als den Hauptmeridian (verticale Projection) eines Rotationsellipsoides; die Achse AB derselben setzen wir als die Rotationsachse dieses Ellipsoides voraus. Die Grundlinie X ist diesfalls wieder senkrecht zur Achse AB anzunehmen. Als Horizontalprojection K_1' des Äquators ergibt sich somit ein Kreis, dem als Radius die kleine Halbachse $CO = OD$ der gegebenen Ellipse entspricht.

Der Mittelpunkt O' dieses Kreises kann (beliebig) auf der verlängerten AB gewählt werden.

Die zu bestimmende Ellipse e fassen wir abermals als die Verticalprojection eines gewissen ebenen Schnittes des Rotationsellipsoides auf. So wie im vorhergehenden Falle werden auch hier die Horizontalprojectionen a_1' und a_2' der Punkte a_1 und a_2, die man als Verticalprojectionen zweier Punkte des Ellipsoides voraussetzt, bestimmt. Die schneidende Ebene muss durch die beiden Punkte (a_1, a_1') und (a_2, a_2')

hindurchgehen, also die Verbindungsgerade (g, g') dieser beiden Punkte enthalten.

Sehen wir nun nach, welche weitere Bedingung der schneidenden Ebene diesfalls auferlegt wird.

Da die zu suchende Ellipse e einerseits von der Geraden t berührt werden soll, andrerseits aber diese Ellipse als Verticalprojection eines ebenen Schnittes aufgefasst wird, so kann man auch die Gerade t gleichzeitig als die Verticalprojection einer Tangente dieses ebenen Schnittes betrachten.

Als solche muss die besagte Tangente t offenbar einen Punkt (s, s') mit der Geraden (g, g') gemein haben, der als Schnitt von g und t leicht construiert werden kann; weiters muss dieselbe, als Tangente eines ebenen Schnittes der Fläche, auch eine Tangente der Fläche selbst darstellen.

Unsere Aufgabe besteht somit bloß darin, eine Tangente des Ellipsoides zu finden, welche durch den Punkt (s, s') geht und die Gerade t zu ihrer Verticalprojection hat.

Es ist einleuchtend, dass diese Tangente in einer verticalprojicierenden Ebene H liegen müsse, deren Verticaltrace mit t zusammenfällt, dass dieselbe also auch eine Tangente des in dieser Ebene H_v liegenden Kegelschnittes des Ellipsoides sein werde.

Um an diesen Kegelschnitt von (s, s') aus Tangenten zu ziehen, bestimmen wir zunächst die eine Achse desselben. Diese ist die Verbindungsgerade jener Punkte m und n der Hauptmeridianellipse $ABCD$, welche sich als die Schnittpunkte mit t ergeben. Die letztgenannten Punkte m und n werden mittelst des über AB als Durchmesser beschriebenen Affinkreises K_0 abgeleitet.

Legen wir nun durch den Kegelschnitt einen Kegel, dessen Spitze der eine Scheitel, etwa (A, A'), des Ellipsoides ist, so wird der Schnitt dieses Kegels mit der horizontalen Projectionsebene (nach Satz 331) ein Kreis γ sein, welcher über der Geraden $\mu'\nu'$ als Durchmesser beschrieben wird, wobei (μ, μ') und (ν, ν') die Horizontaldurchstoßpunkte der Kegelerzeugenden $(Am, A'm')$ und $(An, A'n')$ repräsentieren.

Die zu suchenden Kegelschnittstangenten werden mit dem Kegelscheitel (A, A') zwei Berührebenen des Kegels bestimmen, welche durch die Gerade $(As, A's')$ gehen, während sich deren Horizontaltracen als die durch den horizontalen Durchstoßpunkt σ' dieser Geraden an den Kreis γ gezogenen Tangenten ergeben.

Hiermit ist der Weg für die vorzunehmenden Constructionen festgestellt. Man hat nämlich von dem Punkte σ' aus eine Tangente τ an den Kreis γ zu ziehen, diese als Horizontaltrace einer durch

(A, A') gehenden Ebene zu betrachten und den Schnitt dieser Ebene (A, τ) mit der vertical-projicierenden Ebene H_v zu ermitteln. Ein Punkt des Schnittes ist bereits der Punkt (s, s') und ein zweiter Punkt desselben wird gefunden, wenn man einen beliebigen Punkt (ϱ, ϱ') von τ mit (A, A') verbindet und den Schnittpunkt (r, r') dieser Geraden mit der Ebene H_v bestimmt. Die Gerade $(sr, s'r')$ oder (t, t') repräsentiert sodann eine durch (s, s') gehende Tangente des Kegelschnittes in der vertical-projicirenden Ebene H_v, also eine Tangente des Ellipsoides, welche durch den Punkt (s, s') geht und die gegebene Gerade t zur Verticalprojection hat.

Legt man ferner durch die beiden Geraden (g, g') und (t, t') eine Ebene $P_v P_h$, so schneidet diese das Ellipsoid in einer Ellipse, welche durch die Punkte (a_1, a_1') und (a_2, a_2') geht und von der Geraden (t, t') in jenem Punkte berührt wird, in welchem die letztere eine Berührung mit dem Ellipsoide eingeht.

Die verticale Projection dieser Schnittellipse wird gleichfalls eine Ellipse sein, und zwar eine Ellipse von der Beschaffenheit, dass sie die Contourellipse $(AB, CD) = E$ in zwei Punkten berührt, die Gerade t tangiert und durch die beiden Punkte a_1 und a_2 geht; dieselbe wird mithin die gesuchte Ellipse e darstellen.

Die Berührung mit dem Hauptmeridiane E wird entweder reell oder imaginär erfolgen, je nachdem die Ebene $P_v P_h$ den Hauptmeridian E in zwei reellen oder in zwei imaginären Punkten schneidet. Wenn die beiden Punkte (a_1, a_1'), (a_2, a_2') und der Berührungspunkt der Tangente (t, t') so bestimmt werden, dass irgend ein Paar dieser Punkte zu verschiedenen Seiten der Hauptmeridianebene liegt, sind die obbezeichneten zwei Punkte stets reell.

§. 536.

172. Aufgabe. **Eine Ellipse ist durch ihre Achsen bestimmt; ferner ist innerhalb derselben ein Punkt und weiters sind zwei die Ellipse in reellen Punkten schneidende Geraden gegeben; es soll eine Ellipse gesucht werden, welche die gegebene Ellipse in zwei, jede der gegebenen Geraden dagegen in einem Punkte berührt, und überdies durch den gegebenen Punkt geht.**

Die gegebenen Achsen der Ellipse E sind AB und CD (Taf. XXIII, Fig. 152); a ist der innerhalb E gegebene Punkt; t_1 und t_2 sind die beiden vorliegenden Geraden, beziehungsweise Tangenten.

Die Ellipse E nehmen wir als den zur verticalen Projectionsebene parallelen Hauptmeridian eines Rotationsellipsoides an und be-

stimmen unter dieser Voraussetzung die zugehörige Horizontalprojection des letzteren, d. i. die Horizontalprojection K_1' des Äquatorialkreises.

Die zu bestimmende Ellipse e fassen wir als die verticale Projection eines ebenen Schnittes des Ellipsoides auf.

Damit die Ellipse e die gestellten Bedingungen erfülle, ist nothwendig, dass die schneidende Ebene durch den Punkt (a, a') des Ellipsoides, dessen Verticalprojection der gegebene Punkt a ist, gehe, und dass dieselbe zwei Tangenten der Rotationsfläche enthalte, deren verticale Projectionen beziehungsweise die Geraden t_1 und t_2 sind.

Unsere Aufgabe besteht also zunächst darin, den Punkt (a, a') zu bestimmen (was in derselben Weise wie in den vorhergehenden Problemen vermittelst des über AB als Durchmesser beschriebenen Affinkreises K_0 geschehen kann) und sodann zwei Tangenten des Ellipsoides derart auszumitteln, dass deren Verticalprojectionen mit den gegebenen Geraden t_1 und t_2 zusammenfallen, dass sich diese Tangenten schneiden und dass überdies deren Ebene auch den Punkt (a, a') enthalte. Die letzterwähnte Ebene wird sodann offenbar diejenige sein, welche das Ellipsoid nach einer Ellipse schneidet, deren Verticalprojection alle vorangegebenen Bedingungen erfüllt und mithin die gesuchte Ellipse darstellen wird.

Soll die Gerade t die verticale Projection einer Tangente des Ellipsoides sein, so muss diese Tangente nothwendig jene Ellipse ε_1 berühren, in welcher das Ellipsoid von der vertical-projicierenden Ebene der Geraden t_1, d. i. von der Ebene P_v' geschnitten wird.

Soll ferner die Gerade t_2 die Verticalprojection einer Tangente des Ellipsoides darstellen, so muss diese Tangente nothwendig mit derjenigen Ellipse ε_2 eine Berührung eingehen, in welcher die durch t_2 gehende vertical-projicierende Ebene P_v^2 das Ellipsoid schneidet.

Da sich ferner diese beiden Tangenten schneiden sollen und ihre Ebene überdies den Punkt (a, a') enthalten muss, so wird es sich offenbar nur darum handeln, durch den Punkt (a, a') eine Ebene so zu legen, dass sie sowohl die Ellipse ε_1, als auch die Ellipse ε_2 berühre. Die Schnitte dieser Ebene mit den beiden Ellipsenebenen werden sodann Tangenten des Ellipsoides von der verlangten Eigenschaft sein.

Die Construction der vorgenannten Ebene ist mit keinen Schwierigkeiten verbunden. Wir wissen nämlich (nach Satz 451, Band II), dass sich durch die beiden Ellipsen ε_1 und ε_2, da sie auf derselben Fläche zweiten Grades (d. i. auf dem Rotationsellipsoide) liegen, zwei Kegel zweiten Grades legen lassen. Da die beiden Ellipsen in Ebenen liegen, welche zur Hauptmeridianebene senkrecht stehen, so sind die-

selben und folglich auch die durch sie gelegten Kegel zweiten Grades, symmetrisch gegen die Hauptmeridianebene; es müssen demnach auch die Scheitel der letzteren in der Hauptmeridianebene liegen. Die in der Hauptmeridianebene liegenden Erzeugenden dieser beiden Kegel sind sodann offenbar die Verbindungsgeraden jener Punkte, in welchen die beiden Ellipsen ε_1 und ε_2 oder ihre Ebenen die Hauptmeridianellipse E schneiden. Hieraus folgt unmittelbar für die fraglichen Kegelscheitel nachstehende Construction.

Man bestimmt zunächst die Schnittpunkte m_1 und n_1 der Geraden t_1, so wie die Schnittpunkte m_2 und n_2 der Geraden t_2 mit der Ellipse (AB, CD) vermittelst des über AB als Durchmesser beschriebenen Affinkreises K_0.

Die beiden Geraden $m_1 m_2$ und $n_1 n_2$ schneiden sich in dem einen und die Geraden $m_1 n_2$ und $m_2 n_1$ in dem anderen der vorerwähnten Kegelscheitel. Behufs der Durchführung der gestellten Aufgabe wollen wir allenfalls den letzteren, d. i. den Punkt S benützen, dessen Horizontalprojection S' auf Grund der vorausgeschickten Erörterungen in der Horizontaltrace η_h der Hauptmeridianebene liegt.

Es ist offenbar ganz gleichgiltig, welche der beiden Ellipsen ε_1 und ε_2 man als Leitcurve für den obbezeichneten Kegel annimmt. Wählen wir daher für den vorliegenden Zweck beispielsweise die in der vertical-projicierenden Ebene P'_v liegende Ellipse ε_1.

Legen wir nun durch den Punkt (a, a') eine Berührebene an den Kegel (S, ε_1), so wird diese nothwendigerweise die beiden Ellipsen ε_1 und ε_2 berühren, also die gesuchte Ebene darstellen.

Die Schnittgerade der letztgenannten Ebene mit der Ebene P'_v der Ellipse ε_1 wird bekanntlich jene Tangente (t_1, t'_1) der letzteren sein, welche durch den Schnittpunkt (s, s') der Ellipsenebene P'_v mit der Geraden $(Sa, S'a')$ geht.

Die Construction dieser Tangente (t_1, t'_1) führen wir in Übereinstimmung mit der in der vorhergehenden Aufgabe gewählten Bestimmungsweise durch, indem wir die Ellipse ε_1, aus dem Scheitel (A, A') des Ellipsoides als Centrum, auf die horizontale Projectionsebene als Kreis γ_1 und ebenso den Punkt (s, s') nach σ' projicieren und von σ' aus an diesen Kreis γ_1, die Tangente τ'_1 ziehen. Dieser Tangente entspricht sodann in der Ebene P'_v die durch (s, s') gehende Ellipsentangente (t_1, t'_1).

Legen wir ferner durch diese Tangente (t_1, t'_1) und durch die dieselbe im Punkte (s, s') schneidende Gerade $(Sa, S'a')$ die Ebene $P_v P_h$. Da diese Ebene eine Tangentialebene des Kegels (S, ε_1) ist, so berührt

sie auch die zweite auf dem Kegel liegende Ellipse ε_2 und schneidet mithin die Ebene P^2_v derselben in einer Tangente (t_2, t'_2), deren horizontale Projection t'_2, als hier überflüssig, nicht gezeichnet wurde.

Die Ebene $P_v P_h$ wird nun das Ellipsoid nach einer Ellipse schneiden, welche durch den Punkt (a, a') geht und von den Tangenten (t_1, t_1) und (t_2, t'_2) in den nämlichen Punkten berührt wird, in welchen die letzteren die beiden Ellipsen ε_1 und ε_2, also auch das Ellipsoid berühren.

Nachdem aber die verticalen Projectionen dieser Tangenten die beiden gegebenen Geraden t_1 und t_2 selbst sind, so ist einleuchtend, dass die verticale Projection der genannten Schnittellipse selbst wieder eine Ellipse sein wird, welche den Meridian E in zwei Punkten (und zwar in den reellen oder imaginären Schnittpunkten der Meridianellipse E mit der Ebene $P_v P_h$) berührt, durch den Punkt a geht und endlich auch mit den beiden gegebenen Geraden die geforderte Berührung eingeht, daher die gesuchte Ellipse e darstellt.

§. 537.

173. Aufgabe. Es sind eine Ellipse durch ihre Achsen und drei Geraden, welche diese Ellipse in reellen Punkten schneiden, gegeben; es ist eine zweite Ellipse zu finden, welche die gegebene Ellipse in zwei Punkten, jede der gegebenen Geraden aber in je einem Punkte berührt.

Seien AB und CD (Taf. XXIV, Fig. 153) die Achsen der gegebenen Ellipse E und t_1, t_2, t_3 die drei gegebenen Geraden.

Wie in den vorhergehenden Beispielen, so betrachten wir auch hier die Ellipse E als den zur verticalen Projectionsebene parallelen Meridian eines Rotationsellipsoides und denken uns die Achse AB als Rotationsachse des letzteren. Die Grundlinie X wird man sodann senkrecht zu AB zu wählen und aus einem beliebigen Punkte O' der verlängerten AB einen Kreis mit dem Radius, welcher der kleinen Halbachse CO der gegebenen Ellipse E gleich kömmt, zu beschreiben haben, um durch K'_1 die Horizontalprojection des Äquatorialkreises dieses Ellipsoides dargestellt zu erhalten.

Die zu bestimmende Ellipse e wird sich wieder als die Verticalprojection des Schnittes dieses Rotationsellipsoides mit einer gewissen Ebene P ergeben, welche eine derartige Lage haben muss, dass sie drei Tangenten des Ellipsoides enthält, welcher die drei gegebenen Geraden t_1, t_2 und t_3 als Verticalprojectionen entsprechen.

Nachdem aber jede Tangente des Rotationsellipsoides, welcher eine der Geraden t_1, t_2, t_3 als Verticalprojection zukömmt, beziehungs-

weise zugleich eine Tangente derjenigen Ellipse $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sein muss, in welchen das Ellipsoid von den durch t_1, t_2, t_3 gehenden verticalprojicierenden Ebenen P^1_v, P^2_v, P^3_v geschnitten wird, so ist klar, dass die zu bestimmende Ebene durch die Bedingung, dass sie jede dieser drei Ellipsen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ in je einem Punkte berühre, gegeben ist. Denn eine derartige Ebene wird die drei Ellipsenebenen P^1_v, P^2_v und P^3_v in drei Tangenten der vorerwähnten Ellipsen, also auch, da diese auf dem Ellipsoide liegen, in drei Tangenten des Ellipsoides schneiden, welche die Geraden t_1, t_2 und t_3 zu Verticalprojectionen haben.

Da die drei Ellipsen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ auf derselben Fläche zweiten Grades (dem Rotationsellipsoide) liegen, so ist (nach Satz 451, II. Band) bekannt, dass sich durch jedes Paar derselben zwei Kegel zweiten Grades legen lassen. Die Scheitel dieser Kegel sind unschwer zu bestimmen.

Construieren wir beispielsweise den Scheitel (S, S') von einem der beiden Kegel, welche durch die Ellipsen ε_1 und ε_2 gehen.

Da diese Ellipsen eine gegen die Hauptmeridianebene η_h symmetrische Lage besitzen, so wird das Gleiche auch von dem durch dieselben gehenden Kegel gelten. Der Scheitel dieses Kegels muss daher ein Punkt (S, S') in der Hauptmeridianebene η_h sein. Der besagte Punkt (S, S') wird offenbar einer von den Schnittpunkten jener Geraden sein, welche die in der Hauptmeridianebene liegenden Punkte $m_1 n_1$ und $m_2 n_2$ der Ellipsen ε_1 und ε_2, d. i. die Schnittpunkte der Meridianellipse E mit den Ebenen P^1_v und P^2_v verbinden.

Bestimmen wir daher mit Zuhilfenahme des über AB als Durchmesser beschriebenen Kreises K_0, die Punktepaare $m_1 n_1$; $m_2 n_2$; $m_3 n_3$, in welchen die Geraden t_1, t_2, t_3, beziehungsweise die Meridianellipse schneiden, so erhält man in den Verbindungsgeraden $m_1 n_2$ und $m_2 n_1$ zwei Erzeugenden des einen der beiden durch die Ellipsen ε_1 und ε_2 gehenden Kegels und mithin im Schnittpunkte (S, S') derselben den Scheitel dieses Kegels. Die Horizontalprojection S' des Kegelscheitels liegt in der Horizontaltrace η_h des Hauptmeridians E.

Ebenso ergibt sich im Schnitte (S_1, S'_1) der beiden Geraden $m_2 m_3$ und $n_2 n_3$ der Scheitel eines Kegels, welcher durch die beiden Ellipsen ε_2 und ε_3 geht. Verbinden wir diese beiden Kegelscheitel (S, S') und (S_1, S'_1) durch eine Gerade (g, g') (die Horizontalprojection g' fällt mit η_h zusammen) und denken wir uns durch diese Gerade (g, g') eine Ebene gelegt, welche beispielsweise die Ellipse ε_2 berührt, so ist einleuchtend, dass diese Ebene sowohl eine Tangentialebene des Kegels (S, ε_2), als auch des Kegels (S_1, ε_2) sein und infolge dessen auch die beiden anderen auf diesen Kegeln liegenden Ellipsen ε_1 und ε_3 berühren müsse.

Construieren wir daher eine Ebene $P_v P_h$, welche durch die Gerade (g, g') geht und irgend eine von den drei Ellipsen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ berührt, so muss diese Ebene nothwendig auch mit den beiden noch übrigen Ellipsen eine Berührung eingehen. Die angedeutete Construction kann folgendermaßen ausgeführt werden.

Wenn die Ebene $P_v P_h$ durch die Gerade (g, g') gehen und die Ellipse ε_1 berühren soll, so muss dieselbe eine von den beiden Tangenten enthalten, welche an diese Ellipse ε_1 von dem Schnittpunkte (s, s') ihrer Ebene P'_v mit der Geraden (g, g') gezogen werden kann.

Projicieren wir daher die Ellipse ε_1 von dem Scheitel (A, A') des Ellipsoides, wie aus vorhergegangenen Erörterungen bekannt, auf die horizontale Projectionsebene als Kreis γ_1 und den Punkt (s, s') nach (σ, σ'), so hat man bloß von σ' an γ_1 die Tangente τ'_1 zu führen und dieselbe von (A, A') aus in die Ebene P'_v nach (t_1, t'_1) zurückprojicieren. Durch die so erhaltene Gerade (t_1, t'_1) und durch die Gerade (g, g') kann nun die Ebene $P_v P_h$ unmittelbar gelegt werden.

Die letztgenannte Ebene berührt, den früheren Betrachtungen gemäß, die sämmtlichen drei Ellipsen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ und schneidet deren Ebenen P^1_v, P^2_v, P^3_v in den Tangenten (t_1, t'_1); (t_2, t'_2) und (t_3, t'_3) dieser Ellipsen, also auch, nachdem diese letzteren auf der Fläche liegen, in jenen Tangenten des Ellipsoides, welche zu Verticalprojectionen die Geraden t_1, t_2, t_3 haben. Die vorbezeichnete Ebene wird demnach das Ellipsoid in einer Ellipse schneiden, welche von den drei Tangenten (t_1, t'_1); (t_2, t'_2) und (t_3, t'_3) in den nämlichen drei Punkten berührt wird, in welchen die letzteren die Ellipsen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, also auch das Ellipsoid selbst berühren.

Die verticale Projection der genannten Schnittellipse wird somit eine Ellipse sein, welche einerseits die Meridianellipse E in zwei Punkten, d. i. in jenen beiden Punkten berührt, in welchen die Meridianellipse reell oder imaginär von der schneidenden Ebene $P_v P_h$ getroffen wird, andererseits auch mit den drei gegebenen Geraden t_1, t_2, t_3 die geforderte Berührung eingeht und mithin die gesuchte Ellipse e darstellt.

Es ist an und für sich klar, dass in diesem Falle ebenso wie in allen vorhergehenden, auf ähnlichen Principien beruhenden Aufgaben, anstandslos conjugierte Durchmesser der jeweilig gesuchten Ellipse e construiert werden können. Man hat diesfalls eben nichts anderes zu thun, als die Achsen des Schnittes des Ellipsoides mit der Ebene $P_v P_h$, (wie in Aufgabe 138) gezeigt wurde, zu ermitteln, um in deren Verticalprojectionen zwei conjugierte Durchmesser der Ellipse e zu erhalten.

§. 538.

174. Aufgabe. Eine Ellipse ist durch ihre Achsen und eine Gerade, welche diese Ellipse in reellen Punkten schneidet, sind gegeben; man soll einen Kreis zeichnen, welcher die Ellipse in zwei Punkten und die gegebene Gerade in einem Punkte berührt.

Die Achsen der gegebenen Ellipse E seien AB und CD (Taf. XXIII, Fig. 154); die gegebene Gerade sei t.

Die Ellipse E fassen wir als den zur verticalen Projectionsebene parallelen Meridian und die Achse AB derselben als Rotationsachse eines Rotationsellipsoides auf.

Dies vorausgesetzt, erhält man wie in den unmittelbar vorhergegangenen Problemen die Horizontalprojection K'_1 des Äquatorialkreises dieses Ellipsoides.

Mit Benutzung dieses Ellipsoides lässt sich die Aufgabe auf zweifache, principiell verschiedene Arten, constructiv durchführen.

Erste Methode.

Wir zeichnen zunächst den Kreis c_1, welcher die Meridianellipse (AB, CD) in den Endpunkten der kleinen Achse CD berührt und betrachten denselben als die verticale Projection des Schnittes des Ellipsoides mit einer durch diese Achse CD gehenden Ebene. Die Lage dieser Ebene ist leicht zu ermitteln, da man außer der Geraden CD nur noch einen Punkt derselben zu deren Bestimmung nöthig hat. Nehmen wir diesbezüglich beispielsweise den Punkt r des Kreises c_1 an, welcher in die Achse AB fällt. Dieser Punkt ist die Verticalprojection eines Punktes der Schnittcurve, d. h. eines Punktes (r, r'), welcher sowohl dem Ellipsoide, als auch der schneidenden Ebene angehören muss. Die Horizontalprojection r' dieses Punktes findet man einfach mit Zuhilfenahme des durch r gehenden Parallelkreises (π, π').

Die durch (r, r') und $(CD, C'D')$ gelegte Ebene $H_v H_h$ schneidet mithin das Ellipsoid in einem Kegelschnitt, welcher sich vertical als Kreis c_1 projiciert. Die Kreuzrisstrace H_k dieser Ebene ist durch die Verbindungsgerade der Kreuzrissprojectionen r'' und $C''D''$ vergegenwärtigt.

Weiters ist einleuchtend, dass jede zur Ebene $H_v H_h$ parallele Ebene das Ellipsoid in einer der früheren Ellipse ähnlichen und ähnlich gelegenen Curve schneiden wird, dass deren Verticalprojection wieder ein Kreis sein werde und dass dieser letztere die Contourellipse (AB, CD) in zwei Punkten berühre.

Die Mittelpunkte aller dieser Kegelschnitte liegen auf dem der Ebene $H_v H_h$ conjugierten Durchmesser, dessen Kreuzrissprojection d''

leicht constructiv bestimmt werden kann. Der bezeichnete Durchmesser liegt nämlich in der doppeltprojicierenden Meridianebene; die Endpunkte desselben sind jene Punkte, in welchen die Meridiantangenten parallel zu der Ebene H sind. Denkt man sich daher den Meridian um 90° gedreht, so dass er mit (AB, CD) zusammenfällt, so erscheint die Schnittgerade der Meridianebene mit der Ebene H nach der Drehung in $O r_0$. Die Tangente von E in r_0 gibt sodann die Neigung des gesuchten Durchmessers an, woraus sich anstandslos seine Kreuzrissprojection d'' ableiten lässt.

Unter allen den zu $H_v H_h$ parallelen Ebenen ist nunmehr jene zu bestimmen, welche das Ellipsoid in einer Ellipse schneidet, deren Verticalprojection als ein Kreis erscheint, welcher die gegebene Gerade t berührt. Die schneidende Ebene muss also eine Tangente des Ellipsoides enthalten, deren verticale Projection mit der gegebenen Geraden t zusammenfällt.

Berücksichtigen wir ferner, dass die schneidende Ebene zur Ebene $H_v H_h$ parallel sein und eine Gerade von der Verticalprojection t enthalten muss, so ist die Richtung der Horizontalprojection dieser Geraden vollständig bestimmt.

Betrachten wir nämlich die durch t gehende vertical-projicierende Ebene, so ist ersichtlich, dass diese bereits die Ebene $H_v H_h$ in einer zu der gesuchten Tangente parallelen Geraden schneiden werde. Nachdem aber der Schnitt (l, l') mit der letzteren Ebene ohneweiters gezeichnet werden kann, so ist auch klar, dass jede Gerade, welche in einer zur Ebene H parallelen Ebene liegt und die Verticalprojection t (oder l) besitzt, gleichzeitig eine zu l' parallele Horizontalprojection besitzen müsse. Da aber überdies die Gerade t gleichzeitig die Verticalprojection einer Tangente des Ellipsoides darstellen soll, so haben wir vorderhand nichts anderes zu thun, als an die Ellipse ε_1, in welcher die durch t gelegte vertical-projicierende Ebene das Ellipsoid schneidet, eine Tangente parallel zur Geraden (l, l') zu ziehen.

Fassen wir zu diesem Zwecke den Scheitel (A, A') des Ellipsoides als Scheitel eines Kegels auf, welcher durch die Ellipse ε geht, so ist, wie bereits bekannt, die Horizontaltrace dieses Kegels ein Kreis γ. Die Construction des letzteren stimmt selbstverständlich mit der in den eben vorhergegangenen Aufgaben überein.

Ziehen wir ferner durch den Scheitel (A, A') des Kegels (A, γ) eine Gerade (λ, λ') parallel zu der Geraden (l, l') und führen wir weiters von dem Horizontaldurchstoßpunkte σ' derselben eine Tangente ϑ' an den Kreis γ, so repräsentiert die letztere die Horizontaltrace einer

durch die Gerade (λ, λ') gehenden, also zur Geraden (l, l') parallelen Tangentialebene des Kegels. Der Schnitt dieser Ebene mit der Ebene der Ellipse ε ist einerseits eine Tangente dieser Ellipse, und andererseits, da beide Ebenen zu (l, l') parallel sind, eine zu (l, l') parallele Gerade (t, t').

Diese Schnittgerade kann leicht ermittelt werden. Die horizontalen Tracen beider Ebenen schneiden sich nämlich in einem Punkte (h_1, h'_1) dieser Geraden (t, t'); die Horizontalprojection t' ist daher eine Gerade, welche durch h'_1 parallel zu l' läuft.

Legen wir nun durch die Gerade (t, t') eine Ebene $P_v P_h$ parallel zur Ebene $H_v H_h$, so schneidet diese das Ellipsoid in einer Ellipse, welche die Gerade (t, t') in dem nämlichen Punkte berührt, in welchem die letztere die Ellipse ε, also auch das Ellipsoid selbst tangiert. Die Verticalprojection dieser Ellipse wird mithin ein Kreis sein, welcher die gegebene Ellipse $(A B, C D)$ in zwei Punkten und die gegebene Gerade t in einem Punkte berührt, welcher also den den gestellten Bedingungen entsprechenden Kreis darstellt.

Der Mittelpunkt o dieses Kreises ist leicht zu bestimmen. Derselbe ist nämlich die verticale Projection des Mittelpunktes der Schnittellipse. Dieser letztere aber ist der Schnittpunkt der Ebene $P_v P_h$ mit dem ihr conjugierten Durchmesser d. Bestimmt man daher die Kreuzrisstrace P_k der schneidenden Ebene, so trifft diese die Kreuzrissprojection d'' des genannten Durchmessers in einem Punkte o'', welcher die Kreuzrissprojection jenes Ellipsenmittelpunktes darstellt. Aus der letzteren lässt sich sofort die Verticalprojection o des besagten Mittelpunktes ableiten.

§. 539.

Zweite Methode.

Rascher und einfacher gelangt man jedoch zum Ziele, wenn man direct von dem Satze 327) Gebrauch macht.

Die gegebene Ellipse E sei wieder (AB, CD) (Taf. XXIII, Fig. 155); t stelle die gegebene Kreistangente dar. Wir nehmen (AB, CD) als Hauptmeridian, die große Achse $A B$ von $(A B, CD)$ als Rotationsachse eines Ellipsoides an und bestimmen hiernach die Horizontalprojection des letzteren, d. i. die Horizontalprojection K'_1 des Äquatorialkreises.

Die Gerade t betrachten wir als Verticaltrace einer verticalprojicierenden Ebene P_v und bestimmen den Schnitt dieser Ebene mit dem Ellipsoide. Die Gerade t oder P_v repräsentiert sodann infolge der Symmetrie gegen die Hauptmeridianebene bereits eine Achse des

Schnittes. Die Endpunkte dieser Achse sind die vermittelst des über AB beschriebenen Affinkreises K_0 festgestellten Schnittpunkte m und n der Geraden t mit der gegebenen Ellipse $E\,(AB, CD)$. Halbieren wir die Strecke mn in ϱ, so stellt die vertical-projicierende, durch ϱ gehende Gerade die zweite Achse vor, deren Endpunkte (p, p') und (q, q') sich direct im Schnitte mit dem durch ϱ bestimmten und leicht zu construierenden Parallelkreise (π, π') ergeben. Der Schnitt des Ellipsoides mit der Ebene P_v ist mithin eine Ellipse, deren große Achse die in der Ebene des Hauptmeridians E gelegene Gerade mn ist, während die Gerade $p'q'$ die Länge der kleinen Achse darstellt.

Man kann nun anstandslos auch die beiden auf mn liegenden Brennpunkte f_1 und f_2 dieser Schnittellipse construieren.

Jeder dieser beiden Brennpunkte f_1 und f_2 ist (nach Satz 327) der Berührungspunkt der Ebene P_v mit einer dem Ellipsoide längs eines Kreises eingeschriebenen Kugel. Da der Mittelpunkt o dieser Kugel auf der Rotationsachse AB, ihr Berührungspunkt f_1 (oder f_2) aber in der Ebene der gegebenen Ellipse E liegt, so ist einleuchtend, dass die letztere Ebene die Kugel in einem größten Kreise C schneiden wird, welcher t in f_1 (oder f_2) und auch die Ellipse E in zwei Punkten berührt. Den Mittelpunkt o dieses Kreises C erhält man im Schnitte von AB mit der von f_1 (oder f_2) auf t gefällten Senkrechten, womit die obgestellte Aufgabe gleichfalls gelöst und durchgeführt ist.

§. 540.

175. Aufgabe. Es sind zwei Ellipsen und innerhalb der ersten ein Punkt gegeben; man soll eine dritte Ellipse durch den gegebenen Punkt legen, welche die erste in zwei Punkten berührt und mit der zweiten ähnlich und ähnlich gelegen ist.

Die beiden Ellipsen E und e seien durch die diesbezüglichen Achsen AB, CD und resp. ab, cd (Taf. XXIV, Fig. 156) gegeben; innerhalb der Ellipse E ist der Punkt p gegeben; durch diesen Punkt p soll eine Ellipse e_1 gezeichnet werden, welche die Ellipse E in zwei Punkten berührt und mit der Ellipse e ähnlich und ähnlich gelegen ist.

Zeichnen wir zunächst, um diese Aufgabe der Lösung zuzuführen, irgend eine Ellipse e', welche mit der Ellipse e ähnlich und ähnlich gelegen ist, und die Ellipse E in zwei Punkten berührt. Dies kann folgendermaßen geschehen.

Wir verschieben die gegebene Ellipse $(ABCD)$ oder (E) parallel zu sich selbst so lange, bis sie in eine mit der zweiten gegebenen Ellipse $abcd$ oder e concentrische Lage $(A_1 B_1 C_1 D_1)$ gelangt und

construieren in dieser Lage das **Paar gemeinschaftlicher conjugierter Durchmesser** der beiden Ellipsen $(A_1B_1C_1D_1)$ und $(abcd)$.

Zu diesem Zwecke ziehen wir eine beliebige Gerade, am einfachsten eine zu einer der vier Achsen, beispielsweise zu A_1B_1, senkrechte Gerade rr. Die conjugierten Durchmesser der Ellipse (A_1B_1, C_1D_1) bestimmen auf dieser Geraden eine Punktinvolution, deren Centralpunkt ihr Schnittpunkt m mit A_1B_1 ist, während man ein Paar conjugierter Punkte x_1y_1 als die Schnittpunkte der zu A_1C_1 und A_1D_1 parallelen conjugierten Durchmesser erhält. Schlägt man über x_1y_1 als Durchmesser einen Kreis, so schneidet dieser die verlängerte Gerade A_1mB_1 in dem Potenzpunkte M' dieser Involution.

Ebenso bestimmen auch die conjugierten Durchmesser von $abcd$ auf rr eine Punktinvolution. Ein Paar conjugierter Punkte x_2y_2 erhält man im Schnitte mit den zu bc und bd parallelen conjugierten Durchmessern; ein zweites Paar solcher Punkte ergibt sich im Schnitte x_3y_3 mit den beiden Achsen ab und cd. Die über x_2y_2 und x_3y_3 als Durchmesser beschriebenen Kreise liefern den Potenzpunkt M'' dieser zweiten Involution.

Die gemeinschaftlich conjugierten Punkte dieser beiden Involutionen bestimmen mit dem Mittelpunkte o das Paar gemeinschaftlicher Durchmesser der beiden Ellipsen $A_1B_1C_1D_1$ und $abcd$.

Um die besagten Durchmesser zu erhalten, hat man, wie aus Früherem bekannt, bloß durch M' und M'' einen Kreis zu legen, welcher seinen Mittelpunkt n auf rr hat. Der letzt bezeichnete Kreis schneidet rr bereits in den beiden verlangten Punkten X und Y; es sind sonach $Xo = d'_1$ und $Yo = d'_2$ die gesuchten gemeinschaftlichen conjugierten Durchmesser.

Bestimmen wir weiters noch deren Endpunkte, indem wir die besagten Durchmesser als Durchmesser der Ellipse $abcd$ betrachten, mit Hilfe des über ab geschlagenen Affinkreises γ_0, so ergeben sich dieselben beziehungsweise in μ, ν und σ, τ.

Führen wir durch den Mittelpunkt O der gegebenen Ellipse (AB, CD) die Geraden d_1 und d_2 parallel zu d'_1 und d'_2, so stellen diese Geraden d_1 und d_2 auf Grund der eben durchgeführten Construction, auch zwei conjugierte Durchmesser der Ellipse (AB, CD) dar. Die Endpunkte m und n des einen dieser Durchmesser können wir unmittelbar wieder mit Zuhilfenahme des über AB beschriebenen Affinkreises K_0 feststellen. Die Tangenten t_m und t_n in diesen Punkten sind natürlich parallel zu dem zweiten Durchmesser d_2.

Bestimmen wir nun auf d_2 zwei Punkte s und t derart, dass $sO = tO$ wird und dass sich $sO : mO = \sigma o : \mu o$ (was einfach dadurch

erreicht werden kann, wenn man die Gerade ms durch m parallel zu $\mu\sigma$ zieht), so werden mn und st zwei conjugierte Durchmesser einer Ellipse e' darstellen, welche mit der Ellipse $e = (ab, cd) = (\mu\nu, \sigma\tau)$ ähnlich und ähnlich gelegen ist. Diese Ellipse e' berührt aber auch die Ellipse E oder (AB, CD) in den beiden Punkten m und n, da sie mit derselben in m und n die betreffenden Tangenten t_m und t_n gemein hat.

Betrachten wir nun die Ellipse $(mn, st) = (e')$ als die Verticalprojection eines ebenen Schnittes desjenigen Ellipsoides, als dessen Hauptmeridian wir die gegebene Ellipse (AB, CD) und als dessen Rotationsachse wir die Achse AB wählen. Die horizontale Projection des Äquators K'_1 ist wie in den früheren Fällen zu bestimmen.

Um die Ebene dieses Scheitels festzustellen, haben wir bloß drei Punkte der Ellipse e' als die Verticalprojectionen von Punkten des Ellipsoides zu betrachten und unter dieser Voraussetzung ihre Horizontalprojectionen zu ermitteln.

Vor allem ist klar, dass die Horizontalprojectionen m' und n' der Punkte m und n, da letztere der Meridianellipse (AB, CD) selbst angehören, in der Horizontaltrace η_h der entsprechenden Hauptmeridianebene liegen werden. Ferner bestimmen wir zu dem Punkte des Ellipsoides, dessen Verticalprojection in s ist, die zugehörige horizontale Projection s' und legen endlich durch die drei Punkte (m, m'), (n, n') und (s, s') eine Ebene $\Pi_v \Pi_h$.

Da parallele Ebenen eine Fläche zweiten Grades stets in ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten schneiden, da ferner die Parallelprojectionen auf eine und dieselbe Ebene oder auf untereinander parallele Ebenen wieder ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte sein müssen, so ist einleuchtend, dass jede zur Ebene $\Pi_v \Pi_h$ parallele Ebene das Ellipsoid in einem Kegelschnitte schneiden wird, dessen Verticalprojection die Meridianellipse (AB, CD) in zwei Punkten berühren und zu der Ellipse (mn, st), also auch zu der gegebenen Ellipse $(ab, cd) = (\mu\nu, \sigma\tau)$ ähnlich und ähnlich gelegen sein wird.

Es erübrigt somit nur noch, die letzte Bedingung, nämlich die bezüglich des gegebenen Punktes p zu erfüllen. Durch diesen Punkt soll die gesuchte Ellipse gehen.

Die letztgestellte Anforderung wird einfach dadurch erfüllt, dass man unter der Voraussetzung, p sei die Verticalprojection eines Punktes auf dem Ellipsoide, dessen Horizontalprojection p' ermittelt, und durch (p, p') eine Ebene $P_v P_h$ parallel zur Ebene $\Pi_v \Pi_h$ legt. Diese Ebene schneidet das Ellipsoid in einer durch (p, p') gehenden Ellipse, deren Verticalprojection die gegebene (Meridian-) Ellipse (AB, CD) in zwei

Punkten berührt, und zur Ellipse (mn, st), also auch zu der gegebenen Ellipse (ab, cd) ähnlich und ähnlich gelegen ist, und daher die gesuchte Ellipse repräsentiert.

§. 541.

176. Aufgabe. Es sind zwei Ellipsen und eine Gerade, welche die Ellipse in zwei reellen Punkten schneidet, gegeben; es ist eine dritte Ellipse zu construieren, welche die erste in zwei Punkten, die gegebene Gerade in einem Punkte berührt und mit der zweiten Ellipse ähnlich und ähnlich gelegen ist.

Die bezüglich der Lösung des gestellten Problemes durchzuführenden Constructionen bleiben bis inclusive der Ermittelung der Lage der Ebene $\Pi_v \Pi_h$ genau dieselben, wie die in der vorhergehenden Aufgabe zur Geltung gebrachten.

An die Stelle der Punktbedingung p der vorigen Aufgabe tritt aber gegenwärtig die Tangentialbedingung t ein.

Es wird sich nun (sowie in Aufgabe 174) darum handeln, an die Ellipse, in welcher das Ellipsoid von der durch die gegebene Gerade t gelegten vertical-projicierenden Ebene geschnitten wird, eine Tangente (t, t') zu legen, welche zur Ebene $\Pi_v \Pi_h$, also auch zu deren Schnitt (l, l') mit der genannten projicierenden Ebene parallel ist.

Diese Construction kann genau so wie in Aufgabe 174) durchgeführt werden. Die Gerade (t, t') wird sodann eine zur Ebene $\Pi_v \Pi_h$ parallele Tangente des Ellipsoides mit der gegebenen Verticalprojection t repräsentieren, und die durch diese Tangente (t, t') parallel zu $\Pi_v \Pi_h$ gelegte Ebene $P_v P_h$ wird das Ellipsoid in einer Ellipse schneiden, deren Verticalprojection die geforderten Eigenschaften besitzen und somit die verlangte Ellipse darstellen wird.

XXV. Capitel.

Constructionsaufgaben, das zweitheilige (bifocale) Rotations-Hyperboloid betreffend.

§. 542.

Bevor wir auf die Lösung diesbezüglicher Aufgaben übergehen, wollen wir noch zwei fundamentale Constructionen erledigen, welche für die nachstehenden Erörterungen unumgänglich nothwendig sind.

177. Aufgabe. Eine Hyperbel ist durch ihre reelle Achse und durch ihre Asymptoten gegeben; es sind deren Schnittpunkte mit einer gegebenen Geraden auf die möglichst einfache Weise zu construieren [1]).

Die reelle Achse der gegebenen Hyperbel sei AB (Taf. XXIII, Fig. 157); Y_1 und Y_2 seien ihre Asymptoten; g stelle die gegebene Gerade dar.

Um die vorliegende Aufgabe in der vorgeschriebenen möglichst einfachen Weise zu lösen, ziehen wir die Scheiteltangente C_a im Punkte A, d. i. die Senkrechte zur Achse AB, und schreiben dem von den Asymptoten Y_1 und Y_2 und dieser Scheiteltangente gebildeten Dreiecke den Kreis K_0 ein, welcher, wie unschwer einzusehen, die Gerade C_a, also auch die gegebene Hyperbel K im Punkte A berühren wird.

Ist dieser Kreis zu klein, um an demselben die nothwendigen Constructionen mit Genauigkeit vornehmen zu können, so wählt man den zweiten Kreis k_0 (angeschriebenen Kreis), welcher gleichfalls C_a in A, und ebenso auch die Geraden Y_1 und Y_2 berührt. Weiters verbinden wir die Berührungspunkte α_0 und β_0 von Y_1 und Y_2 mit diesem Kreise K_0 durch eine Gerade G_a, welche offenbar zu C_a parallel sein wird.

Da die beiden Asymptoten Y_1 und Y_2 zwei Tangenten der Hyperbel K darstellen, deren Berührungspunkte α_∞ und β_∞ in unendlicher Entfernung liegen, so kann man den Kreis K_0 mit der Hyperbel K als perspectivisch collinear betrachten.

Hierbei stellt der Mittelpunkt O der Hyperbel K das Collineationscentrum, die Gerade C_a, da sie eine gemeinschaftliche Tangente beider Linien ist, die Collineationsachse, und die Gerade G_a, da zwei ihrer Punkte α_0 und β_0 zwei unendlich fernen Punkten α_∞ und β_∞ entsprechen, die eine Gegenachse, und zwar diejenige dar, welche der unendlich fernen Geraden im Systeme der Hyperbel K entspricht.

Die der Geraden g collinear entsprechende Gerade g_0 lässt sich nunmehr leicht bestimmen. Dieselbe geht nämlich einerseits durch den Punkt δ, welchen g mit der Collineationsachse C_a gemein hat, und andererseits durch den Punkt v_0, welcher collinear dem unendlich fernen Punkt v_∞ von g entspricht, d. h. durch den Punkt v_0, in welchem der zu g parallele Collineationsstrahl Ov_0 die Gegenachse G_a trifft.

[1]) Peschka, Construction der Durchschnittspunkte von Geraden mit Kegelschnittslinien. Grunert's Archiv d. Math. u. Physik. Theil 59, Heft 1.

Die so erhaltene Gerade g_0 schneidet den Collinearkreis K_0 in den Punkten a_0 und b_0. Diesen Punkten entsprechen collinear die Schnittpunkte a und b der Geraden g mit der Hyperbel K und werden dieselben im Schnitte von g mit den Collineationsstrahlen Oaa_0 und Obb_0 erhalten. Die Gerade g trifft die Asymptoten Y_1 und Y_2 in zwei Punkten σ_1 und σ_2, die, wie bekannt, eine derartige Lage haben müssen, dass $\sigma_1 a = \sigma_2 b$ wird. Letztere Eigenschaft kann nebstbei auch als Controle für die Genauigkeit der vorstehenden Construction für die Punkte a und b verwendet werden.

Ist die gegebene Gerade parallel zur Collineationsachse, wie beispielsweise die Gerade g_1, so ist, wie wir aus früherem wissen, auch ihre Colleargerade g^0_1 parallel zur Collineationsachse C_a.

Um demnach diesfalls die Colleargerade g^0_1 zu finden, hat man bloß einen ihrer Punkte zu bestimmen. Zum Behufe dieser Bestimmung dünkt uns folgende Construction geeignet. Die Gerade g_1 schneidet die Achse AB in einem Punkte m. Zieht man durch m eine Parallele $m\delta_1$ zu einer der Asymptoten, etwa zu Y_1, so trifft diese Gerade die Collineationsachse C_a im Punkte δ_1; es entspricht daher dieser Parallelen, da α_0 und der unendlich ferne Punkt α_∞ von Y_1 (und ebenso auch von $\delta_1 m$) sich collinear entsprechen, die Gerade $\delta_1 \alpha_0$. Letztgenannte Gerade $\delta_1 \alpha_0$ schneidet sodann die Achse AB in jenem Punkte m_0, welcher dem Punkte m von g_1 entspricht; es ergibt sich demnach die verlangte Colleargerade g^0_1 als die Parallele durch m_0 zur Collineationsachse C_a.

Die Bestimmung der Schnittpunkte a_1 und b_1 von g_1 mit der Hyperbel K kann nunmehr ebenso wie im vorherbesprochenen allgemeinen Falle erfolgen. Die Gerade g^0_1 schneidet nämlich den Kreis K_0 in den beiden Punkten a^0_1 und b^0_1. Führt man die Collineationsstrahlen Oa^0_1 und Ob^0_1, so treffen diese die Gerade g_1 in den gesuchten Schnittpunkten a_1 und b_1.

Ebenso einfach ist es, die Schnittpunkte der Hyperbel mit einer durch O gehenden Geraden festzustellen, d. h. die Endpunkte eines Hyperbeldurchmessers zu construieren.

§. 543.

178. Aufgabe. Durch einen Punkt sind an eine durch die reelle Achse und die Asymptoten gegebene Hyperbel die Tangenten auf die möglichst einfache Art zu legen.

Es braucht wohl kaum erst besonders hervorgehoben zu werden, dass alle Tangenten-Constructionen an eine Hyperbel ebenfalls mittelst

des Collinearkreises K_0 (Taf. XXIII, Fig. 157) durchgeführt werden können. Man wird von dem eben Gesagten namentlich dann Gebrauch machen, wenn der Collinearkreis K_0 und die Achsen G_a und C_a bereits vorliegen oder zum Zwecke anderer Constructionen gesucht, beziehungsweise verwendet wurden.

Sollen jedoch von einem Punkte aus an eine Hyperbel direct die Tangenten, ohne andere vorausgehende Constructionen, gezogen werden, so dürfte wohl das nachstehende Verfahren am einfachsten zum Ziele führen.

Ist AB (Taf. XXIV, Fig. 158) die reelle Achse und sind Y_1 und Y_2 die Asymptoten der Hyperbel, so bestimmt man vor allem die Brennpunkte F_1 und F_2 derselben und denkt sich weiters über der reellen Achse AB als Durchmesser einen Kreis K beschrieben.

Stellt ferner P irgend einen Punkt dar, von welchem aus an die Hyperbel die Tangenten gezogen werden sollen, so genügt es, diesen Punkt mit einem der beiden Brennpunkte, allenfalls mit F_1, zu verbinden und über F_1P als Durchmesser einen Kreis γ zu beschreiben, die Schnittpunkte α und β dieses Kreises mit dem früher gezeichneten Kreise K festzustellen und diese Punkte α und β mit P zu verbinden, um sogleich die gesuchten Tangenten t_1 und t_2 zu erhalten.

Um den Berührungspunkt p einer dieser Tangenten, beispielsweise von t_1 zu bestimmen, zieht man die Gerade $F_1\alpha$, welche offenbar auf t_1 senkrecht steht, und bestimmt auf dieser letzteren den zu F_1 in Bezug auf t_1 symmetrischen Punkt f, indem man einfach $F_1\alpha = \alpha f$ macht. Die Gerade, welche f mit dem zweiten Brennpunkte F_2 verbindet, schneidet die Tangente t_1 bereits in dem verlangten Berührungspunkte p_1.

Die Richtigkeit dieser Constructionen ist ohne jedwede Schwierigkeit nachzuweisen. Ziehen wir nämlich weiters noch die Gerade αO, so sieht man sofort, dass die Dreiecke $F_1\alpha O$ und $F_1 f F_2$ ähnlich sind; denn es ist

$$2.F_1\alpha = Ff \text{ und } 2.F_1 O = F_1F_2.$$

Hieraus folgt aber auch, dass $fF_2 = 2.\alpha O$, also gleich $2.AO = AB$ sei.

Da ferner $p_1\alpha$ auf F_1f senkrecht steht und $F_1\alpha = \alpha f$ ist, so ist das Dreieck F_1p_1f gleichschenklig, also $F_1p_1 = p_1f$. Hiernach ergibt sich mit Bezug auf das vorherige Ergebnis, dass

$$F_2p_1 - F_1p_1 = AB$$

sei, dass also p_1 einen Punkt der Hyperbel darstelle.

Nachdem endlich die Gerade t_1 oder $p_1 \alpha$ den Winkel zwischen den Radienvectoren $F_1 p_1$ und $F_2 p_1$ halbiert, so ist, der Forderung entsprechend, $p_1 \alpha$ die Tangente der Hyperbel im Punkte p_1.

Diese beiden einfachen Aufgaben vorauszuschicken wurde aus dem Grunde als nothwendig erkannt, weil dieselben in dieser oder jener Form bei allen nachstehenden Constructionen wiederkehren werden.

Mit Zugrundelegung derselben übergehen wir hiemit auf unsere eigentliche Aufgabe, d. i. auf die constructive Behandlung des zweitheiligen Rotationshyperboloides.

Hierbei wollen wir im allgemeinen wieder voraussetzen, dass die Rotationsachse, welche, wie wir bereits wissen, in diesem Falle die reelle Achse der Meridianhyperbel sein muss, zu einer der Projectionsebenen, allenfalls zur horizontalen, normal sei. Sollte eine Veranlassung zu einer anderen Lage derselben vorliegen oder direct gefordert werden, so wird dies am betreffenden Orte ausdrücklich bemerkt werden.

§. 544.

179. Aufgabe. **Ein bifocales Rotationshyperboloid ist durch seinen Meridian gegeben; es ist die Horizontalprojection eines auf der Fläche liegenden Punktes zu bestimmen, wenn dessen Verticalprojection als bekannt vorliegt.**

a) Der Hauptmeridian liegt gezeichnet vor.

Es sei (ZZ') (Taf. XXIV, Fig. 159) die Rotationsachse, K die vorliegende Hauptmeridianhyperbel und a die gegebene Verticalprojection des Punktes auf der Fläche.

Zieht man durch a die Parallele ε_v zur Grundlinie, so repräsentiert dieselbe einerseits die verticale Trace einer zur Grundebene parallelen Ebene, andererseits aber auch die Verticalprojection des durch den Punkt a gehenden Parallelkreises (π, π'). Der Durchmesser dieses Parallelkreises ist offenbar der Länge jener Sehne $\alpha\beta$ gleich, welche die Gerade ε_v auf der Hauptmeridian-Hyperbel K bestimmt. Die Horizontalprojection π' dieses Kreises kann daher unmittelbar verzeichnet werden. Projiciert man a in denselben, so erhält man die beiden Punkte a' und a'_1, von welchen jeder derselben als die Horizontalprojection eines auf dem Hyperboloide liegenden Punktes, mit der Verticalprojection a, angesehen werden kann.

b) Die Hauptmeridianhyperbel liegt nicht gezeichnet vor, sondern ist nur durch die reelle Achse und die Asymptoten gegeben.

Die reelle Achse des Rotationshyperboloides sei $(AB, A'B')$ (Taf. XXIV, Fig. 160), dieselbe stelle gleichzeitig die Rotationsachse des Hyperboloides dar; Y_1 und Y_2 seien die Asymptoten der Hauptmeridianhyperbel und a sei die gegebene Verticalprojection.

So wie im vorhergehenden Falle legen wir durch a die zur horizontalen Projectionsebene parallele Ebene g_v. Dieselbe schneidet das Hyperboloid in einem Parallelkreise (π, π'), dessen Durchmesser der Länge jener Sehne $\alpha\beta$ gleich ist, welche die Verticaltrace g_v dieser Ebene auf der Hauptmeridianhyperbel bestimmt. Hiernach sind bloß die Schnittpunkte α und β der Geraden g_v mit dieser Hyperbel aufzusuchen, was (wie in Aufgabe 177 gezeigt wurde) vermittelst des Collinearkreises K_0 geschieht.

Beschreibt man sodann in der Horizontalprojection aus dem Mittelpunkte O' einen Kreis π' mit dem Radius r gleich $\alpha m = \beta m$, so repräsentiert derselbe die Horizontalprojection des gesuchten Parallelkreises, auf welcher Projection man nun unmittelbar die beiden Horizontalprojectionen a' und a'_1, welche der Verticalprojection a entsprechen, findet.

§. 545.

180. Aufgabe. **Es sind die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit einem zweitheiligen Rotationshyperboloide zu bestimmen.**

Erste Methode. Mit Zuhilfenahme einer dem Hyperboloide centrisch collinearen Kugel.

Die Rotationsachse des Hyperboloides sei $(AB, A'B')$ (Taf. XXIV, Fig. 161), die Asymptoten des Hauptmeridians seien (Y_1, Y_2), endlich stellen (g, g') die Projectionen der gegebenen Geraden dar.

Denken wir uns vor allem den Collinearkreis K_0 der Hauptmeridianhyperbel gezeichnet. Die Scheiteltangente T_e der Hyperbel repräsentiert hiebei gleichzeitig die Collineationsache C_a.

Stellen wir uns vor, dass dieser Collinearkreis um die Achse $(AB, A'B')$ so lange gedreht werde, bis er in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, so wird derselbe, wie schon früher (§. 381) nachgewiesen wurde, eine Kugel S_0 erzeugen, welche mit dem Rotationshyperboloide centrisch collinear ist. Hierbei stellt der Mittelpunkt (O, O') des Hyperboloides das Collineationscentrum, die Scheiteltangentialebene des Hyperboloides die Collineationsebene C_e und endlich die zur Drehachse senkrechte Ebene G_e, welche von der Berührungssehne des Kreises K_0 mit den Asymptoten bei der Drehung erzeugt wird, d. i. die Ebene des Berührungskreises der Kugel S_0 mit dem Asymptotenkegel des Hyperboloides, die Gegenebene dar.

Die der gegebenen Geraden (g, g') collineare Gerade (g_0, g'_0) ist unschwer zu ermitteln. Der Punkt (δ, δ'), in welchem nämlich die Gerade (g, g') die Collineationsebene C_e schneidet, bleibt bei der Collinear-Transformation ungeändert; dem unendlich fernen Punkte von (g,g') dagegen entspricht in der Gegenebene G_e jener Punkt (v_0, v'_0), in welchem dieselbe von dem zu (g, g') parallelen Collineationsstrahle $(O v_1, O' v'_0)$ getroffen wird. Die Verbindungsgerade (g_0, g'_0) der Punkte (δ, δ') und (v_0, v'_0) repräsentiert mithin die gesuchte, zu (g, g') collineare Gerade.

Bestimmt man nun die Schnittpunkte (a_0, a'_0) und (b_0, b'_0) dieser Geraden mit der Collinearkugel (S_0, S'_0) auf die uns bereits bekannte Weise, so entsprechen diese collinear den gesuchten Schnittpunkten (a, a') und (b, b'). Die letzteren werden sich offenbar im Schnitte der Geraden (g, g') mit den betreffenden Collineationsstrahlen $O a_0 a$ und $O b_0 b$ ergeben.

§. 546.

Zweite Methode.

Die eben besprochene Methode ist insoferne einigermaßen umständlich, als man von einer Hilfsconstruction, die darin besteht, den Schnitt einer Geraden mit einer Kugel zu bestimmen, Gebrauch zu machen hat. Bei der nun zu erörternden Methode ist von dieser Construction Umgang genommen und dürfte daher schon deshalb die einfachere sein.

Sei nämlich wieder $(AB, A'B')$ (Taf. XXIV, Fig. 162) die Rotationsachse, seien ferner Y_1 und Y_2 die Asymptoten des Hauptmeridians und (g, g') die gegebene Gerade.

Denken wir uns diesfalls durch die gegebene Gerade (g, g') eine vertical-projicierende Ebene P_v gelegt, und den Schnitt derselben mit dem Rotationshyperboloide bestimmt.

Da das Hyperboloid gegen die Hauptmeridianebene η_h symmetrisch ist, und das Gleiche auch von der Ebene P_v, weil sie auf η_h senkrecht steht, gilt, so wird der Schnitt von η_h und P_v eine Achse der Schnittcurve sein. Die Endpunkte (m, m') und (n, n') dieser Achse erhält man im Schnitte der Geraden g oder P_v mit der Hauptmeridianhyperbel durch Zuhilfenahme des Collinearkreises K_0. Die zweite Achse dieses Schnittes benöthigen wir nicht. Die oberwähnte Schnittcurve trifft die in ihrer Ebene liegende Gerade (g, g') in zwei Punkten, welche bereits die gesuchten Schnittpunkte (a, a') und (b, b') darstellen.

Dieselben können, wie folgt, construiert werden. Legt man durch die erhaltene Schnittcurve einen Kegel, dessen Mittelpunkt der eine Scheitel,

etwa (B, B'), des Hyperboloides ist, so schneidet (nach Satz 367) dieser Kegel die horizontale Projectionsebene in einem Kreise k. Der besagte Kegel ist gegen die Hauptmeridianebene η_h symmetrisch, daher in natürlicher Folge dieses Umstandes die Horizontaldurchstoßpunkte μ' und ν' der Umrisserzeugenden $(Bm, B'm')$ und $(Bn, B'n')$, Endpunkte eines Durchmessers dieses Kreises sind, welcher somit direct in (k, k') dargestellt werden kann.

Die durch den Kegelscheitel (B, B') und die Gerade (g, g') gelegte Ebene schneidet die horizontale Projectionsebene in einer Geraden γ, welche ihrerseits wieder den Kreis (K) in den beiden Punkten α' und β' trifft. Die Kegelerzeugenden $(B\alpha, B'\alpha')$ und $(B\beta, B'\beta')$ treffen die Gerade (g, g') in den Schnittpunkten (a, a') und (b, b') derselben mit dem Kegel, also auch in den Schnittpunkten der Geraden (g, g') mit dem Kegelschnitte $(mn, m'n')$, woraus aber unmittelbar folgt, dass (a, a') und (b, b') die der Geraden (g, g') und dem Hyperboloide gemeinschaftlichen Punkte sind.

§. 547.

181. Aufgabe. **Es ist der Schnitt eines bifocalen Rotationshyperboloides mit einer Ebene durch seine Achsen darzustellen.**

Die Rotationsachse des Hyperboloides sei $(AB, A'B')$ (Taf. XXV, Fig. 163); Y_1 und Y_2 seien die Asymptoten des Hauptmeridians; $E_v E_h$ sei die schneidende Ebene.

Construieren wir zunächst die zur schneidenden Ebene senkrechte Meridianebene $P_v P_h$, d. i. jene Ebene, deren Horizontaltrace P_h auf der Horizontaltrace E_h der schneidenden Ebene E senkrecht steht, so ist diese Meridianebene zugleich eine Symmetrieebene sowohl in Bezug auf das Hyperboloid, als auch in Bezug auf die Ebene $E_v E_h$. Die Folge hiervon ist, dass die Schnittgerade (s, s') dieser Meridianebene $P_v P_h$ mit der gegebenen Ebene $E_v E_h$ eine Achse des zu suchenden Kegelschnittes (Σ, Σ') darstellen wird.

Bezugnehmend auf die Bestimmung der Achsen dieses Kegelschnittes (Σ, Σ') wollen wir zu deren Feststellung zwei verschiedene Methoden hier näher besprechen.

Erste Methode. Durch Anwendung der Collinearkugel.

Dem Asymptotenkegel denken wir uns die Collinearkugel (S_0, S'_0) (Taf. XXV, Fig. 163) derart eingeschrieben, dass dieselbe durch den Scheitel (A, A') des Hyperboloides geht. Dies vorausgesetzt fällt die Scheiteltangentialebene T_e mit der Collineationsebene C_e zusammen, und ist die Ebene G_e des Berührungskreises der Kugel mit dem Asymptotenkegel gleichzeitig die Gegenebene.

Um vor allem die Endpunkte der oberwähnten Achse (s, s'), d. i. die Schnittpunkte derselben mit dem Hyperboloide zu ermitteln, suchen wir die ihr collinear entsprechende Gerade (s_0, s'_0). Diese ergibt sich, wie wir wissen, als die Verbindungsgerade des Punktes (δ, δ'), in welchem (s, s') die Collineationsebene C_e schneidet, mit dem Punkte (v_0, v'_0), in welchem die Gegenebene G_e von dem zu (s, s') parallelen Collineationsstrahle $(O v_0, O' v'_0)$ getroffen wird.

Die Schnittpunkte (a_0, a'_0) und (b_0, b'_0) dieser Geraden (s_0, s'_0) mit der Collinearkugel S_0 werden auf die bereits mehrfach besprochene Weise (durch Umlegung um die Horizontalprojection s'_0) gefunden. Den bezeichneten Punkten entsprechen collinear die gesuchten Schnittpunkte (a, a') und (b, b') der Geraden (s, s') mit dem Hyperboloide, und werden dieselben im Schnitte (a, a') und (b, b') der Geraden (s, s') mit den Collineationsstrahlen $(O a_0, O' a'_0)$ und $(O b_0, O' b'_0)$ erhalten.

Halbiert man die Achse $(ab, a'b')$ des Kegelschnittes (Σ, Σ') im Punkte (o, o'), so repräsentiert dieser letzterhaltene Punkt den Mittelpunkt des genannten Kegelschnittes. Die Gerade $(\varepsilon, \varepsilon')$, welche durch (o, o') senkrecht zu (s, s'), also parallel zur Trace E_h gezogen wird, stellt sodann die zweite Achse des Kegelschnittes (Σ, Σ') dar. Die Endpunkte derselben, d. h. die Schnittpunkte von $(\varepsilon, \varepsilon')$ mit dem Hyperboloide können gleichfalls mittelst der Collinearkugel (S_0, S'_0) gefunden werden. Dem Punkte (o, o') entspricht nämlich collinear der Schnittpunkt (o_0, o'_0) der Geraden (s_0, s'_0) mit dem Collineationsstrahle $(Oo, O'o')$, und da einer zur Collineationsebene parallelen Geraden wieder nur eine zu derselben parallele Gerade entspricht, so erhält man die Collineargerade von $(\varepsilon, \varepsilon')$ als die durch den Punkt (o_0, o'_0) zu $(\varepsilon, \varepsilon')$ geführte Parallele $(\varepsilon_0, \varepsilon'_0)$.

Bestimmt man nun die Schnittpunkte (c_0, c'_0) und (d_0, d'_0) der Geraden $(\varepsilon_0, \varepsilon'_0)$ mit der Collinearkugel, so werden denselben die gesuchten Achsenendpunkte von $(\varepsilon, \varepsilon')$ collinear entsprechen. Dieselben ergeben sich unmittelbar als die Schnittpunkte (c, c') und (d, d') der Geraden $(\varepsilon, \varepsilon')$ mit den Collinationsstrahlen $(O c_0, O' c'_0)$ und $(O d_0, O' d'_0)$.

Der Kegelschnitt (Σ, Σ') ist somit, wie verlangt wurde, durch seine beiden Achsen $(ab, a'b')$ und $(cd, c'd')$ dargestellt.

§. 548.

Zweite Methode.

Auch diesfalls denken wir uns die eine Achse (s, s') (Taf. XXV, Fig. 164) als den Schnitt der gegebenen Ebene $E_v E_h$ mit der zu $E_v E_h$ senkrechten Meridianebene $P_v P_h$ bestimmt. Da diese Gerade (s, s')

in einer Meridianebene liegt, so schneidet sie die Rotationsachse in einem Punkte (ϱ, ϱ').

Die Endpunkte der obgenannten Achse sind offenbar deren Schnittpunkte mit dem Hyperboloide, und zwar insbesondere mit dem in der Ebene $P_v P_h$ liegenden Meridiane.

Drehen wir diese Ebene $P_v P_h$ sammt der in ihr liegenden Geraden (s, s') um die Rotationsachse $(A\,B, A'\,B')$ in die zur verticalen Projectionsebene parallele Lage, so fällt der betreffende Meridian nach dieser Drehung mit dem Hauptmeridiane zusammen, während die Verticalprojection der mitgedrehten Geraden (s, s') in σ erhalten wird.

Es ist nun an und für sich klar, dass sich die beiden vorgenannten Schnittpunkte nach vollbrachter Drehung als die gemeinschaftlichen Punkte der Geraden σ und des Hauptmeridians darstellen werden. Wir construieren die besagten Schnittpunkte α und β durch Zuhilfenahme des zur Hauptmeridianhyperbel collinearen Kreises K_0, wie dies in Aufgabe 177) gezeigt wurde.

Dreht man die so gefundenen Punkte α und β in die Gerade (s, s') nach (a, a') und (b, b') zurück, so repräsentieren diese letzteren die gesuchten Endpunkte der Achse (s, s').

Der Halbierungspunkt (o, o') der Strecke $(a\,b, a'\,b')$ ist gleichzeitig der Mittelpunkt des Kegelschnittes (Σ, Σ') während die Gerade (e, e'), welche durch denselben senkrecht zu (s, s'), also parallel zur Trace E_h gezogen wird, die zweite Achse des zu bestimmenden Kegelschnittes (Σ, Σ') darstellt.

Die Endpunkte derselben, d. i. die Schnittpunkte der Geraden (e, e') mit dem Hyperboloide, bestimmen wir auf nachstehende Weise.

Wir legen durch die gesuchte Schnittcurve (Σ, Σ') einen Kegel, dessen Spitze einer der beiden Scheitel des Hyperboloides, beispielsweise der Scheitel (B, B') ist. Dieser Kegel schneidet die horizontale Projectionsebene in einem leicht zu construierenden Kreise (K).

Da nämlich die Ebene $P_v P_h$ eine Symmetrieebene für den besagten Kegel ist, so muss ihre Horizontaltrace P_h einen Durchmesser des Kreises (K) repräsentieren. Die Endpunkte dieses Durchmessers sind, wie unschwer einzusehen, die Horizontaldurchstoßpunkte (α_1, α'_1) und (β_1, β'_1) der durch die Punkte (a, a') und (b, b') von (Σ, Σ') gehenden Kegelerzeugenden $(B\,a, B'\,a')$ und $(B\,b, B'\,b')$. Hiernach kann der Kreis (K) sofort gezeichnet werden.

Legen wir weiters durch die Gerade (e, e') und durch den Kegelscheitel (B, B') eine Ebene, so schneidet diese die horizontale Projectionsebene in einer zu e' parallelen Geraden ε', welche ihrerseits den Kreis (K) in den beiden Punkten (γ, γ') und (δ, δ') trifft. Die durch

die Punkte (γ, γ') und (δ, δ') gehenden Kegelerzeugenden $(B\gamma, B'\gamma')$ und $(B\delta, B'\delta')$ schneiden die Gerade (e, e') in jenen beiden Punkten (c, c') und (d, d'), welche dieselbe mit dem Kegelschnitte (Σ, Σ') gemein hat, d. i. in den verlangten Achsenendpunkten, und somit ist der Kegelschnitt (Σ, Σ'), sowie verlangt wurde, durch seine beiden Achsen $(ab, a'b')$ und $(cd, c'd')$ dargestellt.

Nachdem bei dieser Methode die zweifache Bestimmung des Schnittes von Geraden mit einer Kugel umgangen ist, erscheint dieselbe als die einfachere.

§. 549.

182. Aufgabe. **Eine Ebene schneidet ein bifocales Hyperboloid in einer Hyperbel; es sind die reelle Achse und die beiden Asymptoten der Schnitthyperbel zu bestimmen.**

In den beiden vorhergehenden Fällen unterlag es keinem Anstande, den Kegelschnitt (Σ, Σ') direct durch seine beiden reellen Achsen darzustellen. In dem vorliegenden Falle aber, wo der ebene Schnitt eine Hyperbel sein soll, ist die eine Achse imaginär, daher die beiden vorangeführten Methoden nicht zu dem gewünschten Ziele führen werden. Hiernach sehen wir uns veranlasst, den folgenden Weg einzuschlagen.

Die Rotationsachse des bifocalen Hyperboloides sei $(AB, A'B')$ (Taf. XXV, Fig. 165); Y_1 und Y_2 seien die Asymptoten des Hauptmeridians, und $E_v E_h$ sei die schneidende Ebene. Besagte Ebene E muss, falls deren Schnitt mit dem Hyperboloide eine Hyperbel sein soll, eine solche Lage haben, dass eine durch den Mittelpunkt (O, O') des Hyperboloides zu derselben parallel geführte Ebene $e_v e_h$ den Asymptotenkegel in zwei reellen Erzeugenden $(\mu O, \mu' O')$ und $(\nu O, \nu' O')$ schneidet.

Selbstverständlich wird auch hier, sowie in den vorher besprochenen Fällen der Schnitt (s, s') der Ebene $E_v E_h$ mit der zu ihr senkrechten Meridianebene $P_v P_h$ eine Achse der Schnitthyperbel, und zwar, wie leicht erklärlich, die reelle Achse derselben darstellen.

Um die Endpunkte dieser Achse, d. h. die Schnittpunkte der Geraden (s, s') mit dem in der Ebene $P_v P_h$ liegenden Meridiane festzustellen, denken wir uns diese Ebene $P_v P_h$ um die Rotationsachse $(AB, A'B')$ in die zur verticalen Projectionsebene parallele Lage gedreht. Offenbar fällt sodann der in der Ebene $P_v P_h$ liegende Meridian nach vollbrachter Drehung mit dem Hauptmeridiane zusammen, die Gerade (s, s') gelangt nach (σ, σ'), während die ob-

genannten Schnittpunkte durch die der Geraden σ und dem Hauptmeridiane gemeinschaftlichen Punkte repräsentiert erscheinen.

Bestimmen wir diese letztgenannten Punkte a_0 und b_0 vermittelst des Collinearkreises K^0 der Meridianhyperbel und drehen wir dieselben hierauf in die Gerade (s, s') nach (a, a') und (b, b') zurück, so erhalten wir die gesuchten Scheitel auf der reellen Achse der Schnitthyperbel (Σ, Σ'). Der Halbierungspunkt (o, o') der Strecke $(ab, a'b')$ stellt sodann den Mittelpunkt der Hyperbel (Σ, Σ') dar. Durch den bezeichneten Punkt (o, o') müssen selbstverständlich die Asymptoten von (Σ, Σ') gehen.

Behufs der Construction dieser Asymptoten wird man sich bloß auf den Satz 362) zu berufen haben, nach welchem dieselben gleichzeitig auch die Asymptoten des Schnittes der Ebene $E_v E_h$ mit dem Asymptotenkegel des Hyperboloides darstellen müssen. Diese Asymptoten sind aber, wie wir aus früherem wissen, die Schnittgeraden der Ebene $E_v E_h$ mit den Tangentialebenen T_1 und T_2 des Asymptotenkegels längs der zur Ebene $E_v E_h$ parallelen Erzeugenden des Asymptotenkegels. Die letztangeführten Erzeugenden wurden bereits als die Schnittgeraden $(O\mu, O'\mu')$ und $(O\nu, O'\nu')$ des Kegels mit der zur Ebene $E_v E_h$ durch (O, O') gehenden parallelen Ebene $e_v e_h$ gefunden.

Die Horizontaltracen der Berührebenen des Asymptotenkegels längs der obgenannten Erzeugenden sind die Tangenten $T^1{}_h$ und $T^2{}_h$ an dessen Basiskreis k' in den Fußpunkten μ' und ν' dieser Erzeugenden. Diese Tracen schneiden die Horizontaltracen E_h der gegebenen schneidenden Ebene in zwei Punkten (m, m') und (n, n'), welche den gesuchten Asymptoten angehören. Nachdem aber die letzteren auch durch den Mittelpunkt (o, o') des Kegelschnittes (Σ, Σ') gehen müssen, so ergeben sich dieselben als die Verbindungsgeraden (S_1, S'_1) und (S_2, S'_2) dieses Punktes (o, o') mit den beiden Punkten (m, m') und (n, n').

Die Schnittcurve (Σ, Σ') des Hyperboloides mit der Ebene $E_v E_h$ ist somit durch ihre reelle Achse $(ab, a'b')$ und durch ihre Asymptoten (S_1, S'_1) und (S_2, S'_2) dargestellt, also vollkommen bestimmt.

§. 550.

183. Aufgabe. **Es ist der Schnitt eines bifocalen Rotationshyperboloides mit einer Ebene zu bestimmen, welche zu einer Tangentialebene des Asymptotenkegels parallel ist.**

Sei wieder $(AB, A'B')$ (Taf. XXV, Fig. 166) die Rotationsachse des Hyperboloides; seien ferner Y_1 und Y_2 die Asymptoten des

Hauptmeridians; endlich sei $e_v e_h$ eine beliebige Tangentialebene des Asymptotenkegels. Parallel zu dieser letzteren Ebene nehmen wir, der Voraussetzung entsprechend, die schneidende Ebene $E_v E_h$ an.

Mit Zugrundelegung des Satzes 363) wird der Schnitt (Σ, Σ') der Ebene $E_v E_h$ mit dem gegebenen Hyperboloide eine Parabel sein. Führen wir in Übereinstimmung mit der vorhergegangenen Aufgabe die zur schneidenden Ebene $E_v E_h$ senkrechte Meridianebene $P_v P_h$, so wird diese (da sie eine Symmetrieebene für das Hyperboloid sowohl, als auch für die Ebene $E_v E_h$ ist) die Ebene $E_v E_h$ in einer Geraden (s, s') schneiden, welche eine Symmetrieachse für die Schnittcurve (Σ, Σ'), also kurz gesagt, die Achse der gesuchten Parabel sein muss.

Der Scheitel der Parabel wird natürlich jener Punkt sein, in welchem die Gerade (s, s') das Hyperboloid, oder mit anderen Worten, den in der Ebene $P_v P_h$ liegenden Meridian schneidet.

Der besagte Schnittpunkt kann gefunden werden, indem man die Meridianebene $P_v P_h$ sammt der Geraden (s, s') um $(AB, A'B')$ in die zur verticalen Projectionsebene parallele Lage dreht. Hierbei fällt der erwähnte Meridian mit dem Hauptmeridiane zusammen, und die Gerade (s, s') gelangt in eine zu einer der Asymptoten (Y_1) parallele Lage σ.

Bestimmt man schließlich vermittelst des Collinearkreises K_0 der Hauptmeridianhyperbel den Schnittpunkt M_0 der letzteren mit der Geraden σ, so ergibt sich durch Zurückdrehung dieses Punktes in die Gerade (s, s'), der gesuchte Scheitel (M, M') der Parabel.

Die Scheiteltangente (T, T') ist jene Gerade in der Ebene $E_v E_h$, welche senkrecht zu (s, s'), also parallel zur Horizontaltrace E_h gezogen wird.

Ermittelt man weiters noch irgend einen beliebigen Punkt des Schnittes (Σ, Σ'), so ist die Parabel durch denselben, durch die Achse $(X, X') = (s, s')$ und den Scheitel (M, M') vollständig bestimmt.

§. 551.

184. Aufgabe. **An ein bifocales Rotationshyperboloid ist in einem gegebenen Punkte desselben eine Tangentialebene zu legen.**

Es sei $(AB, A'B')$ (Taf. XXV, Fig. 167) die Rotationsachse des Hyperboloides; Y_1 und Y_2 seien die Asymptoten der Hauptmeridianhyperbel und a stelle die verticale Projection des gegebenen Berührungspunktes dar.

Die Horizontalprojection a' dieses Punktes (a, a') der Fläche kann auf dieselbe Weise wie in Aufgabe 179) festgestellt werden.

Wir legen nämlich durch a die Parallele g zur Grundlinie, und bestimmen die Schnittpunkte α und β derselben mit dem Hauptmeridiane durch Zuhilfenahme des dem letzteren collinearen Kreises K_0, indem wir die der Geraden g collineare Gerade g_0 bestimmen, und deren Schnittpunkte α_0 und β_0 mit dem Kreise K_0 durch die Collineationsstrahlen $O\alpha_0$ und $O\beta_0$ auf g zurückprojicieren. Die Strecke $\alpha\beta$ gibt sodann die wahre Größe des Durchmessers jenes durch α gehenden Parallelkreises (π, π'), vermittelst dessen der Punkt (a, a'), beziehungsweise seine Horizontalprojection a', bestimmt wird.

Ziehen wir ferner im Punkte α_0 an den Kreis K_0 die Tangente τ_0, welche die Collineationsachse C_a im Punkte Δ schneidet, so entspricht derselben collinear die Tangente $\tau = \alpha\Delta$ des Hauptmeridians im Punkte α. Diese Tangente wird die Rotationsachse $(AB, A'B)$, als mit dieser in der nämlichen Ebene liegend, in einem Punkte S treffen.

Nun ist aber durch frühere Erörterungen sichergestellt, dass die Meridiantangenten in allen Punkten eines und desselben Parallelkreises (π, π') die Rotationsachse in dem nämlichen Punkte (S, S') schneiden. Verbindet man daher den vorgefundenen Punkt (S, S') mit dem Punkte (a, a'), so ergibt sich unmittelbar die Meridiantangente $(Sa, S'a') = (t, t')$ im Punkte (a, a') des Hyperboloides.

Die verlangte Berührungsebene $T_v T_h$ enthält nun offenbar diese Tangente (t, t') und steht, indem sie gleichzeitig durch die Tangente (t_1, t'_1) des Kreises (π, π') im Punkte (a, a') geht, senkrecht auf der entsprechenden Meridianebene, ihre Horizontaltrace T_h also senkrecht zur Horizontalprojection t'.

§. 552.

185. Aufgabe. **Parallel zu einer gegebenen Ebene ist an ein bifocales Rotationshyperboloid eine Berührungsebene zu legen.**

Erste Methode. Mit Zuhilfenahme der Collinearkugel.

Ist $(AB, A'B')$ die Rotationsachse des Hyperboloides, sind ferner Y_1 und Y_2 die Asymptoten des Hauptmeridians, und ist $E_v E_h$ die gegebene Ebene, zu welcher die Berührebenen des Hyperboloides parallel sein sollen, so construieren wir, in voller Übereinstimmung mit den vorausgeschickten Problemen, zunächst die das Hyperboloid in einem Scheitel, allenfalls in (A, A'), berührende Collinearkugel (S_0, S'_0), wobei die Scheiteltangentialebene C_e im Punkte A gleichzeitig die Collineationsebene, und die Ebene G_e jenes Kreises, längs welchen die Collinearkugel (S_0, S'_0) den Asymptotenkegel berührt, die Gegenebene darstellt.

Der Ebene $E_v E_h$ wird eine Ebene collinear entsprechen, welche die Gegenebene G_e in einer Geraden U_0, die der unendlich fernen Geraden von $E_v E_h$ entspricht, schneidet. Diese Gerade U_0 ergibt sich als Schnitt der Gegenebene G_e mit der durch das Collineationscentrum O parallel zu $E_v E_h$ geführten Ebene $e_v e_h$.

Jeder zur Ebene $E_v E_h$ parallelen Ebene wird sodann eine Ebene collinear entsprechen, welche durch die Gerade U_0 hindurchgeht. Speciell werden den beiden zu $E_v E_h$ parallelen Berührebenen des Rotationshyperboloides jene zwei Berührebenen der Kugel entsprechen, welche durch die Gerade U_0 gehen.

Construiert man diese beiden letztgenannten Berührebenen T^1_0 und T^2_0 nach der in Aufgabe 54) entwickelten Methode, so hat man dann bloß noch die ihnen collinear entsprechenden Ebenen T_1 und T_2 zu ermitteln. Diese Ebenen sind leicht zu construieren. Schneiden nämlich die Ebenen T^1_0 und T^2_0 die Collineationsebene C_e beziehungsweise in den Geraden d_1 und d_2, so sind T_1 und T_2 diejenigen Ebenen, welche durch d_1 und d_2 parallel zur Ebene E geführt werden können. Die Ebenen T_1 und T_2 berühren das Hyperboloid in jenen Punkten p_1 und p_2, welche den Berührungspunkten p^1_0 und p^2_0 der Ebenen T^1_0 und T^2_0 mit der Kugel S_0 entsprechen und daher mittelst der Collineationsstrahlen Op^1_0 und Op^2_0 aus den letzteren ohne jedwede Schwierigkeit abgeleitet werden.

§. 553.

Zweite directe Methode. Die Rotationsachse des Hyperboloides sei $(AB, A'B')$ (Taf. XXVI, Fig. 168); die Asymptoten des Hauptmeridians seien Y_1 und Y_2; die gegebene Ebene E sei durch ihre Tracen $E_v E_h$ bestimmt.

Die Meridianebene irgend eines Punktes einer Rotationsfläche steht, wie wir wissen, stets senkrecht zu der Tangentialebene der Fläche in dem betreffenden Punkte, also auch senkrecht zu jeder Ebene, welche zu der letzteren parallel läuft.

Führen wir daher im vorliegenden Falle die Meridianebene $P_v P_h$ senkrecht zu der gegebenen Ebene $E_v E_h$, so wird dieselbe auch senkrecht stehen zu der gesuchten Berührebene; der in dieser Ebene liegende Meridian der Fläche muss mithin auch den betreffenden Berührungspunkt enthalten. Ferner wird die Meridiantangente in der gesuchten Berührebene, d. i. der Schnitt der letzteren mit der Meridianebene $P_v P_h$, zu der Schnittgeraden (s, s') der Ebene $P_v P_h$ mit der gegebenen Ebene parallel sein.

Vor allem haben wir daher an die in der Meridianebene $P_v P_h$ liegende Meridianhyperbel eine Tangente parallel zur Geraden (s, s') zu führen. Dies kann folgendermaßen geschehen.

Drehen wir die Ebene $P_v P_h$ sammt dem zugehörigen Meridiane und der in ihr liegenden Geraden (s, s') um die Rotationsachse $(AB, A'B')$ in die zur verticalen Projectionsebene parallele Lage, so gelangt der genannte Meridian zur Coincidenz mit dem Hauptmeridiane, und die Gerade (s, s') kommt hierbei nach s_0. Die zu (s, s') parallelen Tangenten des Meridians in der Ebene $P_v P_h$ werden folglich, nach vollzogener Drehung, mit den zu s_0 parallelen Tangenten des Hauptmeridians coïncidieren.

Diese Tangenten ergeben sich durch nachstehende Construction. Wir ermitteln vorerst die beiden Brennpunkte F_1 und F_2 des Hauptmeridians und zeichnen zu diesem Zwecke über der reellen Achse AB als Durchmesser den Kreis K. Wie in Aufgabe 178) nachgewiesen wurde, stellt dieser Kreis K den Ort der Fußpunkte aller von den Brennpunkten F_1 und F_2 auf sämmtliche Tangenten der Hyperbel gefällten Perpendikel dar. Fällen wir demnach von einem der Brennpunkte, etwa von F_1, die Gerade h senkrecht zur Geraden s_0, so wird diese den obengenannten Kreis K in zwei Punkten r_1 und r_2 treffen. Gemäß der Eigenschaft dieses Kreises werden die zu h aus den Punkten r_1 und r_2 geführten Senkrechten t^0_1 und t^0_2 gleichzeitig die zu s_0 parallelen Tangenten der Meridianhyperbel darstellen.

Betrachten wir eine dieser Tangenten, allenfalls t^0_1. Der Berührungspunkt p^0_1 derselben ergibt sich unmittelbar (nach Aufgabe 178), wenn man den Symmetriepunkt f von F_1 in Bezug auf die Tangente t^0_1 mit dem zweiten Brennpunkte F_2 verbindet, und diese Verbindungsgerade mit der Tangente t_1^0 selbst zum Schnitte bringt.

Mit Zugrundelegung dieser Andeutungen haben wir somit bloß die Tangente t^0_1 und deren Berührungspunkt p^0_1 in die Ebene $P_v P_h$, beziehungsweise nach (t_1, t'_1) und (p_1, p'_1) zurückzudrehen, um in (t_1, t'_1) die zu (s, s') parallele Tangente an den in der Ebene $P_v P_h$ liegenden Meridian, und in (p_1, p'_1) den Berührungspunkt derselben dargestellt zu erhalten.

Legen wir nun durch (t_1, t'_1) die Ebene $T'_v T'_h$ parallel zur Ebene $E_v E_h$, so ist diese eine der verlangten Berührebenen, und (p_1, p'_1) deren Berührungspunkt.

Eine zweite Lage der gesuchten Berührebene ergibt sich, wenn man die Constructionen in Bezug auf die zweite zu s_0 parallele Tangente t^0_2 der Hauptmeridian-Hyperbel in gleicher Weise wiederholt.

Einfacher jedoch gelangt man auf folgendem Weg zum Ziele.

Wir wissen nämlich, dass bei jeder Fläche zweiten Grades die Berührungspunkte zweier parallelen Berührebenen die Endpunkte eines und desselben Durchmessers der Fläche repräsentieren. Diesem Umstande zufolge erhalten wir den Berührungspunkt (p_2, p'_2) der zweiten zu $E_v E_h$ parallelen Tangentialebene $T^2_v T^2_h$ direct, wenn wir p_1 mit O thatsächlich verbinden, also den Durchmesser $(p_1 O, p'_1 O')$ ziehen, und den zweiten Endpunkt (p_2, p'_2) desselben unmittelbar durch Übertragung der Strecke $O_1 p_1$ bestimmen. Die durch den Punkt (p_2, p'_2) parallel zu $E_v E_h$ geführte Ebene ist sodann die verlangte zweite Tangentialebene des Hyperboloides.

§. 554.

186. Aufgabe. **Durch eine gegebene Gerade sind an ein bifocales Rotationshyperboloid die Tangentialebenen zu legen und deren Berührungspunkte aufzusuchen.**

Erste Methode. Mit Hilfe der Collinearkugel. Es dürfte auch diesfalls genügen, den Gang der Lösung kurz zu skizzieren, da hierauf gestützt, die graphische Durchführung gewiss keinerlei Schwierigkeit bieten wird.

Ist AB die Rotationsachse des Hyperboloides und g die gegebene Gerade, so wird man die dem Asymptotenkegel eingeschriebene und das Hyperboloid in einem der beiden Scheitel, etwa in A berührende Kugel S_0 construieren; diese Kugel ist, wie wir früher nachgewiesen haben, collinear mit dem Rotationshyperboloid für den Mittelpunkt O des letzteren als Collineationscentrum, die Scheiteltangentialebene C_e in A als Collineationsebene, und für die Ebene G_e, längs welcher der Asymptotenkegel von der Kugel S_0 berührt wird, als Gegenebene.

Der Geraden g wird collinear eine Gerade g_0 entsprechen, welche sich leicht construieren lässt; dieselbe geht nämlich einerseits durch den Punkt δ, in welchem g die Collineationsebene C_e schneidet und andererseits durch den dem unendlich fernen Punkte von g entsprechenden Punkt u_0, d. i. durch jenen Punkt u_0, in welchem die Gegenebene G_e von dem zu g parallelen Collineationsstrahle $O u_0$ getroffen wird.

Den Tangentialebenen des Hyperboloides, welche durch die Gerade g gehen, entsprechen somit collinear die Tangentialebenen der Kugel S_0, welche durch die collineare Gerade g_0 gehen.

Legt man daher durch die Gerade g_0 die beiden Tangentialebenen T^1_0 und T^2_0 an die Kugel S_0 und seien p^1_0 und p^2_0 deren Berührungspunkte, so werden sich die gesuchten, durch g gehenden

Berührebenen des Hyperboloides als die den Ebenen T^1_0 und T^2_0 collinear entsprechenden Ebenen T_1 und T_2 ergeben. Dieselben können anstandslos construiert werden, da sie einerseits durch die Gerade g und andererseits durch die Geraden g_1 und g_2, in welchen T^1_0 und T^2_0 von der Collineationsebene C_e geschnitten werden, gehen.

Endlich ergeben sich die Berührungspunkte p_1 und p_2 dieser Ebenen, als die collinear entsprechenden Punkte von $p_1{}^0$ und $p_2{}^0$, durch Vermittlung der Collineationsstrahlen Op^1_0 und Op^2_0.

Die eben besprochene Methode wird man jedoch im allgemeinen nur dann zum Zwecke der Durchführung des gestellten Problemes wählen, wenn man die Collinearkugel noch zu weiteren, mit diesen zusammenhängenden Constructionen benützen will. In jedem anderen Falle wird man einfachere Wege einzuschlagen suchen, da die Hilfsconstruction, deren man sich hier bediente, und welche die Ermittlung der durch eine Gerade an eine Kugel geführten Berührungsebenen nothwendig macht, nicht rasch genug zum Ziele führt.

§. 555.

Zweite, directe Methode.

Die Rotationsachse des Hyperboloides sei $(AB, A'B')$ (Taf. XXVI, Fig. 169); Y_1 und Y_2 seien die Asymptoten der Hauptmeridianhyperbel und ferner seien g und g' die beiden Projectionen der gegebenen Geraden.

Ermitteln wir vorerst die Brennpunkte F_1 und F_2 der Meridianhyperbel, so werden diese selbstverständlich auch die Brennpunkte des Hyperboloides repräsentieren. Ferner denken wir uns über der reellen (Rotations-)Achse AB des Hyperboloides als Durchmesser, die Kugel (S, S'_1) construiert.

Nach Satz 355) hat diese Kugel (S_1, S'_1) die besondere Eigenschaft, dass sie den geometrischen Ort der Fußpunkte der von den beiden Brennpunkten F_1 und F_2 auf sämmtliche Tangentialebenen des Hyperboloides gefällten Senkrechten darstellt.

Stellen wir uns die verlangte Tangentialebene als bereits gefunden vor und nehmen wir an, $T_v T_h$ sei eine der beiden durch die Gerade (g, g') geführten Berührungsebenen des Rotationshyperboloides. Der Fußpunkt a der von dem einen Brennpunkte, beispielsweise von F_1 auf diese Ebene $T_v T_h$ gefällten Senkrechten muss, dem obangeführten Satze entsprechend, auf der Kugel (S, S'_1) liegen.

Mit Rücksicht auf diese Bedingung, können wir der gestellten Aufgabe auch folgende Fassung geben.

„Es ist durch die Gerade (g, g') eine Ebene $T_v T_h$ derart zu legen, dass der Fußpunkt (a, a') der von dem Punkte (F_1, F'_1) auf dieselbe gefällten Senkrechten auf der Oberfläche der Kugel (S, S'_1) liege."

Fällt man von dem Punkte (F_1, F'_1) auf sämmtliche durch die Gerade (g, g') gehende Ebenen Perpendikel, so liegen bekanntlich alle diese Perpendikel in jener Ebene $E_v E_h$, welche durch (F_1, F'_1) normal zu der Geraden (g, g') geführt wird und diese Gerade in einem Punkte (s, s') schneidet. Die Fußpunkte der genannten Perpendikel befinden sich hierbei sammt und sonders auf dem Kreise γ, welcher in der Ebene $E_v E_h$ über der Strecke $(F_1 s, F'_1 s')$ als Durchmesser beschrieben werden kann. Dieselbe Ebene $E_v E_h$ schneidet aber auch die Kugel (S, S_1') in einem Kreise K. Die den beiden genannten Kreisen gemeinschaftlichen Punkte a und b besitzen sodann die vorangeführte Eigenschaft.

Führt man nämlich durch einen dieser beiden Punkte und durch die Gerade (g, g') eine Ebene $T_v T_h$, so steht die letztere auf der Verbindungsgeraden dieses Punktes mit dem Punkte F_1 senkrecht; es wird mithin die Ebene $T_v T_h$ eine Tangentialebene des Rotationshyperboloides sein.

Diese Betrachtung führt unmittelbar auf nachstehende Construction.

Man führt durch den einen Brennpunkt (F_1, F'_1) die Ebene $E_v E_h$ senkrecht zu der Geraden (g, g') und bestimmt deren Schnittpunkt (s, s') mit der Geraden (g, g'), sowie deren Schnittkreis K mit der Kugel (S, S_1). Legt man sodann die Punkte F_1, s und den Kreis K um die Horizontaltrace E_h in die horizontale Projectionsebene um, so ergeben sich dieselben beziehungsweise in $F_1{}^0$, s_0 und K_0. Ferner beschreibt man über $s_0 F_1{}^0$ als Durchmesser den Kreis γ_0, und führt dessen beide Schnittpunkte a_0 und b_0 mit dem gleichfalls umgelegten Kugelschnittkreis K_0 in die Ebene E, resp. in den Raum nach (a, a') und (b, b') zurück.

Die Ebenen $T_v^a T_h^a$ und $T_v^b T_h^b$, welche durch die Gerade (g, g') und beziehungsweise durch die Punkte (a, a') und (b, b') gelegt werden, repräsentieren bereits die verlangten Berührebenen.

Die Berührungspunkte dieser Ebenen können nunmehr leicht gefunden werden.

Berücksichtigen wir nämlich, dass der Berührungspunkt (p_a, p'_a) der Ebene $T_v^a T_h^a$ der einzige Punkt dieser Ebene ist, welcher gleichzeitig dem Hyperboloide angehört, d. h. welcher der Beziehung

$$F_1 p_a - F_2 p_a = A B$$

Genüge leistet, so findet die folgende Construction ihre directe Bestätigung.

Man trage auf der zur Berührebene $T_v^a T_h^a$ senkrechten Geraden $F_1 a$ die Strecke $F_1 a$, vom Punkte a aus nach (f, f'), nochmals ab und verbinde (f, f') mit dem zweiten Brennpunkte (F_2, F'_2). Diese Verbindungsgerade schneidet die Berührebene $T_v^a T_h^a$ bereits in dem gesuchten Berührungspunkte (p_a, p'_a).

Es ist nämlich, wenn wir uns (f, f') wirklich bestimmt denken, das Dreieck $F_1 p_a f$ ein gleichschenkliges, und daher

$$F_1 p_a = p_a f.$$

Da ferner $F_1 O = F_2 O$ und $F_1 a = af$ ist, wird:

$$Oa = \tfrac{1}{2} F_2 f$$

oder, weil Oa als Radius der Kugel (S, S'_1) gleich $AO = BO$ ist, auch

$$F_2 f = AB$$

sein. Weiters ist fp_a aus den Strecken $F_2 p_a$ und $F_2 f$ zusammengesetzt; es ist also:

$$fp_a = F_2 p_a + F_2 f.$$

Hieraus folgt, wenn man die vorher gefundenen Werte AB und $F_1 p_a$ beziehungsweise für $F_2 f$ und fp_a einsetzt:

$$F_1 p_a = F_2 p_a + AB$$

oder

$$F_1 p_a - F_2 p_a = AB,$$

was zu beweisen war.

Eine dritte Methode für die Bestimmung der durch eine Gerade (g, g') gehenden Tangentialebenen eines zweitheiligen Rotationshyperboloides werden wir noch an späterer Stelle kennen lernen.

§. 556.

187. Aufgabe. **Es ist die Berührungscurve eines bifocalen Rotationshyperboloides mit einem demselben aus einem beliebgen Punkte umschriebenen Kegel zu construieren.**

Es stelle $(AB, A'B')$ (Taf. XXVI, Fig. 170) die Rotationsachse des Hyperboloides dar; Y_1 und Y_2 mögen die Asymptoten der Hauptmeridianhyperbel repräsentieren und (P, P') den gegebenen Kegelscheitel vergegenwärtigen.

Die gesuchte Berührungscurve ist ein Kegelschnitt, welcher den geometrischen Ort der Berührungspunkte aller von (P, P') ausgehenden

Tangentialebenen oder, was dasselbe ist, aller von (P, P') ausgehenden Tangenten des Hyperboloides repräsentiert.

Legen wir vor allem durch den gegebenen Kegelscheitel (P, P') die Meridianebene $P_v P_h$ des Hyperboloides. Nachdem diese Ebene das Hyperboloid symmetrisch theilt, so wird sie auch eine Symmetrieebene für den umschriebenen Kegel sowohl, als auch für dessen Berührungscurve sein, d. h. die Ebene der Berührungscurve wird zu dieser Meridianebene senkrecht stehen, und ihr Schnitt mit derselben wird eine Achse der Berührungscurve darstellen.

Die Endpunkte dieser Achse können, wie von selbst einleuchtend, nur jene beiden Punkte der Berührungscurve sein, welche in der Meridianebene $P_v P_h$ liegen; dieselben werden also durch die Berührungspunkte der von (P, P') aus an den in der Ebene $P_v P_h$ liegenden Meridian gezogenen Tangenten bestimmt. Besagte Punkte können, wie folgt, construiert werden.

Man dreht die Meridianebene $P_v P_h$ sammt dem Punkte (P, P') um $(AB, A'B')$ in die zur verticalen Projectionsebene parallele Lage. Hierbei gelangt P in die Lage P_0, während der gedrehte Meridian mit dem Hauptmeridiane zusammenfällt.

Construiert man nun die von P_0 aus an die Hauptmeridianhyperbel gezogenen Tangenten t^1_0 und t^2_0 und bestimmt deren Berührungspunkte a_0 und b_0 mit Hilfe der Brennpunkte F_1 und F_2 auf die in Aufgabe 178) angegebene Weise; führt man ferner die so erhaltenen Punkte a_0 und b_0 in die Ebene $P_v P_h$ zurück, so erhält man die beiden Endpunkte (a, a') und (b, b') der einen Achse der Berührungscurve.

Die Ebene der Berührungscurve ist sodann, wie bereits früher gezeigt wurde, diejenige Ebene $B_v B_h$, welche durch die Achse $(ab, a'b')$ senkrecht zu der Meridianebene $P_v P_h$ geführt wird. Die zweite Achse, oder, wenn diese imaginär ist, die Asymptoten des Berührungskegelschnittes können wie in Aufgabe 181) resp. 182) construiert werden.

§. 557.

188. Aufgabe. **Es ist der Schnitt eines einem bifocalen Rotationshyperboloide umschriebenen Kegels mit der horizontalen Projectionsebene zu bestimmen.**

Oder mit anderen Worten:

Es ist der Schlagschatten eines bifocalen Rotationshyperboloides bei centraler Beleuchtung auf der horizontalen Projectionsebene zu construieren.

Sei $(AB, A'B')$ (Taf. XXVI, Fig. 171) die Rotationsachse des Hyperboloides; F_1 und F_2 seien die Brennpunkte desselben; (P, P') sei der gegebene Kegelscheitel.

Die durch den Punkt (P, P') gehende Meridianebene $P_v P_h$ ist eine Symmetrieebene des Kegels, und da dieselbe horizontal-projicierend ist, auch eine Symmetrieebene des gesuchten Durchschnittes des umschriebenen Kegels mit der horizontalen Projectionsebene; die horizontale Trace P_h wird demnach eine Achse des gesuchten Schnittes sein.

Die Endpunkte dieser Achse werden durch die Horizontaldurchstoßpunkte der in der Meridianebene $P_v P_h$ liegenden Erzeugenden des Berührungskegels, d. i. durch die von dem Punkte (P, P') an den in der Ebene $P_v P_h$ liegenden Meridian gezogenen Tangenten dargestellt. Diese Tangenten werden, analog des in der vorhergehenden Aufgabe gewählten Vorganges, durch die Drehung der Ebene $P_v P_h$ um die Achse Z in die zur verticalen Projectionsebene parallele Lage ermittelt. Hierbei gelangt P nach P_0 und der Meridian zur Coincidenz mit dem Hauptmeridiane.

Zieht man nun von P_0 aus die Tangenten t^0_1 und t^0_2 an den Hauptmeridian (allenfalls nach der in Aufgabe 178 angegebenen Construction) durch Zuhilfenahme des Brennpunktes F_1, und dreht man hierauf die horizontalen Durchstoßpunkte (a_0, a'_0) und (b_0, b'_0) derselben in die Ebene $P_v P_h$ nach (a, a') und (b, b') zurück, so repräsentieren die so erhaltenen Punkte (a, a') und (b, b'), den vorhergegangenen Erörterungen gemäß, die Endpunkte der einen Achse des gesuchten Horizontalschnittes.

Nehmen wir ferner Rücksicht auf den erweiterten Dandelinschen Satz (Satz 366), so ergeben sich auch sofort die Brennpunkte der gesuchten Schnittcurve als die Horizontaldurchstoßpunkte f'_1 und f'_2 der von dem Punkte (P, P') aus nach den bezüglichen Scheiteln (A, A') und (B, B') des Hyperboloides geführten Geraden.

Die Brennpunkte des Horizontalschnittes können offenbar auch vermittelst des gedrehten Punktes P_0 erhalten werden. Zieht man nämlich $P_0 A$ und $P_0 B$, so erhält man die gedrehten Brennpunkte in (f_{o_1}, f'_{v_1}) und (f_{o_2}, f'_{o_2}). Dieselben sind sodann einfach in die Ebene $P_v P_h$ nach (f_1, f'_1) und (f_2, f'_2) zurückzudrehen.

Halbiert man endlich die Strecke $f'_1 f'_2$ oder $a' b'$, so repräsentiert der Halbierungspunkt o' den Mittelpunkt des gesuchten Kegelschnittes. Die zweite Achse $c' d'$ ist vermittelst der bekannten elementaren Construction aus der Achse $a'b'$ und aus den Brennpunkten f'_1 und f'_2 zu construieren.

§. 558.

189. Aufgabe. Es ist die Berührungscurve eines bifocalen Rotationshyperboloides mit einem demselben umschriebenen Cylinder zu construieren.

Sei $(AB, A'B')$ (Taf. XXVI, Fig. 172) die Rotationsachse und seien F_1 und F_2 die beiden Brennpunkte des Rotationshyperboloides; die gegebene Richtung der Cylindererzeugenden ist durch (g, g') bestimmt.

Die Achse des Cylinders ist (nach Satz 435, Band II), die durch den Mittelpunkt (o, o') des Hyperboloides gehende zu (g, g') parallele Gerade (d, d'). Die durch diese Gerade (d, d') geführte Meridianebene $P_v P_h$ ist eine Symmetrieebene des Hyperboloides und folglich auch eine Symmetrieebene sowohl in Bezug auf den Kegel, als auch in Bezug auf dessen Berührungscurve.

Hieraus folgt unmittelbar, dass die Ebene der Berührungscurve zu der Meridianebene $P_v P_h$ normal sein müsse und dass deren Schnittgerade mit der Meridianebene $P_v P_h$ eine Achse der Berührungscurve repräsentieren werde. Die Endpunkte dieser Achse können selbstverständlich nur die in der Meridianebene $P_v P_h$ liegenden zwei Punkte der Berührungscurve, d. i. die Berührungspunkte des in der Ebene $P_v P_h$ liegenden Meridians mit den zur Geraden (g, g') oder (d, d') parallelen Tangenten sein.

Die besagten Berührungspunkte sind, wie folgt, sehr einfach zu construieren. Wir drehen zu diesem Zwecke die Meridianebene mit der Geraden (d, d') um $(AB, A'B')$ in die zur verticalen Projectionsebene parallele Lage. Die Gerade d gelangt hierbei nach d_0 und der Meridian zur Coincidenz mit dem Hauptmeridiane.

Die gesuchten Tangenten werden nach dieser Drehung durch die zu d_0 parallelen Tangenten $t_1{}^0$ und $t_2{}^0$ des Hauptmeridians dargestellt. Die letzteren ergeben sich, wenn man durch den einen Brennpunkt, etwa durch F_1 die Senkrechte λ zu d_0 führt und durch deren Schnittpunkte α und β mit dem über AB beschriebenen Kreise K die Geraden $t_1{}^0$ und $t_2{}^0$ parallel zu d_0 zieht. Die Berührungspunkte a_0 und b_0 von $t_1{}^0$ und $t_2{}^0$ ergeben sich auf die bereits mehrfach besprochene Weise mittelst des zweiten Brennpunktes F_2. Dreht man die so erhaltenen Punkte a_0 und b_0 in die Ebene $P_v P_h$ nach (a, a') und (b, b') zurück, so werden durch dieselben die verlangten Achsen-Endpunkte dargestellt.

Die durch die Verbindungsgerade $(ab, a'b')$ der letztbezeichneten Punkte senkrecht zur Meridianebene $P_v P_h$ gelegte Ebene $B_v B_h$ repräsentiert sodann, wie schon früher hervorgehoben wurde, die Ebene

der Berührungscurve. Die zweite Achse der Berührungscurve, oder wenn dieselbe imaginär ist, die Asymptoten der Curve können nach Aufgabe 181) resp. 182) ohne jedwede Schwierigkeit construiert werden.

§. 559.

Die Ebene der Berührungscurve eines Rotationshyperboloides mit einem umschriebenen Kegel oder Cylinder kann auch mit Hilfe der Collinearkugel construiert werden.

Ist nämlich AB die Rotationsachse, S_0 die dem Asymptotenkegel eingeschriebene, durch A gehende Collinearkugel, wobei die Scheiteltangentialebene in A die Collineationsebene, und die Ebene des Berührungskreises zwischen Kugel und Asymptotenkegel die Gegenebene repräsentiert, so wird einem jeden dem Hyperboloide aus einem Punkte umschriebenen Kegel ein zweiter Kegel collinear entsprechen, welcher der Collinearkugel umschrieben ist und dessen Scheitel jenem des ersteren Kegels collinear entspricht. Desgleichen werden offenbar auch die Berührungscurven beider Kegel, sowie deren Ebenen selbst collinear sein.

Einem dem Hyperboloide umschriebenen Cylinder wird collinear ein der Kugel umschriebener Kegel entsprechen, dessen Scheitel derjenige Punkt der Gegenebene ist, welcher dem unendlich fernen Punkte der Cylindererzeugenden collinear entspricht.

Soll daher mittelst der Collinearkugel die Ebene der Berührungscurve eines zweimanteligen Rotationshyperboloides mit einem denselben umschriebenen Kegel (oder Cylinder) construiert werden, so wird man den dem Kegelscheitel (oder dem unendlich fernen Punkte der Cylindererzeugenden) collinear entsprechenden Punkt bestimmen, hierauf (wie in Aufgabe 56) die Ebene des Berührungskreises der Collinearkugel mit dem derselben aus dem gefundenen Punkte umschriebenen Kegel construieren und die dieser Ebene collineare Ebene bestimmen.

§. 560.

190. Aufgabe. Es ist der Schnitt eines einem bifocalen Rotationshyperboloide umschriebenen Cylinders mit der horizontalen Projectionsebene zu construieren.

Die zur horizontalen Projectionsebene senkrechte Drehungsachse (nur unter dieser Voraussetzung gilt die folgende Construction) sei ($AB, A'B'$) (Taf. XXVII, Fig. 173); die beiden auf derselben liegenden Brennpunkte des Hyperboloides seien F_1 und F_2; ferner sei durch (g, g') die Richtung der Cylindererzeugenden gegeben.

In der vorhergehenden Aufgabe wurde bereits darauf hingewiesen, dass die durch den zu (g, g') parallelen Durchmesser (d, d') des Hyperboloides gehende Meridianebene $P_v P_h$ eine Symmetrieebene des parallel zu (g, g') und (d, d') umschriebenen Cylinders sei. Da aber die eben erwähnte Meridianebene auch auf der horizontalen Projectionsebene senkrecht steht, so wird dieselbe überdies eine Symmetrieebene für den Schnitt des umschriebenen Cylinders mit der horizontalen Projectionsebene sein, oder mit anderen Worten, die horizontale Trace P_h der Meridianebene $P_v P_h$ wird gleichzeitig eine Achse dieses Schnittes darstellen.

Die Endpunkte dieser Achse sind offenbar die Horizontaldurchstoßpunkte der in der Meridianebene $P_v P_h$ liegenden Cylindererzeugenden, oder was dasselbe ist, die Achsenendpunkte sind die Horizontaldurchstoßpunkte der an den in der Ebene $P_v P_h$ liegenden Meridian parallel zu (g, g') oder (d, d') gezogenen Tangenten.

Die genannten Endpunkte construieren wir wieder in der Weise, dass wir die Ebene $P_v P_h$ sammt der Geraden (d, d') um $(AB, A'B')$ so lange drehen, bis sie mit der Hauptmeridianebene η_h zusammenfällt.

Infolge dieser Drehung gelangt der in der Ebene $P_v P_h$ liegende Meridian zur Coincidenz mit dem Hauptmeridiane und die Gerade d nach d_0. Construieren wir weiters in voller Übereinstimmung mit der in der vorhergehenden Aufgabe besprochenen Lösungsweise und Durchführung die zu d_0 parallelen Tangenten t^1_0 und t^2_0 des Hauptmeridians. Drehen wir endlich die horizontalen Durchstoßpunkte (a_0, a'_0) und (b_0, b'_0) der besagten Tangenten in die Ebene $P_v P_h$ nach (a, a') und (b, b') in die ursprüngliche Lage zurück, so werden die beiden Punkte a' und b' bereits die gesuchten Achsenendpunkte darstellen.

Ziehen wir ferner durch die Scheitel A und B des Hauptmeridians oder beziehungsweise durch die Scheitel A und B des Hyperboloides parallele Geraden zu d_0, welche die Grundlinie in den diesbezüglichen Punkten f^1_0 und f^2_0 treffen mögen, und drehen wir auch diese Punkte in die Ebene $P_v P_h$ nach f_1 und f_2 zurück, so repräsentieren die letztgenannten Punkte f_1 und f_2 die horizontalen Durchstoßpunkte der durch die Scheitel A und B des Hyperboloides parallel zu den Cylindererzeugenden, d. i. parallel zu (g, g') gezogenen Geraden.

Mit Zugrundelegung des Satzes 366) sind aber diese Punkte f_1 und f_2 gleichzeitig die Brennpunkte des gesuchten Schnittes. Dieser letztere ist also durch die Brennpunkte f_1 und f_2 und durch die Brennpunktsachse $a' b'$ dargestellt und daher vollkommen bestimmt.

Die eben besprochene Construction gibt uns unter anderem auch die Mittel an die Hand, eine bereits gelöste Aufgabe einfacher als dort selbst gezeigt wurde, durchzuführen.

§. 561.

191. Aufgabe. **Durch eine Gerade ist an ein bifocales Rotationshyperboloid eine Tangentialebene zu legen.**

Ist nämlich (g, g') (Taf. XXVII, Fig. 173) die gegebene Gerade, durch welche die Berührebenen an das Hyperboloid $(AB, A'B'; F_1, F_2)$ gelegt werden sollen, so bestimmt man, wie eben gezeigt wurde, die Brennpunktsachse $a'b'$ und die Brennpunkte f_1 und f_2 des Schnittes der horizontalen Projectionsebene mit dem dem Hyperboloide parallel zu (g, g') umschriebenen Cylinder.

Nachdem jede Tangentialebene dieses Cylinders gleichzeitig eine Tangentialebene des Hyperboloides ist, so werden die beiden zu suchenden Ebenen gleichzeitig diejenigen Tangentialebenen des umschriebenen Cylinders darstellen, welche durch die Gerade (g, g') gehen. Die Horizontaltracen der bezeichneten Ebenen werden mithin jene Tangenten sein, welche von dem Horizontaldurchstoßpunkte h' der Geraden (g, g') an die Horizontalspur $(a'b', f_1, f_2)$ des Cylinders gezogen werden können.

Beschreibt man daher über $a'b'$ als Durchmesser einen Kreis k_0 und über $h'f_2$ als Durchmesser einen Kreis γ, so schneiden sich die beiden Kreise in zwei Punkten μ und ν, welche (nach Aufgabe 178) mit h' verbunden die Tangenten des Kegelschnittes $(a'b', f_1, f_2)$ oder, nach der vorstehenden Betrachtung, die Horizontaltracen T^1_h und T^2_h der gesuchten Berührebenen ergeben. Die Verticaltracen T^1_v und T^2_v lassen sich nunmehr leicht construieren. Selbstverständlich gehen dieselben durch den Verticaldurchstoßpunkt v von (g, g').

Die Berührungspunkte dieser Ebenen liegen in den zu denselben senkrecht geführten Meridianebenen und können somit anstandslos construiert werden.

Suchen wir beispielsweise den Berührungspunkt der Ebene $T'_v T'_h$. Zu diesem Zwecke bestimmen wir vorerst den Berührungspunkt (π, π') der Horizontaltrace T'_h mit dem Kegelschnitte $(a'b', f_1, f_2)$. Die durch diesen Punkt (π, π') parallel zu (g, g') gezogene Gerade (g_1, g'_1) ist offenbar die Berührungserzeugende der Ebene $T'_v T'_h$ mit dem umschriebenen Cylinder.

Auf derselben Geraden (g_1, g'_1) muss selbstverständlich auch der gesuchte Berührungspunkt (p_1, p'_1) der Ebene $T'_v T'_h$ liegen, da aber

dieser Punkt auch in der zur Berührebene $T'_v\, T'_h$ senkrechten Meridianebene $P'_v\, P'_h$ liegt, so wird sich der verlangte Berührungspunkt als der Schnittpunkt dieser letzteren mit der Geraden (g_1, g'_1) in (p_1, p'_1) ergeben.

§. 562.

Häufig lassen sich auch die charakteristischen Eigenschaften des Asymptotenkegels eines Hyperboloides sehr zweckmäßig zur Vereinfachung der Constructionen verwenden.

Aus vorhergegangenen Erörterungen wissen wir nämlich, dass jede Tangentialebene des Asymptotenkegels auch das Hyperboloid berühre, und zwar in jenem unendlich fernen Punkte berühren werde, welcher gleichzeitig der Berührungserzeugenden des Kegels angehört.

Ferner wurde bereits bewiesen, dass drei conjugierte Durchmesser des Hyperboloides stets auch drei conjugierte Durchmesser des entsprechenden Asymptotenkegels seien.

Auf Grund der letzt angeführten Eigenschaft lässt sich beispielsweise die Ebene der Berührungscurve eines dem Hyperboloide umschriebenen Cylinders bei weitem einfacher construieren, als dies in Aufgabe 189) geschehen ist.

Sei also beispielsweise $(AB, A'B')$ (Taf. XXVII, Fig. 174) die Rotationsachse eines zweimanteligen Hyperboloides. Die Asymptoten Y_1 und Y_2 des Hauptmeridians stellen gleichzeitig die Verticalcontour des Asymptotenkegels dar. Die Trace des Asymptotenkegels auf der horizontalen Projectionsebene ist ein Kreis K', welcher die horizontale Projection O' des Flächenmittelpunktes zum Centrum hat.

Soll die Ebene der Berührungscurve des Hyperboloides mit dem der Geraden (g, g') parallel umschriebenen Cylinders ermittelt werden, so hat man nur zu berücksichtigen, dass dieselbe (nach Satz 428, Band II), jene Diametralebene des Hyperboloides sei, welche dem zu (g, g') parallelen Durchmesser (d, d') conjugiert ist und (nach Satz 373) auch gleichzeitig mit derjenigen Diametralebene des Asymptotenkegels übereinstimme, welche dem Durchmesser (d, d') conjugiert ist.

In letzterer Eigenschaft ist aber die obbesagte Ebene sehr leicht zu construieren, denn die Horizontaltrace B_h derselben ist bekanntlich die Polare des Horizontaldurchstoßpunktes h' von (d, d') in Bezug auf die Horizontalspur K' des Asymptotenkegels. Die verticale Trace B_v dagegen ergibt sich unmittelbar, wenn man berücksichtigt, dass die gesuchte Ebene durch den Mittelpunkt (o, o') des Hyperboloides gehen müsse.

§. 563.

192. Aufgabe. Es ist die Vertical- und Horizontalcontour eines bifocalen Rotationshyperboloides unter der Voraussetzung zu construieren, dass die Rotationsachse eine gegen beide Projectionsebenen geneigte Gerade und der Mittelpunkt desselben ein auf dieser Geraden gegebener Punkt sei. Die Meridianhyperbel ist in wahrer Größe durch ihre reelle Achse und die Asymptoten (beziehungsweise durch die Brennpunkte) gegeben.

Die gegebene gegen die beiden Projectionsebenen geneigte Rotationsachse sei (Z, Z') (Taf. XXVII, Fig. 175); (O, O') seien die Projectionen des auf derselben gegebenen Mittelpunktes des Hyperboloides; ferner sei die Meridianhyperbel (seitwärts) durch die Achse $\alpha\beta$ und die Asymptoten σ_1 und σ_2 gegeben. (Die Brennpunkte f_1 und f_2 sind hiernach leicht festzustellen.)

Vor allem legen wir durch die Drehungsachse (Z, Z') die horizontal-projicierende Ebene P_h. Dieselbe schneidet das Hyperboloid in einem Meridiane, welch letzterer um die Trace P_h in die horizontale Projectionsebene umgelegt, in $(\alpha_0 \beta_0, f_1{}^0 f_2{}^0)$ erhalten wird. Hierbei stellen die Gerade $\alpha_0 \beta_0$ die umgelegte Rotationsachse Z_0; O_0 den umgelegten Mittelpunkt; α_0, β_0 die umgelegten Achsenendpunkte $(\alpha_0 O_0 = \beta_0 O_0 = \alpha o = \beta o)$ und $f^0{}_1$ und $f^0{}_2$ die umgelegten Brennpunkte der Meridianhyperbel dar.

Um an diese umgelegte Meridianhyperbel jene Tangenten zu ziehen, welche zur Trace P_h der Meridianebene senkrecht stehen, gehen wir folgendermaßen zu Werke.

Wir beschreiben über $\alpha_0 \beta_0$ als Durchmesser den Kreis K_0, ziehen durch einen der Brennpunkte, etwa durch $f_1{}^0$, eine Parallele λ zu P_h, welche den Kreis K_0 in den Punkten a_0 und b_0 schneidet. Die Senkrechten $a_0 a'$ und $b_0 b'$ durch die Punkte a_0 und b_0 zur Trace P_h bestimmen, wie bekannt, bereits die beiden obverlangten Tangenten, während die Fußpunkte a' und b' derselben auf der Trace P_h die horizontalen Durchstoßpunkte der horizontal-projicierenden Tangenten des in der Meridianebene P_h liegenden Meridians darstellen.

Nachdem diese Tangenten gleichzeitig zwei Erzeugenden des dem Hyperboloide umschriebenen horizontal-projicierenden Cylinders repräsentieren, so stellen die Punkte a' und b' bereits zwei Punkte der Horizontalcontour des Hyperboloides dar.

Weiters ist unschwer nachzuweisen, dass die Gerade $a'\,b'$ eine Achse dieser Contour sei.

Zu diesem Behufe wird man nur zu zeigen haben, dass die Contourtangenten in den Punkten a' und b' zu $a'b'$ thatsächlich senkrecht stehen. Die Tangente der Contour in dem Punkte a' ist die horizontale Trace der durch die projicierende Tangente $a' a_0$ gehenden Berührebene des Hyperboloides. Nachdem der Berührungspunkt derselben in der genannten Tangente, also in der horizontal-projicierenden Meridianebene P_h liegt, so ist die genannte Berührebene senkrecht zur Meridianebene P_h, und ihre Horizontaltrace, d. i. die genannte Contourtangente, steht somit auf der Horizontaltrace P_h oder auf $a'b'$ senkrecht. Dasselbe gilt auch von der Contourtangente im Punkte b', so dass hiemit die Behauptung, $a'b'$ sei eine Achse der Contour, gerechtfertigt erscheint.

Bevor wir die Durchführung der uns gestellten Aufgabe weiter fortsetzen, wollen wir noch folgende allgemeine Betrachtung vorausschicken.

Die Contour einer Fläche zweiten Grades für „Parallelprojection" ist der Schnitt der Projectionsebene mit dem der Fläche parallel zum projicierenden Strahle umschriebenen Cylinder.

Nachdem nun bekanntlich sämmtliche ebenen Schnitte eines Cylinders zweiten Grades Kegelschnitte von derselben Gattung, d. h. entweder nur Ellipsen, oder nur Hyperbeln, oder nur Parabeln sind, so folgt, dass die Contour einer Fläche zweiten Grades für Parallelprojection stets ein Kegelschnitt von der nämlichen Gattung wie derjenige Kegelschnitt sein wird, welcher die Berührungscurve der Fläche mit dem derselben, parallel zum projicierenden Strahle umschriebenen Cylinder, darstellt. Diese Berührungscurve ist aber der Schnitt der Fläche zweiten Grades mit der der Richtung der Projectionsstrahlen conjugierten Durchmesserebene.

Im Falle eines bifocalen Rotationshyperboloides sind sämmtliche Diametralschnitte entweder Hyperbeln oder aber imaginäre Curven, je nachdem der der Diametralebene conjugierte Durchmesser außerhalb oder innerhalb des Asymptotenkegels liegt.

Hieraus folgt, dass das bifocale Rotationshyperboloid bei vorausgesetzter Orthogonal- oder allgemeiner bei Parallel-Projection, entweder eine hyperbolische oder gar keine Contour besitze.

Nachdem sich in (Taf. XXVII, Fig. 175) in der That zwei reelle Punkte a' und b' der horizontalen Contour ergeben haben, so ist dieselbe nothwendig eine Hyperbel, und es wird daher unsere Aufgabe darin bestehen, deren Asymptoten zu bestimmen.

Aus Früherem wissen wir, dass jede Berührebene des Asymptotenkegels gleichzeitig auch eine Berührebene des Hyperboloides in einem unendlich fernen Punkte desselben darstelle.

Construieren wir im vorliegenden Falle die horizontal-projicierenden Berührebenen des Asymptotenkegels, so werden die Horizontaltracen derselben, oder mit anderen Worten, die horizontalen Contourgeraden des Asymptotenkegels, offenbar schon die gesuchten Contourasymptoten des Hyperboloides darstellen. Dieselben können durch nachstehende Constructionen gefunden werden.

Wir denken uns das Hyperboloid sammt dem Asymptotenkegel um die Horizontaltrace P_h so lange gedreht, bis die Rotationsachse in die horizontale Projectionsebene nach Z_0 gelangt. In dieser Lage schneidet der Asymptotenkegel die horizontale Projectionsebene in zwei Erzeugenden, welche offenbar die Asymptoten σ_1^0 und σ_2^0 des um P_h umgelegten horizontal-projicierenden Meridians sind.

Legen wir nun an beliebiger Stelle eine zur Geraden Z_0 senkrechte (horizontal-projicierende) Ebene Π_h, so schneidet diese den gedrehten Asymptotenkegel in einem Kreise K_1, welcher um Π_h umgelegt, in K_1^0 dargestellt erscheint.

An den Asymptotenkegel haben wir in seiner ursprünglichen Lage horizontal-projicierende Berührebenen zu legen, d. h. Berührebenen zu führen, welche durch die den Mittelpunkt (O, O') enthaltende horizontal-projicierende Gerade gehen. Bei der vorgenommenen Drehung gelangt die besagte Gerade in die horizontale Projectionsebene und erscheint daselbst durch die Senkrechte $O_0\delta$ von O_0 auf die Trace P_h dargestellt.

Die gesuchten beiden horizontal-projicierenden Berührebenen des Asymptotenkegels sind daher, nach vollzogener Drehung, diejenigen, welche durch die Gerade $O_0\delta$ an den gedrehten Kegel (O_0, K_1) geführt werden.

Die Berührungspunkte derselben mit dem Kreise K_1 sind leicht zu bestimmen. Nach Umlegung des letzteren, um Π_h nach K^0_1 erscheinen obbesagte Punkte als die Berührungspunkte m_0 und n_0 der von δ aus an K^0_1 gezogenen Tangenten, während deren Projectionen sich als die beiden coincidierenden Punkte m_1 und n_1 in der Trace Π_h der Kreisebene ergeben.

Hiermit haben wir festgestellt, dass die beiden gesuchten horizontal-projicierenden Berührebenen des Asymptotenkegels, nach der Drehung dieses Kegels in die Lage (O_0, K_1), durch jene beiden Punkte gehen werden, welche zur horizontalen Projection den Punkt m_1 (oder n_1)

haben, und von diesem zu beiden Seiten der horizontalen Projectionsebene um die Strecke $m_1 m_0 = n_1 n_0$ entfernt sind.

Diesem Ergebnisse zufolge haben wir demnach bloß die beiden Punkte m_1 und n_1, um P_h in die ursprüngliche Lage zurückzudrehen, und nachdem der zugehörige Drehungswinkel gleich 90° ist, wird sich die um P_h gedrehte horizontal-projicierende Gerade $m_1 n_1$ nach der vorerwähnten Zurückführung als diejenige horizontale Gerade darstellen, welche durch (m_1, n_1) senkrecht zu P_h gezogen werden kann. Hierbei erscheint selbstverständlich die Strecke $m_1 n_1$ in wahrer Größe ($m' n' = m_0 n_0$) und haben die beiden Punkte m' und n' offenbar eine gegen P_h symmetrische Lage.

Die Punkte m' und n' sind nun die Horizontalprojectionen zweier Punkte, durch welche die horizontal-projicierenden Berührebenen des Asymptotenkegels gehen. Die Geraden $O'm'$ und $O'n'$ sind sonach die Horizontaltracen dieser Ebenen oder, wie früher nachgewiesen wurde, die Asymptoten Σ'_1, Σ'_2 der horizontalen Contour des Hyperboloides. Die letztere ist hiemit durch Σ'_1, Σ'_2 und durch die reelle Achse $a'b'$ vollkommen bestimmt.

In gleicher Weise kann nunmehr auch die Contour auf der verticalen Projectionsebene, falls sie reell ist, bestimmt werden.

§. 564.

193. Aufgabe. **Es ist in klinographischer Projection die Contour eines bifocalen Rotationshyperboloides unter der Voraussetzung zu construieren, dass die Rotationsachse durch eine beliebige, gegen die Bildebene geneigte Gerade und das Centrum des Hyperboloides durch einen auf dieser Geraden gegebenen Punkt dargestellt sei. Die Meridianhyperbel ist in wahrer Größe durch Achse und Brennpunkte gegeben.**

Die gegebene Rotationsachse sei dv (Taf. XXVII, Fig. 176), O sei der auf derselben gegebene Mittelpunkt des Hyperboloides; ferner sei $\alpha\beta$ (seitwärts) die reelle Achse der Meridianhyperbel; f_1 und f_2 seien deren Brennpunkte. Das Projectionsdreieck ist durch $v'_0 v \delta$ festgestellt.

Die gesuchte Contour des Rotationshyperboloides wird der Schnitt der Bildebene mit jenem Cylinder sein, welcher dem Hyperboloide parallel zu den Projectionsstrahlen umschrieben ist. Es ist einleuchtend, dass, weil dieser Cylinder ein schief-projicierender ist, die zu bestimmende Contour, als die schiefe Projection irgend eines beliebigen ebenen Schnittes desselben betrachtet werden kann. Von dieser Eigenschaft werden wir im Verlaufe der Lösung und be-

ziehungsweise bei den durchzuführenden Constructionen Gebrauch machen.

Vor allem wollen wir zwei besondere Punkte der Contourcurve bestimmen.

Die durch die Rotationsachse dv gehende, schief-projicierende Ebene P, deren Bildflächtrace P_b mit der Projection dv identisch ist, repräsentiert eine Meridianebene des Hyperboloides. Die Tangenten des Meridians in dieser Ebene P, welche zum schief-projicierenden Strahle parallel sind, stellen zwei Erzeugenden des umschriebenen schief-projicierenden Cylinders dar; die Schnittpunkte derselben mit der Bildebene sind daher zwei Punkte der gesuchten Contourcurve.

Um die besagten Punkte festzustellen, legen wir die genannte schief-projicierende Meridianebene sammt dem in ihr liegenden Meridian um die Trace $P_b = dv$ in die Bildebene um. Hiedurch gelangt die umgelegte Rotationsachse nach dv_0 und der umgelegte Mittelpunkt nach O_0. Es kann somit der umgelegte Meridian $(\alpha_0 \beta_0, f^0_1, f^0_2)$ congruent mit dem in wahrer Größe gegebenen Meridiane $(\alpha\, \beta, f_1, f_2)$ direct verzeichnet werden.

Die Richtung des um P_b umgelegten schief-projicierenden Strahles ist durch die Gerade vv_0 dargestellt.

Die früher gedachten schief-projicierenden Meridiantangenten werden sich in der Umlegung als die zu $v v_0$ parallelen Tangenten der Hyperbel $(\alpha_0 \beta_0, f_1{}^0, f_2{}^0)$ darstellen und können diese letzteren, wie bereits mehrfach besprochen, mittelst des über $\alpha_0 \beta_0$ beschriebenen Kreises und des einen Brennpunktes, etwa $f_1{}^0$, construiert werden. Deren Schnittpunkte a und b mit der Trace P_b liefern die früher genannten beiden Contourpunkte.

Es ist unschwer einzusehen, dass ab ein Durchmesser der Contourcurve ist. Denn die Achse eines einer Fläche zweiten Grades umschriebenen Cylinders geht stets durch den Mittelpunkt der Fläche; es ist mithin auch die schiefe Projection des Mittelpunktes einer solchen Fläche, der Mittelpunkt ihrer Contour. Nachdem weiters die Sehne ab durch den Mittelpunkt O der Contour geht, so ist dieselbe ein Durchmesser der letzteren.

Denken wir uns ferner durch die um P_b umgelegten Hyperbelscheitel α_0 und β_0 die Parallelen zum umgelegten schief-projicierenden Strahle $v v_0$ gezogen, so repräsentieren die Schnittpunkte φ_1 und φ_2 derselben mit der Trace P_b die schiefen Projectionen der Scheitel des Hyperboloides.

Wir haben gefunden, dass die Contourcurve des Umdrehungshyperboloides einen reellen Durchmesser *ab* besitze und folglich eine Hyperbel sein müsse. Es wird schließlich auch keinerlei Schwierigkeit bieten, deren Asymptoten zu bestimmen.

Denken wir uns eine beliebige zur Rotationsachse *dv* senkrechte Ebene $S_b S_v$ construiert. Der schief-projicierende, dem Hyperboloide umschriebene Cylinder wird dieselbe in einer Hyperbel schneiden, deren Brennpunkte (Satz 366) die Schnittpunkte dieser Ebene $S_b S_v$ mit den durch die Scheitel des Hyperboloides gehenden schief-projicierenden Strahlen sind oder was dasselbe ist, diejenigen Punkte der Ebene $S_b S_v$ sein werden, deren schiefe Projectionen durch φ_1 und φ_2 dargestellt erscheinen.

Selbstverständlich sind auch die Punkte *a* und *b* als die schiefen Projectionen des in der Ebene $S_b S_v$ liegenden Kegelschnittes zu betrachten, und da dieselben überdies auf der Verbindungsgeraden $\varphi_1 \varphi_2$ liegen, so werden durch die genannten Punkte die schiefen Projectionen der Scheitel jener Hyperbel dargestellt.

Legen wir nun die vier Punkte *a*, *b*, φ_1 und φ_2 um S_b in die Bildebene nach A_0, B_0, $\varphi_1{}^0$ und $\varphi_2{}^0$ um, so erhalten wir in $A_0 B_0$ die Brennpunktsachse und in $\varphi_1{}^0 \varphi_2{}^0$ die Brennpunkte der umgelegten Hyperbel.

Aus diesen hiemit festgestellten Elementen ergeben sich auf bekannte Weise die Asymptoten $\sigma^1{}_0$ und $\sigma^2{}_0$, welch letztere in die Projection zurückgeführt in σ_1 und σ_2 dargestellt erscheinen.

Da die eben betrachtete Hyperbel den Schnitt des umschriebenen schief-projicierenden Cylinders mit einer Ebene darstellt, so ist deren schiefe Projection identisch mit der Contourcurve; es sind demnach σ_1 und σ_2 die Asymptoten der Contourcurve. Hiermit erscheint auch diese letztere vollkommen bestimmt.

In ähnlicher Weise wird die gestellte Aufgabe in der „Centralprojection“ ihrer Lösung zugeführt. Man wird nämlich den dem Hyperboloide umschriebenen central-projicierenden Kegel mit einer zur Rotationsachse *dv* senkrechten Ebene zum Schnitte bringen und die centrale Projection dieses durch seine Brennpunkte und die Brennpunktsachse dargestellten Schnittes aus dessen Umlegung auf die uns bekannte Weise construieren.

§. 565.

Bestimmung des bifocalen Rotations-Hyperboloides durch gegebene Punkte, Tangentialebenen und andere Elemente.

194. Aufgabe. Ein bifocales Rotationshyperboloid ist durch seine Rotationsachse und durch einen Punkt auf der Fläche gegeben; es ist die Meridianhyperbel zu bestimmen.

Es ist klar, dass, wenn durch die Rotationsachse und durch den gegebenen Punkt eine Ebene gelegt wird, diese eine Meridianebene des Hyperboloides darstelle. Der Meridian ist in diesem Falle durch die reelle Achse und einen Punkt bestimmt. Wie unschwer zu erkennen, lässt sich daher das vorliegende Problem auf die Aufgabe der ebenen Geometrie zurückführen: „Die Asymptoten einer Hyperbel zu construieren, von welcher die reelle Achse und ein Punkt gegeben ist."

Dies vollführen wir einfach auf folgende Art. Ist AB (Taf. XXVII, Fig. 177) die gegebene Achse der Hyperbel und a der gegebene Punkt auf der Curve, so beschreiben wir über AB als Durchmesser den Kreis K und bestimmen die Berührungssehne p_a desselben für die von a aus an den Kreis K gezogenen Tangenten.

Der Punkt α, in welchem p_a die Achse AB schneidet, ist sodann der vierte harmonische Punkt zu den drei Punkten A, B und α', wobei α' den Schnittpunkt der Achse AB mit dem zu ihr aus a gefällten Perpendikel bedeutet; es ist mithin αa die Tangente der Hyperbel im Punkte a.

Diese Tangente t schneidet den Kreis K in zwei Punkten μ und ν. Wie aus vorausgeschickten Erörterungen (Aufgabe 178) hervorgeht, sind jene Punkte f_1 und f_2, in welchen die in μ und ν zur Tangente $\mu\alpha\nu a$ senkrecht gezogenen Geraden μf_1 und νf_2 die Achse AB treffen, die Brennpunkte der Hyperbel. Aus diesen Bestimmungsstücken können nun weiters, wenn nöthig, anstandslos die Asymptoten direct abgeleitet werden.

§. 566.

195. Aufgabe. Ein bifocales Rotationshyperboloid ist durch die Rotationsachse und eine Tangentialebene gegeben; die beiden Brennpunkte der Fläche sind zu ermitteln.

Sei AB die gegebene Rotationsachse und T die gegebene Tangentialebene. Eine ebenso nothwendige als hinreichende Bedingung, damit die Aufgabe eine reelle Lösung gestatte, ist die, dass die Berührebene T die Achse AB innerhalb der Strecke AB schneide.

Legen wir durch die Rotationsachse AB die Ebene P senkrecht zu der Berührebene T, so ist die Schnittgerade t beider Ebenen eine Tangente des in der Ebene P liegenden Meridianes. Um aus der Rotationsachse AB und der Meridiantangente t die Brennpunkte f_1 und f_2, welche dem Meridiane sowohl, als auch der Fläche zukommen,

abzuleiten, beschreiben wir wieder über AB als Durchmesser einen Kreis K und fällen aus dessen Schnittpunkten μ und ν mit der Tangente t auf diese letztere senkrechte Geraden. Diese zu t normalen Geraden treffen die Achse AB bereits in den gesuchten Brennpunkten f_1 und f_2.

§. 567.

196. Aufgabe. Ein bifocales Rotationshyperboloid ist durch die Lage der Rotationsachse, den Mittelpunkt und eine Tangente sammt dem zugehörigen Berührungspunkte gegeben; die Länge der Rotationsachse und die Brennpunkte sind zu bestimmen.

Sei Z (Taf. XXVII, Fig. 178) die der Lage nach gegebene Rotationsachse, O der Mittelpunkt des Hyperboloides und endlich τ irgend eine Tangente der Fläche mit dem ihr angehörenden Berührungspunkte p.

Die Tangentialebene T der Fläche im Punkte p geht einerseits durch die gegebene Tangente τ und steht andererseits auf der Meridianebene (Z, p) des Punktes p senkrecht; dieselbe ist mithin vollkommen bestimmt.

Besagte Berührebene schneidet die Meridianebene (Z, p) in der Tangente t des Meridianes im Punkte p. Dieser Meridian ist daher durch die Lage der Achse Z, durch den Mittelpunkt O, durch eine Tangente t und deren Berührungspunkt p gegeben.

Nennen wir α den Schnittpunkt der Tangente t mit der Achse Z und a die orthogonale Projection des Berührungspunktes p auf die Achse Z, so ist ap als Berührungssehne der von α aus an die Hyperbel gezogenen Tangenten, gleichzeitig die Polare des Punktes α. Hieraus folgt, dass die beiden Punkte α und a mit den zu suchenden Achsenendpunkten A und B vier harmonische Punkte darstellen müssen. Andererseits muss aber auch $AO = BO$ sein.

Die Punkte A und B ergeben sich, wie nachgewiesen werden wird, durch folgende Construction.

Schlägt man über $a\alpha$ als Durchmesser einen Kreis K_0 und zieht man an denselben die Tangente Or, so ist $Or = AO = BO$.

Aus der Construction folgt nämlich, dass:

$$\overline{Or}^2 = \overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = O\alpha \,.\, Oa.$$

Nun ist aber:

$$A\alpha = AO + O\alpha; \qquad B\alpha = BO - O\alpha$$
$$Aa = AO + Oa \text{ und } Ba = Oa - OB.$$

Sind die vier Punkte A, B, α und a wirklich harmonisch, so muss

$$\frac{A\alpha}{B\alpha} = \frac{Aa}{Ba} \text{ oder } \frac{AO + O\alpha}{BO - O\alpha} = \frac{Oa + OA}{Oa - OB}$$

oder, da man für die Strecke OB auch OA setzen kann:

$$\frac{OA + O\alpha}{OA - O\alpha} = \frac{Oa + OA}{Oa - OA}.$$

Dass diese Relation in der That besteht, ergibt sich unmittelbar wie folgt.

$$(OA + O\alpha)\,(Oa - OA) = (OA - O\alpha)\,(Oa + OA)$$

oder

$$OA \,.\, Oa - \overline{OA}^2 + O\alpha \,.\, Oa - O\alpha \,.\, OA = OA \,.\, Oa - Oa \,.\, O\alpha + \\ + \overline{OA}^2 - O\alpha \,.\, OA$$

und nach entsprechender Reduction:

$$O\alpha \,.\, Oa = \overline{OA}^2$$

welches Resultat mit dem der vollführten Construction übereinstimmt und deren Richtigkeit bestätigt.

Sind somit die Achsenendpunkte A und B bestimmt, so kann man aus dem über AB gezeichneten Kreise K und der Tangente t die Brennpunkte f_1 und f_2 auf dieselbe Weise wie in der vorhergehenden Aufgabe finden.

§. 568.

197. Aufgabe. Von einem bifocalen Rotationshyperboloide sind die Rotationsachse der Lage nach, der Mittelpunkt und zwei Punkte gegeben; die Länge der Rotationsachse und die beiden Brennpunkte der Fläche sind festzustellen.

Ist Z die Rotationsachse, O der Mittelpunkt des Hyperboloides, und sind p_1 und p_2 die beiden Punkte der Fläche, so legen wir diesfalls durch Z eine beliebige Meridianebene P, und drehen die gegebenen Punkte p_1 und p_2 so lange um Z als Achse, bis dieselben in die Ebene P nach π_1 und π_2 gelangen. Selbstverständlich sind sodann, weil p_1 und p_2 bei dieser Drehung Parallelkreise beschreiben, π_1 und π_2 zwei Punkte der in der Ebene P liegenden Meridianhyperbel.

Es wird sich demnach darum handeln, aus der Achse Z (Taf. XXVII, Fig. 179), dem Mittelpunkte O und den beiden Hyperbelpunkten π_1 und π_2, die Scheitel A und B auf Z zu finden.

Dies kann folgendermaßen bewerkstelligt werden. Ziehen wir die Verbindungsgerade $\pi_1 \pi_2$, so trifft dieselbe die Achse Z in einem

Punkte α. Bestimmen wir zu den drei Punkten α, π_1 und π_2 den vierten harmonischen Punkt m, so ist die Gerade ma, welche durch m senkrecht zur Achse Z gezogen wird, bekanntlich die Polare des Punktes α in Bezug auf die Hyperbel. Diese Polare schneidet die Achse Z in dem Punkte a; es müssen nun die Punkte a und α mit den beiden zu suchenden, gegen O symmetrisch liegenden Punkten A und B, vier harmonische Punkte darstellen.

Die Erreichung dieses Zweckes erfordert eine Construction, welche mit der in der vorhergehenden Aufgabe angedeuteten in voller Übereinstimmung ist.

Sind sodann, wie dort, auch hier die Achsenendpunkte A und B bestimmt, so folgt die Construction der Brennpunkte f_1 und f_2 aus A, B und einem der beiden Punkte π_1 oder π_2 auf dieselbe Weise, wie dies in Aufgabe 194) vollführt wurde.

§. 569.

198. Aufgabe. **Ein bifocales Rotationshyperboloid ist durch einen Brennpunkt und vier Tangentialebenen gegeben; es sind der zweite Brennpunkt und die beiden Scheitel des Hyperboloides zu bestimmen.**

Der gegebene Brennpunkt sei F_1; die vier gegebenen Tangentialebenen seien T_1, T_2, T_3 und T_4. Nach Satz 355) liegen die Fußpunkte a_1, a_2, a_3 und a_4 der vier von dem Brennpunkte F_1 aus, auf die Ebenen T_1, T_2, T_3 und T_4 gefällten Perpendikel auf derjenigen Kugel, welche über der Rotationsachse als Durchmesser beschrieben wird.

Man hat daher bloß durch die vier Fußpunkte a_1, a_2, a_3, a_4 eine Kugel S zu legen. Der Mittelpunkt O dieser Kugel ist gleichzeitig auch jener des Hyperboloides; der Durchmesser $F_1 O$ repräsentiert die Rotationsachse; die Endpunkte A und B des besagten Durchmessers sind die beiden Scheitel und der dem Punkte F_1, in Bezug auf O, symmetrische Punkt F_2 stellt den zweiten Brennpunkt des zu construierenden Rotationshyperboloides dar.

§. 570.

199. Aufgabe. **Ein bifocales Rotationshyperboloid ist durch einen Brennpunkt, zwei Tangentialebenen und den Berührungspunkt der einen dieser Ebenen gegeben; es sollen der zweite Brennpunkt und die Scheitel des Hyperboloides ermittelt werden.**

Der gegebene Brennpunkt sei F_1 (Taf. XXVII, Fig. 180); die beiden Tangentialebenen seien T_1 und T_2, und der Berührungspunkt

von T_1 sei p_1. Fällen wir von dem gegebenen Brennpunkte F_1 eine Senkrechte s auf die Ebene T_1; der Fußpunkt derselben ist a_1. Verlängern wir diese Senkrechte und tragen wir auf der Verlängerung derselben die Strecke $a_1 \alpha_1 = F_1 a_1$ auf, so erhalten wir den zu F_1 in Bezug auf die Tangentialebene T_1 als Symmetrieebene symmetrischen Punkt α_1.

Verbinden wir weiters die Punkte F_1 und α_1 mit dem gegebenen Berührungspunkte p_1 der Ebene. Die Geraden $F_1 p_1$ und $p_1 \alpha_1$ bilden mit der Meridiantangente $p_1 a_1$ des Punktes p_1 gleiche Winkel; ferner liegen die beiden Geraden in der Meridianebene, und da die eine, $F_1 p_1$, derselben, durch den einen Brennpunkt F_1 geht, so muss bekanntlich auch die zweite Gerade $p_1 \alpha_1$ durch den zweiten noch zu suchenden Brennpunkt F_2 gehen. Weiters ist das Dreieck $F_1 p_1 \alpha_1$ ein gleichschenkliges und daher $F_1 p_1 = p_1 \alpha_1$.

Denken wir uns den Punkt F_2, der auf $p_1 \alpha_1$ liegt, als bereits gefunden, so muss (nach Satz 348) $F_1 p_1 - F_2 p_1 = AB$ sein, wenn AB die Länge der Rotationsachse repräsentiert. Nachdem aber

$$F_1 p_1 = p_1 \alpha_1$$

ist, so folgt

$$p_1 \alpha_1 - F_2 p_1 = AB,$$

oder

$$F_2 \alpha_1 = AB.$$

Diesem Ergebnisse entnehmen wir, dass, wenn man von dem einen Brennpunkte F_1 auf eine Tangentialebene T_1 eine Senkrechte fällt, und auf derselben den zu F_1 symmetrischen Punkt α_1 in Bezug auf diese Tangentialebene als Symmetrieebene bestimmt, der zweite Brennpunkt von dem Punkte α_1 eine der Länge der Rotationsachse gleiche Entfernung besitzen muss.

Fällen wir demgemäß auch von dem Brennpunkte F_1 auf die zweite Ebene T_2 eine Senkrechte $F_1 a_2 \alpha_2$, und bestimmen wir auf derselben den Symmetriepunkt α_2 von F_1, so muss der gesuchte zweite Brennpunkt F_2 auch von α_2 die Entfernung AB besitzen; derselbe muss also von α_1 und α_2 gleich weit entfernt sein.

Dieser Punkt F_2 wird sich mithin im Schnitte der Geraden $p_1 \alpha_1$ mit jener Ebene ergeben, welche durch den Mittelpunkt m der Strecke $\alpha_1 \alpha_2$ auf diese letztere senkrecht geführt wird. Gleichzeitig gibt sodann die Entfernung $F_2 \alpha_1 = F_2 \alpha_2$ die Länge der Rotationsachse an.

Die Rotationsachse erhält man sonach als die Verbindungsgerade von F_1 und F_2, und den Halbierungspunkt O der Strecke $F_1 F_2$ als Mittelpunkt des Hyperboloides. Die Punkte A und B, welche auf $F_1 F_2$ in

der Entfernung $OA = OB = \frac{1}{2} F_2 \alpha_1$ vom Mittelpunkte O liegen, stellen die Scheitel des Hyperboloides dar.

§. 571.

200. Aufgabe. Ein bifocales Rotationshyperboloid ist durch die Rotationsachse Z (der Lage nach), durch einen Brennpunkt F_1 auf derselben und durch zwei Tangentialebenen T_1 und T_2 gegeben; der zweite Brennpunkt und die Länge der Rotationsachse sind zu bestimmen.

Aus vorhergegangenen Erörterungen ist bekannt, dass, sobald man die Symmetriepunkte α_1 und α_2 des Brennpunktes F_1 in Bezug auf die beiden Tangentialebenen T_1 und T_2 bestimmt, der zweite Brennpunkt F_2 von diesen Symmetriepunkten eine Entfernung besitze, welche der Länge der Rotationsachse gleich ist. (Siehe Aufgabe 199.)

Da im vorliegenden Falle auch die Rotationsachse Z, auf welcher der zu suchende Brennpunkt F_2 liegen soll, der Lage nach gegeben ist, so wird sich derselbe als Schnittpunkt F_2 der Rotationsachse Z mit jener Ebene ergeben, welche durch den Mittelpunkt der Strecke $\alpha_1 \alpha_2$ auf dieselbe senkrecht geführt wird. Hierbei stellt die Strecke $F_2 \alpha_1 = F_2 \alpha_2$ gleichzeitig die Länge der Rotationsachse dar.

Halbiert man demgemäß die Focaldistanz $F_1 F_2$, so erhält man den Mittelpunkt O des Hyperboloides, und wenn man die Strecke

$$OA = OB = \frac{1}{2} F_2 \alpha_1 = \frac{1}{2} F_2 \alpha_2$$

von dem Punkte O zu beiden Seiten auf Z aufträgt, ergeben sich in A und B die gesuchten Scheitel des Hyperboloides.

§. 572.

201. Aufgabe. **Ein bifocales Rotationshyperboloid ist durch einen Brennpunkt, durch zwei Punkte der Fläche und durch die Berührebene in einem derselben gegeben; der zweite Brennpunkt und die Länge der Rotationsachse sind zu bestimmen.**

Der gegebene Brennpunkt sei F_1 (Taf. XXVII, Fig. 181); die beiden gegebenen Punkte seien p und p_1, und die Tangentialebene im Punkte p sei T.

Bestimmen wir wieder den Symmetriepunkt α des Brennpunktes F_1 in Bezug auf die Tangentialebene T, so wird auf der Verbindungsgeraden αp der gesuchte zweite Brennpunkt F_2 liegen, und zwar wird derselbe von α einen der Rotationsachse AB gleichen Abstand besitzen.

Ferner muss sich der zu bestimmende Brennpunkt F_2 von dem zweiten gegebenen Punkte p_1 in einer Entfernung vorfinden, welche durch

$$AB + F_1 p_1 = F_2 p_1$$

oder, weil $AB = \alpha F_2$ ist, durch

$$\alpha F_2 + F_1 p_1 = F_2 p_1$$

ausgedrückt wird.

Denken wir uns nun die Strecke $F_1 p_1$, d. i. den Abstand des gegebenen Punktes p_1 von dem gegebenen Brennpunkte F_1 auf der Geraden $p\alpha$ von α aus nach π aufgetragen, also $\alpha\pi = F_1 p_1$ abgeschnitten, so wird der gesuchte Brennpunkt F_2 auf der Geraden $p\alpha$ von den beiden Punkten p_1 und π gleich weit abstehen; denn es wird in diesem Falle:

$$F_2 p_1 = F_2 \pi = F_2 \alpha + \alpha\pi = F_2 \alpha + F_1 p_1$$

oder weil $F_2 \alpha = AB$ ist,

$$F_2 p_1 = AB + F_1 p_1$$

sein. Dieser Bedingung muss also der Brennpunkt F_2 genügen.

Der Brennpunkt F_2 wird daher wieder als Schnitt der Geraden $p\alpha$ mit jener Ebene gefunden werden, welche im Mittelpunkte der Strecke $p_1 \pi$ auf diese letztere senkrecht gefällt wird. Die Rotationsachse wird sich hierbei in einer der Strecke $F_2 \alpha$ gleichen Länge ergeben.

§. 573.

202. Aufgabe. Ein Rotationshyperboloid ist durch einen Brennpunkt F_1, durch einen Punkt p und durch drei Tangentialebenen T_1, T_2 und T_3 gegeben; der zweite Brennpunkt und die Länge der Rotationsachse sind zu bestimmen.

Sucht man zu dem gegebenen Brennpunkte F_1 die drei Symmetriepunkte α_1, α_2 und α_3 in Bezug auf die drei Tangentialebenen F_1, F_2 und F_3 auf, so muss der gesuchte Brennpunkt F_2 von jedem derselben die nämliche Entfernung AB besitzen. Weiters muss aber auch dem Punkte F_2 von dem gegebenen Punkte p eine Entfernung $F_2 p$ zukommen, welche um die Distanz $F_1 p$ vermindert, ebenfalls die Strecke AB ergeben muss.

Denkt man sich daher um p als Mittelpunkt eine Kugel S mit dem Halbmesser pF_1 beschrieben, welche durch den gegebenen Brennpunkt F_1 geht, so wird diese Kugel die Gerade $F_2 p$ in einem Punkte π treffen, für welchen $\pi p = pF_1$; mithin $F_2 \pi = AB$ ist.

Aus dieser einfachen Betrachtung erhellt, dass der Mittelpunkt einer Kugel, welche durch die drei Punkte α_1, α_2 und α_3 geht und die vorgenannte Kugel S ausschließend berührt, den gesuchten zweiten Brennpunkt F_2 darstelle. Der besagte Punkt F_2 wird mithin durch die in Aufgabe 102) entwickelte Construction anstandslos gefunden werden können. Gleichzeitig wird durch den Radius der somit bestimmten Kugel, wie den obigen Betrachtungen zu entnehmen ist, die gesuchte Länge der Rotationsachse festgestellt.

§. 574.

203. Aufgabe. **Ein bifocales Rotationshyperboloid ist durch einen Brennpunkt F_1, zwei Punkte p_1 und p_2 und zwei Tangentialebenen T_1 und T_2 gegeben; der zweite Brennpunkt F_2 und die Länge AB der Rotationsachse sind zu bestimmen.**

Vor allem bestimmen wir auch diesfalls wieder die beiden Symmetriepunkte α_1 und α_2 des gegebenen Brennpunktes F_1 in Bezug auf die beiden gegebenen Tangentialebenen. Der gesuchte zweite Brennpunkt F_2 hat von diesen beiden Punkten einen der Länge der Rotationsachse gleichen Abstand.

Beschreibt man ferner aus den gegebenen Punkten p_1 und p_2, indem man dieselben als Mittelpunkte zweier Kugeln S_1 und S_2 betrachtet, diese letzteren in der Weise, dass sie durch den gegebenen Brennpunkt F_1 gehen, also die bezüglichen Radien p_1F_1 und p_2F_1 besitzen, so lässt sich leicht nachweisen, dass der Mittelpunkt T_2 jener Kugel, welche die beiden Kugeln S_1 und S_2 ausschließend berührt und durch die beiden Punkte α_1 und α_2 geht, den gesuchten zweiten Brennpunkt repräsentieren müsse.

Sind nämlich π_1 und π_2 die Berührungspunkte der zu construierenden Kugel Σ mit den beiden Kugeln S_1 und S_2; so sind die Strecken $F_2\alpha_1$, $F_2\alpha_2$, $F_2\pi_1$ und $F_2\pi_2$ als Radien dieser Kugel Σ einander gleich. Aus der Berührung der Kugeln folgt aber, dass:

$$F_2\pi_1 + \pi_1 p_1 = F_2 p_1 \text{ und } F_2\pi_2 + p_2\pi_2 = F_2 p_2$$

sei, oder, da $\pi_1 p_1$, $\pi_2 p_2$ Radien der Kugeln S_1 und S_2, also auch beziehungsweise gleich p_1F_1 und p_2F_1 sind, wird:

$$F_2\pi_1 = F_2p_1 - F_1p_1 \text{ und } F_2\pi_2 = F_2p_2 - F_1p_2.$$

Demnach hat man die Kugelradien:

$$F_2\alpha_1 = F_2\alpha_2 = F_2p_1 - F_1p_1 = F_2p_2 - F_1p_2 = AB.$$

Um das vorstehende Problem zu lösen, hat man demzufolge (nach Aufgabe 104) jene Kugel zu construieren, welche die beiden

Kugeln S_1 und S_2 ausschließend berührt, und durch die beiden Punkte α_1 und α_2 geht. Der Mittelpunkt dieser Kugel wird, der eben vorausgeschickten Betrachtung gemäß, den gesuchten zweiten Brennpunkt F_2, und der Kugelradius die Länge der Rotationsachse darstellen. Mittelpunkt und Scheitel des Rotationshyperboloides sind sodann einfach zu construieren.

§. 575.

204. Aufgabe. Ein bifocales Rotationshyperboloid ist durch einen Brennpunkt F_1, drei Punkte p_1, p_2 und p_3, und eine Tangentialebene T_1 gegeben; der zweite Brennpunkt, sowie die Länge der Rotationsachse sind zu ermitteln.

Bestimmt man den Symmetriepunkt α des gegebenen Brennpunktes F_1 in Bezug auf die gegebene Tangentialebene T; betrachtet man ferner die drei gegebenen Punkte p_1, p_2 und p_3 als Mittelpunkte dreier Kugeln S_1, S_2 und S_3, welche durch den Brennpunkt F_1 gehen, und construiert man weiters (nach Aufgabe 106) jene Kugel Σ, welche durch den Punkt α geht und die drei Kugeln S_1, S_2 und S_3 ausschließend berührt, so ist der Mittelpunkt dieser Kugel Σ, wie sogleich bewiesen werden soll, der gesuchte zweite Brennpunkt F_2, und der Radius der besagten Kugel die verlangte Länge der Rotationsachse.

Bezeichnen wir die Berührungspunkte der Kugel Σ mit den drei Kugeln S_1, S_2 und S_3, beziehungsweise mit π_1, π_2 und π_3, so ist, falls F_2 der Mittelpunkt von Σ ist,

$$F_2\pi_1 + \pi_1 p_1 = F_2 p_1\,;\ F_2\pi_2 + \pi_2 p_2 = F_2 p_2 \text{ und } F_2\pi_3 + \pi_3 p_3 = F_2 p_3,$$

oder weil $\pi_1 p_1$, $\pi_2 p_2$ und $\pi_3 p_3$ als Radien der Kugeln S_1, S_2, S_3, beziehungsweise gleich $p_1 F_1$, $p_2 F_1$ und $p_3 F_1$ sind, wird:

$$F_2\pi_1 = F_2 p_1 - F_1 p_1;\ F_2\pi_2 = F_2 p_2 - F_1 p_2 \text{ und } F_2\pi_3 = F_2 p_3 - F_1 p_3$$

sein. Ferner sind aber auch $F_2\alpha$, $F_2\pi_1$, $F_2\pi_2$, $F_2\pi_3$ Radien der Kugel Σ, mithin:

$$F_1\alpha = F_2 p_1 - F_1 p_1 = F_2 p_2 - F_1 p_2 = F_2 p_3 - F_1 p_3,$$

was zu beweisen war.

Ist auf diese Weise der zweite Brennpunkt F_2 und die Länge $AB = F_2\alpha$ der Rotationsachse gefunden, so kann man mit Leichtigkeit den Mittelpunkt O und die beiden Scheitel A und B des Rotationshyperboloides construieren.

§. 576.

205. Aufgabe. Es ist ein bifocales Rotationshyperboloid durch einen Brennpunkt und vier Punkte gegeben; der zweite Brennpunkt, sowie die Länge der Rotationsachse sind zu ermitteln.

Betrachten wir die vier gegebenen Punkte p_1, p_2, p_3 und p_4 als die Mittelpunkte von vier Kugeln S_1, S_2, S_3 und S_4, welche durch den gegebenen Brennpunkt F_1 gehen.

Ist Σ eine Kugel, welche diese vier Kugeln S_1, S_2, S_3, S_4 ausschließend berührt, so ist der Mittelpunkt F_2 derselben der gesuchte zweite Brennpunkt, während der Radius dieser Kugel Σ die verlangte Länge der Rotationsachse liefert.

Bezeichnen wir nämlich die Berührungspunkte der Kugel Σ mit den vier Kugeln S_1, S_2, S_3 und S_4, beziehungsweise mit π_1, π_2, π_3 und π_4, so ist:

$$F_2\pi_1 = F_2p_1 - \pi_1 p_1\,;\; F_2\pi_2 = F_2p_2 - \pi_2p_2\,;\; F_2\pi_3 = F_2p_3 = \pi_3p_3$$
$$\text{und } F_2\pi_4 = F_2p_4 - \pi_4p_4\,;$$

oder, da $\pi_1 p_1 \ldots \pi_4 p_4$ als Radien der Kugeln $S_1 \ldots S_4$, beziehungsweise gleich F_1p_1, F_1p_2, F_1p_3 und F_1p_4 sind, wird:

$$F_2\pi_1 = F_2p_1 - F_1p_1\,;\; F_2\pi_2 = F_2p_2 - F_1p_2;\; F_2\pi_3 = F_2p_3 - F_1p_3;$$
$$F_2\pi_4 = F_2p_4 - F_2p_4.$$

Nun sind aber $F_2\pi_1$, $F_2\pi_2$, $F_2\pi_3$ und $F_2\pi_4$, als Radien der Kugel Σ, einander gleich; mithin folgt:

$$F_2p_1 - F_1p_1 = F_2p_2 - F_1p_2 = F_2p_3 - F_1p_3 = F_2p_4 - F_1p_4,$$

woraus sich unmittelbar die Richtigkeit der obangedeuteten Construction ergibt.

Um somit das gestellte Problem zu lösen, hat man eine Kugel Σ zu construieren, welche die vier gegebenen Kugeln S_1, S_2, S_3 und S_4 ausschließend berührt.

Selbstverständlich wird man in diesem Falle nicht auf die allgemeine Construction zurückgreifen, da der Umstand, dass die vier Kugeln $S_1 \ldots S_4$ durch einen und denselben Punkt F_1 gehen, eine eigenthümliche Vereinfachung gestattet.

Betrachten wir nämlich den Punkt F_1 als Inversionscentrum, und nehmen wir einen beliebigen Inversionsmodul an, so transformieren sich die vier Kugeln S_1, S_2, S_3 und S_4 in vier Ebenen s_1, s_2, s_3, s_4 und die dieselben berührende Kugel Σ in eine Kugel σ, welche diese vier Ebenen berührt. Gleichzeitig werden den vier Berührungspunkten π_1, π_2, π_3, π_4 von Σ mit den Kugeln S_1, S_2, S_3, S_4 invers die vier Berührungspunkte π'_1, π'_2, π'_3, π'_4 der Kugel σ mit den vier Ebenen s_1, s_2, s_3 und s_4 entsprechen.

Auf Grund dieser einfachen Erörterungen hat man somit bloß die vier Kugeln $S_1 \ldots S_4$ von F_1 aus invers in vier Ebenen zu transformieren, hierauf eine Kugel σ zu construieren, welche die vier

Ebenen berührt (selbstverständlich wird man unter den acht möglichen Kugeln diejenige wählen, welche durch inverse Rücktransformation in eine solche übergeht, welche $S_1 \ldots S_4$ „ausschließend“ berührt), und sodann die vier Berührungspunkte der gefundenen Kugel σ mit den vier Ebenen nach $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ invers zurückzutransformieren. Diese letztgenannten Punkte stellen offenbar die Berührungspunkte der gesuchten Kugel Σ dar, deren Mittelpunkt F_2 als der Schnittpunkt zweier von den vier Berührungsradien $\pi_1 p_1$, $\pi_2 p_2$, $\pi_3 p_3$ und $\pi_4 p_4$ erhalten wird.

Die vorstehende Aufgabe kann auch auf einem von dem eben entwickelten Lösungsgange wesentlich verschiedenen Wege ihrer Lösung und Durchführung zugeführt werden.

Durch frühere Untersuchungen ist klargelegt worden, dass jeder Kegelschnitt als collinear mit einem Kreise von beliebigem Radius betrachtet werden kann, welcher seinen Mittelpunkt in einem der beiden Brennpunkte des Kegelschnittes hat. Dieser Brennpunkt repräsentiert dann gleichzeitig das zugehörige Collineationscentrum.

Denken wir uns demgemäß eine beliebige Hyperbel K und beschreiben wir aus einem Brennpunkte F_1 derselben einen Kreis K_0 mit irgend einem beliebigen Radius, so ist dieser mit der Hyperbel in Bezug auf den genannten Brennpunkt F_1 als Collineationscentrum, perspectivisch collinear.

Denken wir uns weiters die Hyperbel K sowohl, als auch den ihr collinearen Kreis K_0 um die Brennpunktsachse gedreht, so erzeugt die erstere ein bifocales Rotationshyperboloid und der letztere eine Kugel, deren Mittelpunkt der Brennpunkt F_1 des Hyperboloides ist.

Diese beiden Flächen sind in Bezug auf den Brennpunkt F_1 als Collineationscentrum perspectivisch collinear, da dieselben von jeder die Rotationsachse enthaltenden Ebene in collinearen Curven geschnitten werden.

Hieraus folgt aber unmittelbar, dass jedes Rotationshyperboloid als collinear mit einer Kugel von beliebigem Radius, deren Mittelpunkt mit einem der beiden Brennpunkte des Hyperboloides zusammenfällt, betrachtet werden kann.

Diese Betrachtung führt unmittelbar auf die folgende Construction der vorherigen Aufgabe.

Ist F_1 der gegebene Brennpunkt und sind p_1, p_2, p_3, p_4 die vier gegebenen Punkte des Rotationshyperboloides, so wird man aus F_1 als Mittelpunkt eine Kugel S_0 mit ganz beliebigem Radius construieren

und dieselbe als collinear mit dem zu construierenden Hyperboloide betrachten.

Die Strahlen $F_1 p_1$, $F_1 p_2$, $F_1 p_3$ und $F_1 p_4$ treffen die Kugel in je zwei Punkten $p^1_0, (p^1_0)$; $p^2_0, (p^2_0)$; $p^3_0, (p^3_0)$ und $p^4_0, (p^4_0)$, welche als die den Punkten $p_1, \ldots p_4$ collinear entsprechenden Punkte zu betrachten sind.

Treffen wir nun eine bestimmte Wahl, d. h. nehmen wir beispielsweise p_1, p^0_1; p_2, p^0_2; p_3, p^0_3 und p_4, p^0_4 als Paare entsprechender Punkte an, so ergeben die entsprechenden Geraden $p_1 p_2$ und $p^0_1 p^0_2$ einen Punkt δ_1 der Collineationsebene C_e; ebenso wird das Paar $p_2 p_3$ und $p^0_2 p^0_3$ einen zweiten Punkt δ_2 und das Paar $p_3 p_4$; $p^0_3 p^0_4$ einen dritten Punkt δ_3 bestimmen. Die Collineationsebene C_e ist somit durch die drei Punkte δ_1, δ_2 und δ_3 vollkommen festgestellt.

Nun ist aber auch einleuchtend, dass die Rotationsachse des Hyperboloides (nach §. 381) auf der Collineationsebene C_e senkrecht stehen müsse, also durch jene Gerade Z dargestellt werde, welche durch den Brennpunkt F_1 normal zu C_e gezogen werden kann.

Die Scheitel A und B dieser Rotationsachse Z des Hyperboloides sind sodann, da die Gerade Z gleichzeitig ein Collineationsstrahl ist, offenbar jene Punkte, welche den Schnittpunkten A_0 und B_0 der Achse Z mit der Collinearkugel S_0 collinear entsprechen. Dieselben können daher durch folgende einfache Construction gefunden werden.

Verbinden wir die Punkte A_0 und p^0_1 durch eine Gerade, welche die Collineationsebene im Punkte Δ treffen möge, so entspricht dieser Geraden collinear die Gerade Δp_1 und diese muss offenbar die Achse Z in den dem Punkte A_0 entsprechenden collinearen Punkt A, d. i. in einem der beiden gesuchten Scheitel des Hyperboloides treffen.

In gleicher Weise leitet man den zweiten Scheitel B aus dem Punkte B_0 ab. Wird nun die Strecke AB halbiert, so erhält man den Mittelpunkt O des Hyperboloides, und in dem, dem Punkte F_1 in Bezug auf O symmetrisch entsprechenden Punkt F_2, den zweiten Brennpunkt desselben, womit die Aufgabe vollständig gelöst ist.

Von der Wahl der entsprechenden Punkte aus den früher genannten Paaren $p_1, (p^0_1)$; $p_2, (p^0_2) \ldots$, wird es offenbar abhängen, ob die der Kugel S_0 collinear entsprechende Rotationsfläche ein Ellipsoid oder ein Hyperboloid sein werde.

Es gibt jedoch gewisse Fälle, wo bei beliebiger Wahl der obbezeichneten Punktepaare nur Ellipsoide oder nur Hyperboloide als das Resultat dieser Wahl erscheinen können.

§. 577.

Anwendung des bifocalen Rotationshyperboloides auf die Construction doppelt berührender Kegelschnitte.

Das bifocale Rotationshyperboloid bietet ebenso wie das früher besprochene Ellipsoid und das einfache (windschiefe) Rotationshyperboloid ein bequemes Mittel zur Construction der eine Hyperbel unter gegebenen Bedingungen doppelt berührenden Kegelschnitte.

Während mit Hilfe der windschiefen Rotationshyperboloide doppelt berührende Kegelschnitte construiert wurden, welche ihrer ganzen Ausdehnung nach außerhalb der gegebenen Hyperbel lagen, d. h. solche Kegelschnitte ermittelt worden sind, von deren jedem Punkte reelle Tangenten an die gegebene Hyperbel gezogen werden konnten, tritt hier der umgekehrte Fall ein.

Da die bezüglich der eben angedeuteten Constructionen zu verwendenden Methoden dem Principe nach dieselben sind, wie jene, welche gelegentlich der Verwertung des Ellipsoides zu ähnlichem Zwecke zur Geltung gebracht wurden (Aufgaben 170—176), so wird an diesem Orte wohl der bloße Hinweis genügen, und zur Bestätigung des Gesagten die constructive Durchführung irgend eines Falles hinreichen.

§. 578.

206. Aufgabe. **Eine Hyperbel, innerhalb derselben ein Punkt und ferner zwei Geraden, welche die Hyperbel reell schneiden, sind gegeben; es ist ein Kegelschnitt zu construieren, welcher die gegebene Hyperbel doppelt berührt, durch den gegebenen Punkt geht und die beiden gegebenen Geraden tangiert.**

Die gegebene Hyperbel sei durch ihre reelle Achse AB (Taf. XXVIII, Fig. 182) und die Asymptoten Y_1 und Y_2 dargestellt. Diese Hyperbel betrachten wir als den zur verticalen Projectionsebene parallelen Meridian eines bifocalen Rotationshyperboloides, dessen Rotationsachse AB ist.

Unter dieser Voraussetzung hat man die Grundlinie XX senkrecht zu AB zu wählen und in der Verlängerung von AB die Horizontalprojection O' des Mittelpunktes O der Fläche anzunehmen. Der gegebene Punkt sei a und die beiden gegebenen Geraden seien t_1 und t_2.

Es ist an und für sich klar, dass jeder Kegelschnitt, welcher im Inneren der gegebenen Hyperbel liegt und dieselbe in zwei Punkten berührt, als die Verticalprojection eines ebenen Schnittes des vorgenannten Hyperboloides betrachtet werden kann. Der schneidenden

Ebene E ist aber dermalen eine solche Lage zu geben, dass die Verticalprojection des Kegelschnittes durch den Punkt a geht und die beiden Geraden t_1 und t_2 berührt.

Die erste der eben ausgesprochenen Bedingungen wird erfüllt, wenn wir a als die Verticalprojection eines Punktes auf dem Hyperboloide betrachten und unter dieser Voraussetzung dessen Horizontalprojection a' bestimmen. Geht die schneidende Ebene E durch (a, a'), so wird das Gleiche auch von der Schnittcurve gelten und wird mithin deren Verticalprojection durch a gehen. Soll die Verticalprojection von der gegebenen Geraden t_1 berührt werden, so muss t_1 die verticale Projection einer Tangente des Schnittes darstellen, also die verticale Projection einer Tangente des Hyperboloides sein.

Die gleiche Bedingung wird in Bezug auf die zweite gegebene Gerade t_2 erfüllt werden müssen. Dies sagt aber nichts anderes aus, als dass t_1 und t_2 die verticalen Projectionen zweier gewisser Tangenten (t_1, t'_1) und (t_2, t'_2) jener Kegelschnitte ε_1 und ε_2 repräsentieren werden, in welchen die beziehungsweise durch t_1 und t_2 gehenden vertical-projicierenden Ebenen P^1_v und P^2_v das Hyperboloid schneiden.

Nun unterliegen aber die zu suchenden Tangenten (t_1, t'_1) und (t_2, t'_2) der Bedingung, dass sie mit dem Punkte (a, a') in einer und derselben Ebene, und zwar in der vorgenannten schneidenden Ebene liegen müssen.

Es ist diesbezüglich unschwer einzusehen, dass die besagte Ebene nur eine jener Ebenen sein könne, welche durch den Punkt (a, a') gehen und die beiden vorgenannten Kegelschnitte ε_1 und ε_2 berühren.

Durch die bezeichneten Kegelschnitte ε_1 und ε_2 lassen sich, nachdem dieselben auf einer Fläche zweiten Grades liegen, stets zwei Kegel legen. Die Scheitel dieser Kegel müssen sich, da beide Kegelschnitte symmetrisch gegen die Hauptmeridianebene η_h liegen, in der letzteren vorfinden.

Bestimmt man demnach die Schnittpunkte m_1, n_1 und m_2, n_2 der beiden Geraden t_1 und t_2 mit der Hauptmeridianhyperbel durch Zuhilfenahme des Collinearkreises K_0 dieser Hyperbel, so repräsentieren diese Punkte die in der Hauptmeridianebene η_h liegenden Punkte von ε_1 und ε_2; es werden daher $m_1\,n_2$ und $m_2\,n_1$ zwei Erzeugenden des einen durch ε_1 und ε_2 gehenden Kegels, und deren Schnittpunkt (S, S') (S' in η_h) den Scheitel dieses Kegels darstellen.

Jede Tangentialebene des besagten Kegels (S, S') berührt die beiden Kegelschnitte ε_1 und ε_2. Es werden demnach diejenigen Berührebenen, welche gleichzeitig durch den Punkt (a, a') gehen, die gesuchten Ebenen repräsentieren.

Jede von diesen beiden Ebenen wird die Ebene P'_v des Kegelschnittes ε_1 in einer Tangente (t, t') desselben schneiden, welche durch den Durchstoßpunkt (s, s') dieser Kegelschnittsebene P'_v mit der Geraden $(Sa, S'a')$ gehen muss.

Die besagten Tangenten können folgendermaßen construiert werden. Der Kegelschnitt ε_1 projiciert sich (nach Satz 367) aus dem Scheitel (A, A') des Hyperboloides auf die horizontale Projectionsebene als ein Kreis γ'_1, während der Punkt (s, s') vermittelst des Strahles $(As, A's')$ in Bezug auf dieselbe Ebene in dem Punkte σ' dargestellt erscheint. Führen wir nun durch σ' eine Tangente τ'_1 an den Kreis γ'_1 und projicieren wir dieselbe in die Ebene P'_v nach (t_1, t'_1) zurück, so erhalten wir bereits eine Lage der gesuchten Tangente.

Die durch (a, a') und diese Tangente (t_1, t'_1) gelegte Ebene $E_v E_h$ berührt somit [als Tangentialebene des Kegels $(S, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$] die beiden Kegelschnitte ε_1 und ε_2, und schneidet folglich, den früheren Betrachtungen gemäß, das Hyperboloid in einem Kegelschnitte, dessen Verticalprojection die durch die vorgelegte Aufgabe gestellten Bedingungen erfüllt.

XXVI. Capitel.

Constructionsaufgaben, das Rotationsparaboloid betreffend.

Auch hier wollen wir, bevor wir auf die Durchführung der diesbezüglichen Probleme eingehen, einige ebenso wichtige, als nothwendige Hilfsconstructionen, die eigentlich der ebenen Geometrie angehören, ihrer Erledigung zuführen.

§. 579.

207. Aufgabe. **Eine Parabel ist durch den Brennpunkt und die Directrix gegeben; es sind deren Schnittpunkte mit einer beliebig gegebenen Geraden zu ermitteln.**

Um diese Aufgabe in ihrer einfachsten Gestalt zur Lösung zu bringen, gehen wir von der Fundamentaleigenschaft der Parabel aus, welcher zufolge jeder Punkt derselben von dem Brennpunkte F (Taf. XXVIII, Fig. 183) und von der Directrix D eine gleiche Entfernung hat, also den Mittelpunkt eines Kreises repräsentiert, welcher durch den Brennpunkt F geht, und die Directrix D berührt.

Soll nun der Parabelpunkt auf einer gegebenen Geraden g liegen, so muss offenbar der Kreis, welcher durch den Brennpunkt F geht und den fraglichen Curvenpunkt zum Mittelpunkte hat, auch durch jenen Punkt f gehen, welcher zum Brennpunkte F in Bezug auf die Gerade g symmetrisch ist.

Die Aufgabe reduciert sich demnach auf jene: „Durch die beiden Punkte F und f einen Kreis zu legen, welcher die Gerade D berührt".

Der Berührungspunkt π_1 dieses Kreises K_1 mit der Geraden D hat von dem Punkte m, in welchem D von der Geraden Ff getroffen wird, eine Entfernung, welche durch die Relation:

$$\overline{m\pi_1}^2 = mF \cdot mf$$

festgestellt wird.

Legt man durch die beiden Punkte F und f zunächst einen beliebigen Kreis K, und zieht man an denselben von m aus die Tangente mr, so ist auch

$$\overline{mr}^2 = mF \cdot mf$$

und folglich:

$$m\pi_1 = mr.$$

Auf Grund dieses Ergebnisses hat man somit die Strecke mr von m aus zu beiden Seiten von m auf D nach $m\pi_1$ und $m\pi_2$ aufzutragen, um in den Endpunkten π_1 und π_2 die Berührungspunkte jener beiden der Aufgabe entsprechenden Kreise K_1 und K_2 zu erhalten.

Die Mittelpunkte p_1 und p_2, welche sich im Schnitte von g mit den aus π_1 und π_2 senkrecht zu D gezogenen Geraden ergeben, sind, den vorstehenden Betrachtungen gemäß, unmittelbar die gesuchten Schnittpunkte der Geraden g mit der Parabel.

Ist die schneidende Gerade g insbesondere parallel zur Directrix D, so wird die Construction der Schnittpunkte eine noch einfachere.

Nimmt man nämlich in diesem Falle die Entfernung ad (Taf. XXVIII, Fig. 184) der Geraden g von der Directrix D als Radius eines Kreises K an, dessen Mittelpunkt der gegebene Brennpunkt F der Parabel ist, so schneidet dieser Kreis K die Gerade g bereits in den verlangten Punkten p_1 und p_2 der Parabel, da jeder derselben einen gleichen Abstand von dem Brennpunkte F und von der Directrix D besitzt.

§. 580.

208. Aufgabe. Eine Parabel ist durch den Brennpunkt F und die Directrix D gegeben; es sind durch einen gegebenen Punkt P Tangenten an die Parabel zu ziehen, und deren Berührungspunkte zu construieren.

Vor allem construieren wir die Scheiteltangente T (Taf. XXVIII, Fig. 185) der Parabel. Besagte Tangente ist bekanntlich diejenige zur Directrix D parallele Gerade, welche durch den Halbierungspunkt A des Abstandes des Brennpunktes von der Directrix (Scheitel der Parabel) hindurchgeht.

Construiert man nun einen Kreis K, welcher die Strecke PF zum Durchmesser hat, so schneidet dieser die Scheiteltangente T in zwei Punkten a_1 und a_2, welche mit P verbunden, bereits die gesuchten Tangenten t_1 und t_2 ergeben.

Zieht man ferner die Geraden Fa_1 und Fa_2 bis zu den bezüglichen Durchschnitten π_1 und π_2 mit der Directrix D, und errichtet man in π_1 und π_2 Senkrechte auf die letztere, so schneiden diese beziehungsweise die Tangenten t_1 und t_2 in deren Berührungspunkten p_1 und p_2.

Die Richtigkeit dieser Construction erhellt direct aus den Fundamentaleigenschaften der Parabel. Denn es ist Pa_1p_1 senkrecht auf $Fa_1\pi_1$ und $Fa_1 = a_1\pi_1$, folglich auch $Fp_1 = p_1\pi_1$, und somit p_1 ein Punkt der Parabel. Aus dem gleichschenkligen Dreiecke $F\pi_1p_1$ folgt ferner auch, dass $\measuredangle Fp_1a_1 = \measuredangle \pi_1p_1a_1$ sei, und dass daher Pa_1p_1 eine Tangente der Parabel im Punkte p_1 sei. Das gleiche gilt bezüglich der Tangente t_2 und deren Berührungspunkt p_2.

Gleichzeitig wird hierdurch auch die bekannte Eigenschaft der Parabel bewiesen, dass jede ihrer Tangenten t auf jener Geraden senkrecht stehe, welche den Schnittpunkt dieser Tangente t und der Scheiteltangente T mit dem Brennpunkte F verbindet. Auf dieser Eigenschaft beruht auch die nachstehende Construction.

§. 581.

209. Aufgabe. Parallel zu einer Geraden ist an eine durch den Brennpunkt und Scheiteltangente gegebene Parabel eine Tangente zu ziehen.

Ist F (Taf. XXVIII, Fig. 186) der Brennpunkt, T die Scheiteltangente der Parabel und g die gegebene Gerade, so hat man, der oben angeführten Eigenschaft gemäß, auf g eine Senkrechte λ aus dem Brennpunkte zu fällen, den Schnittpunkt a mit der Scheiteltangente T zu bestimmen und durch denselben die verlangte Tangente t parallel zu g zu führen.

Der Berührungspunkt p dieser Tangente wird bestimmt, indem man auf λ eine der Strecke Fa gleiche Strecke von a aus, nach $a\pi$ aufträgt und die Gerade t mit der aus π auf die Scheiteltangente T

gefällten Senkrechten πp zum Schnitte bringt. Denn, nachdem $\pi m = AF$, ist π ein Punkt der Directrix D, und da $\pi p = pF$, wird durch p ein Punkt der Parabel bestimmt.

Diese Hilfsconstructionen werden genügen, um bei den nun folgenden Constructionsaufgaben, bezüglich des Rotationsparaboloides, mannigfache Vereinfachungen in der Durchführung zu ermöglichen.

Wir setzen diesfalls wieder voraus, dass die Rotationsachse auf der horizontalen Projectionsebene senkrecht stehe, oder dass, wenn diese nicht unmittelbar, als eine auf der einen oder anderen Projectionsebene senkrechte Gerade gegeben wäre, dieselbe durch entsprechende Transformation der Projectionsebenen in eine solche Lage gebracht worden sei. — Dort wo irgend eine andere Lage der Rotationsachse vorausgesetzt werden sollte, wird dieses ausdrücklich hervorgehoben werden. Die Hauptmeridianparabel sei immer durch den Brennpunkt und die Directrix gegeben. Um allfallsige Wiederholungen im Texte zu vermeiden, nehmen wir nunmehr ein für allemal an, dass auch die Scheiteltangente der Hauptmeridianparabel constructiv bestimmt vorliege.

Selbstverständlich wird die Directrix der Meridianparabel gleichzeitig auch die Verticaltrace der zur horizontalen Projectionsebene parallelen Directrixebene des Paraboloides darstellen, und ebenso wird die Scheiteltangente gleichzeitig die Verticaltrace der zur horizontalen Projectionsebene parallelen Scheiteltangentialebene des Paraboloides repräsentieren.

Weiters stellt die Hauptmeridianparabel die verticale Contour der Fläche dar; eine horizontale Contour des Paraboloides existiert im Grunde genommen nicht, da es keine zur Rotationsachse parallelen Tangenten des Paraboloides gibt.

§. 582.

210. Aufgabe. **Die verticale Projection eines Punktes auf dem Rotationsparaboloide ist gegeben; es ist dessen horizontale Projection constructiv zu bestimmen.**

Die Rotationsachse sei (Z, Z') (Taf. XXVIII, Fig. 187); F stelle den Brennpunkt, D die Directrix der Hauptmeridianparabel und a die gegebene Verticalprojection eines Punktes der Fläche dar.

Die durch a zur Grundlinie parallel geführte Gerade e_v kann als die Verticaltrace einer zur horizontalen Projectionsebene parallelen, also zur Rotationsachse senkrechten Ebene aufgefasst werden. Die besagte Ebene e_v wird das Paraboloid in einem Parallelkreise (π, π')

schneiden, welcher nothwendig auch den zu bestimmenden, der Fläche angehörenden Punkt (a, a') enthalten muss. Der Durchmesser dieses Parallelkreises erscheint in seiner wahren Größe als jene Sehne des Hauptmeridians, welche von der Geraden e_v gebildet wird.

Wir haben demnach vorerst (nach Aufgabe 206) die Schnittpunkte α und β der Hauptmeridianparabel mit der Geraden e_v zu bestimmen, um in $\alpha\beta$ den Durchmesser des genannten Parallelkreises (π, π') zu erhalten. Die Horizontalprojection dieses Parallelkreises ist ein Kreis π' mit Z' als Mittelpunkt und $\frac{1}{2}\alpha\beta$ als Radius.

Die Horizontalprojection a' des durch seine Verticalprojection a gegebenen Flächenpunktes (a, a') liegt auf dem Kreise π' und kann offenbar jeder der beiden Punkte a' und a'_1, in welchem die durch a zur Grundlinie X senkrecht gezogene Gerade den Kreis π' trifft, als die Horizontalprojection des genannten Flächenpunktes betrachtet werden.

§. 583.

211. Aufgabe. Aus der gegebenen Horizontalprojection eines Punktes des Rotationsparaboloides ist dessen Verticalprojection abzuleiten.

Ist b' (Taf. XXVIII, Fig. 187) die gegebene Horizontalprojection des Punktes, so beschreiben wir aus dem Mittelpunkte Z' einen durch b' gehenden Kreis φ', um hiedurch sofort die Horizontalprojection des durch den Punkt (b, b') gehenden Parallelkreises des Rotationsparaboloides dargestellt zu erhalten.

Betrachten wir einen der beiden Schnittpunkte dieses Parallelkreises φ' mit der Hauptmeridianebene η_h, etwa den Punkt b'_0. Dieser Punkt stellt die Horizontalprojection desjenigen Punktes (b, b') des Parallelkreises (φ, φ') dar, welcher gleichzeitig auch der Hauptmeridianparabel angehört.

Die verticale Projection b_0 dieses Punktes ist daher der Schnittpunkt der Meridianparabel mit der durch b'_0 senkrecht zur Grundlinie gezogenen Geraden, und kann nun einfach, wie folgt, bestimmt werden. Man verbindet den Schnittpunkt β der zur Grundlinie senkrechten Geraden und der Directrix D mit dem Brennpunkte F, zieht im Halbierungspunkte n der Strecke βF eine Senkrechte σ zu derselben und erhält im Schnitte von σ mit $b'_0\beta$ bereits den obverlangten Punkt b_0; denn $b_0\beta = b_0 F$, und somit b_0 ein Punkt der Meridianparabel.

Die durch b_0 parallel zur Grundlinie gezogene Gerade repräsentiert sodann die Verticalprojection φ des Parallelkreises (φ, φ') und folglich ihr Schnitt mit der durch b' zur Grundlinie senkrecht geführten Geraden, die Verticalprojection b des gesuchten Flächenpunktes (b, b').

Dass in diesem Falle der gegebenen Horizontalprojection b', nicht wie im früheren Falle zwei Punkte der Fläche entsprechen, ist leicht erklärlich, wenn man berücksichtigt, dass die durch b' gehende horizontal-projicierende, also zur Drehachse parallele Gerade den unendlich fernen Punkt des Paraboloides enthält und mit dem letzteren daher nur noch einen einzigen im Endlichen liegenden Punkt gemein haben kann.

§. 584.

212. Aufgabe. **Es sind die Schnittpunkte einer Geraden mit einem Rotationsparaboloide unter der Voraussetzung zu bestimmen, dass die Gerade mit der Rotationsachse einen Punkt gemein hat.**

Die gegebene Gerade, welche die Rotationsachse (Z, Z') in dem Punkte (s, s') schneiden möge, sei (g, g') (Taf. XXVIII, Fig. 188).

Die durch die Gerade (g, g') gelegte horizontal-projicierende Ebene P_h ist auf Grund der gegebenen Bestimmungsstücke im vorliegenden Falle eine Meridianebene des Paraboloides. Die gestellte Aufgabe reduciert sich somit auf jene: die Schnittpunkte der Geraden (g, g') mit der in der Ebene P_v liegenden Meridianparabel zu construieren.

Um diese Construction einfach zu bewerkstelligen, drehen wir die Ebene $P_h P_v$ um die Rotationsachse (Z, Z') in die zur verticalen Projectionsebene parallele Lage. Hiedurch erreichen wir, dass der in der Ebene P_h liegende Meridian nach vollbrachter Drehung mit dem Hauptmeridiane zusammenfällt und die Gerade g in die Lage g_0 gelangt. Die Schnittpunkte von g_0 mit der Hauptmeridianparabel werden offenbar die gedrehten Schnittpunkte der Geraden (g, g') darstellen.

Bestimmen wir nun die gemeinsamen Punkte p^0_1 und p^0_2 der Geraden g_0 mit dem Hauptmeridiane, durch Zuhilfenahme der in Aufgabe 206) gegebenen Methode, und führen wir dieselben durch Drehung um (Z, Z') in die Ebene P_h nach (p_1, p'_1) und (p_2, p'_2) zurück, so stellen bereits (p_1, p'_1) und (p_2, p'_2) die gesuchten Schnittpunkte dar.

§. 585.

213. Aufgabe. **Es ist der Schnitt einer Ebene $E_v E_h$ mit einem Rotationsparaboloide direct durch die Achsen der Schnittfigur darzustellen.**

Vor allem construieren wir die zu dieser Ebene $E_v E_h$ (Taf. XXVIII, Fig. 189) senkrechte Meridianebene $P_v P_h$. Diese letztere ist für das Paraboloid sowohl, als auch für die schneidende Ebene E eine Symmetrieebene, und wird mithin das Gleiche auch für die zu suchende Schnittcurve beider sein müssen.

Die Schnittgerade (s, s') der Ebene $E_v E_h$ mit der Meridianebene $P_v P_h$ wird folglich eine Achse des gesuchten Kegelschnittes darstellen.

Die Endpunkte (a, a') und (b, b') dieser Achse sind demnach die Schnittpunkte von (s, s') mit dem Paraboloide, und können, wie in der vorhergehenden Aufgabe vermittelst der Drehung der Meridianebene $P_v P_h$ um (Z, Z') in die zur verticalen Projectionsebene parallele Lage bestimmt werden.

Die zweite Achse dieses Kegelschnittes ist jene Gerade $(\varepsilon, \varepsilon')$, welche durch den Mittelpunkt (o, o') von $(ab, a'b')$ senkrecht zu der Achse (s, s'), daher parallel zur Trace E_h gezogen wird.

Es handelt sich somit bloß um die Bestimmung der Endpunkte (c, c') und (d, d') dieser Achse. Durch den Satz 343) wurde festgestellt, dass die horizontale Projection jedes ebenen Schnittes des Rotationsparaboloides ein Kreis sei (da wir die Rotationsachse horizontal-projicierend voraussetzen). Es muss daher die horizontale Projection $a'b'$ der vorher gefundenen Achse (s, s') einen Durchmesser dieses Kreises darstellen, oder mit anderen Worten: die horizontale Projection des zu bestimmenden Schnittes ist der über $a'b'$ als Durchmesser beschriebene Kreis K'. Dieser bestimmt aber sofort auch auf der zweiten Achse $(\varepsilon, \varepsilon')$ die Endpunkte (c, c') und (d, d'), womit den Bedingungen der gestellten Aufgabe entsprochen ist.

Diese höchst einfache Bestimmung der Horizontalprojection eines ebenen Schnittes des Rotationsparaboloides „als Kreis" findet auch ihre Verwendung bei der Lösung nachstehender Probleme.

§. 586.

214. Aufgabe. Es sind die Schnittpunkte eines Rotationsparaboloides mit einer beliebig gegebenen Geraden zu bestimmen.

Die gegebene Gerade sei (g, g') (Taf. XXVIII, Fig. 190). Denken wir uns durch (g, g') eine vertical-projicierende Ebene P_v gelegt, und den Schnitt derselben mit dem Paraboloide bestimmt.

Die eine Achse des Schnittes ist, wie wir in der vorhergegangenen Aufgabe gezeigt haben, die Schnittgerade der schneidenden Ebene mit der zu ihr senkrechten Meridianebene (im vorliegenden Falle mit der Hauptmeridianebene η_h), ist also eine Gerade, deren Verticalprojection durch g dargestellt wird, während deren Horizontalprojection g'_1 mit Trace η_h der Hauptmeridianebene zusammenfällt.

Die Endpunkte (m, m'), (n, n') dieser Achse werden, als Schnittpunkte der Geraden g mit dem Hauptmeridiane (F, D), in voller Über-

einstimmung mit der in Aufgabe 206) besprochenen diesbezüglichen Lösung bestimmt.

Die horizontale Projection des betreffenden ebenen Schnittes ist demnach der über $m'n'$ als Durchmesser beschriebene Kreis K'. Der letztgenannte Kreis K' trifft die Gerade g' in zwei Punkten a' und b', welche, wie an und für sich einleuchtend, bereits die Horizontalprojectionen der verlangten Schnittpunkte darstellen. Die Verticalprojectionen derselben ergeben sich sofort in der Geraden g als die Punkte a und b.

§. 587.

215. Aufgabe. In einem gegebenen Punkte eines Rotationsparaboloides ist die Tangentialebene an das letztere zu construieren.

Die verticale Projection des gegebenen Berührungspunktes sei a (Taf. XXVIII, Fig. 191). Denken wir uns denselben um die Rotationsachse (Z, Z') so lange gedreht, bis er in die Hauptmeridianebene η_h fällt. In dieser gedrehten Lage ist dessen verticale Projection a_0 der Schnittpunkt des Hauptmeridians mit der durch a parallel zur Grundlinie gezogenen Geraden $a a_0$, wobei a_0 nach der in Aufgabe 206) angegebenen Methode ermittelt wurde. Die Horizontalprojection a'_0 von a_0 liegt demgemäß auf der Horizontaltrace η_h der Hauptmeridianebene. Auf dem durch a'_0 gehenden Kreise π' ergibt sich sodann die zugehörige Horizontalprojection a' von a als der Flächenpunkt (a, a').

Denken wir uns ferner durch (a, a') die Meridianebene $P_v P_h$ gelegt, so wird die zu bestimmende Berührebene (Satz 306) auf derselben senkrecht stehen. Die letztere wird nunmehr, sobald man die Meridiantangente im Punkte (a, a') kennt, leicht construiert werden können. Nachdem bereits gezeigt wurde, dass sämmtliche Meridiantangenten in den Punkten eines und desselben Parallelkreises die Rotationsachse in dem nämlichen Punkte treffen (Satz 305), so bestimmen wir einfach die Tangente t_0 des Hauptmeridians im Punkte a_0 (auf elementare Weise durch Halbierung jenes Winkels $F a_0 \alpha$, welchen der Radiusvector $F a_0$ mit der durch a_0 zur Directrix D normalen Geraden $a_0 \alpha$ einschließt), und suchen deren Schnittpunkt M mit der Rotationsachse (Z, Z').

Durch diesen letzterhaltenen Punkt wird offenbar die Meridiantangente t des Punktes a gehen. Nachdem weiters die Horizontalprojection t' dieser Meridiantangente mit der Horizontaltrace P_h der entsprechenden Meridianebene $P_v P_h$ zusammenfällt, so hat man bloß durch (t, t') die zu $P_v P_h$ normale Ebene $T_v T_h$ zu construieren, um die geforderte Berührebene T dargestellt zu erhalten.

§. 588.

216. Aufgabe. Parallel zu einer gegebenen Ebene $E_v E_b$ ist an ein Rotationsparaboloid eine Berührebene $T_v T_h$ zu legen.

Da die Meridianebene des Berührungspunktes irgend einer Tangentialebene (Satz 306) auf dieser letzteren, also auch auf jeder zur Tangentialebene parallelen Ebene senkrecht steht, so ergibt sich im vorliegenden Falle die besagte Meridianebene als die zu $E_v E_h$ (Taf. XXVIII, Fig. 192) senkrechte Ebene $P_v P_h$.

Auf dem in dieser Ebene $P_v P_h$ liegenden Meridiane muss sich offenbar auch der Berührungspunkt der zu bestimmenden Tangentialebene vorfinden.

Nachdem ferner die Tangente des Meridians im Berührungspunkte der zu suchenden Tangentialebene die Schnittgerade der letzteren mit der Meridianebene $P_v P_h$ ist, so muss diese Tangente auch zu der Schnittgeraden (s, s') der Ebene $E_v E_h$ mit der Meridianebene $P_v P_h$ parallel sein.

Hiernach besteht die nunmehr zu lösende Aufgabe darin: „an die in der Meridianebene $P_v P_h$ gelegene Meridianparabel, parallel zu der Geraden (s, s'), eine Tangente zu ziehen."

Letzteres bewerkstelligen wir folgendermaßen. Wir drehen die Meridianebene $P_v P_h$ sammt der Geraden (s, s') um die Achse (Z, Z') in die zur verticalen Projectionsebene parallele Lage. Nach vollführter Drehung coincidiert der betreffende Meridian mit dem Hauptmeridiane, während die Gerade s in die Lage s_0 gelangt.

Bestimmen wir nun nach der in Aufgabe 208) gegebenen Construction die zu s_0 parallele Tangente t_0 der Hauptmeridianparabel, sowie auch deren Berührungspunkt p_0. Drehen wir hierauf die beiden eben genannten Stücke in die Ebene $P_v P_h$ zurück, so erhalten wir daselbst die zu (s, s') parallele Meridiantangente (t, t') und deren Berührungspunkt (p, p'). Legen wir endlich durch (t, t') die zur Ebene $P_v P_h$ senkrechte Ebene $T_v T_h$, so stellt diese die gesuchte, zur gegebenen Ebene $E_v E_h$ parallele Tangentialebene, und der Punkt (p, p') deren Berührungspunkt dar.

Nachdem an eine Parabel parallel zu einer Geraden nur eine Tangente gezogen werden kann, so besitzt das Rotationsparaboloid auch nur eine einzige zu einer gegebenen Ebene parallele Tangentialebene.

§. 589.

217. Aufgabe. An ein Rotationsparaboloid sind durch eine gegebene Gerade die möglichen Tangentialebenen zu legen.

Die gegebene Gerade sei (g, g') (Taf. XXIX, Fig. 193). Um die durch diese Gerade gehenden Berührebenen der vorliegenden Rotationsfläche in möglichster Einfachheit construieren zu können, wollen wir noch nachstehende Betrachtung vorausschicken.

Es wurde nachgewiesen, dass, wenn man vom Brennpunkte F eines Rotationsparaboloides auf eine beliebige Tangentialebene T ein Perpendikel fällt, der Fußpunkt desselben stets in der Scheiteltangentialebene T_A des Paraboloides liegen müsse.

Hiernach haben wir also durch die gegebene Gerade (g, g') eine Ebene T so zu legen, dass der Fußpunkt des von dem Brennpunkte F auf dieselbe gefällten Perpendikels in der Scheiteltangentialebene liege.

Diesbezüglich ist aus vorhergegangenen Erörterungen bekannt, dass wenn man von einem Punkte F aus, auf alle Ebenen eines Büschels g (g die Achse des Büschels) Perpendikel fällt, die Fußpunkte der letzteren auf jenem Kreise K liegen, welcher sich in der durch F zur Achse g senkrechten Ebene e befindet und die Linie F_s des senkrechten Abstandes des Punktes F von der Achse g zum Durchmesser hat.

Der besagte Kreis K wird im vorliegenden Falle die Scheiteltangentialebene T_A in zwei Punkten a_1 und a_2 schneiden, welche mit der Geraden g verbunden, Ebenen T_1 und T_2 liefern werden, die beziehungsweise auf $a_1 F$ und $a_2 F$ senkrecht stehen, also die gesuchten Tangentialebenen repräsentieren.

Führen wir also zunächst durch den Brennpunkt (F, F') eine Ebene $e_v e_h$ senkrecht zu der gegebenen Geraden (g, g') und suchen wir deren Durchstoßpunkt (s, s') mit der letzteren, sowie ferner die Schnittgerade (l, l') derselben mit der Scheiteltangentialebene T_A. Legen wir hierauf sowohl die Punkte (F, F') und (s, s'), als auch die Gerade (l, l') um die Horizontaltrace e_h in die horizontale Projectionsebene nach F_0 s_0 und l_0 um, beschreiben wir ferner über $F_0 s_0$ als Durchmesser den Kreis K_0, und führen wir schließlich dessen Schnittpunkte a^0_1 und a^0_2 mit der Geraden l_0 in die Projection nach (a_1, a'_1) und (a_2, a'_2) zurück, so werden die beiden Ebenen $T^1_v T^1_h$ und $T^2_v T^2_h$, welche durch die gegebene Gerade (g, g') und beziehungsweise durch je einen der Punkte (a_1, a'_1) und (a_2, a'_2) bestimmt sind, den vorhergehenden Betrachtungen zufolge, die gesuchten Berührebenen darstellen.

Die Berührungspunkte dieser Ebenen sind unschwer zu bestimmen. Tragen wir auf der zur Berührebene $T^1_v T^1_h$ senkrechten Geraden $(F a_1, F' a'_1)$ die Strecke $F a_1$ nach (π_1, π'_1) auf (was direct in der Projection geschehen kann), so gehört der Punkt (π_1, π'_1) offenbar der Directrixebene D an. Führen wir durch den so erhaltenen Punkt

(π_1, π'_1) eine Senkrechte zur Directrix (dieselbe wird eine horizontalprojicierende Gerade sein) und bestimmen wir den Schnittpunkt (p_1, p'_1) derselben mit der Ebene $T'_v T'_h$, so wird hiedurch ein Punkt dargestellt erscheinen, welcher von den beiden, gegen die Ebene T_1 symmetrisch gelegenen Punkten F_1 und π_1 den gleichen Abstand hat und, nachdem $p_1 \pi_1$ auf der Directrixebene D senkrecht steht, auch den gleichen Abstand von der letzteren und dem Brennpunkte F besitzt.

Der Punkt (p_1, p'_1), dessen Horizontalprojection offenbar mit π'_1 zusammenfällt, ist daher der in der Berührebene T_1 liegende Punkt des Rotationsparaboloides und kann folglich nur der gemeinsame Berührungspunkt beider sein.

Vereinfachte Construction der vorhergehenden Aufgabe.

Das Umlegen der Punkte F, s und der Geraden l in die Projectionsebene kann anstandslos umgangen werden.

Durch die gestellten Bedingungen wird nämlich verlangt, dass durch die Gerade (g, g') eine Ebene $T'_v T'_h$ derart gelegt werde, dass der Fußpunkt (a_1, a'_1) des von dem Brennpunkt (F, F') auf diese Ebene $T'_v T'_h$ gefällten Perpendikels in der Scheiteltangentialebene T_A liege. Bezüglich dieses Fußpunktes (a_1, a'_1) fanden wir, dass derselbe nothwendig in der Geraden (l, l') liegen müsse, in welcher die Scheiteltangentialebene T_A von der durch den Brennpunkt (F, F') senkrecht zur Geraden (g, g') gelegten Ebene $(e_v e_h)$ geschnitten wird.

Nun muss aber die gesuchte Ebene $T'_v T'_h$ die Scheiteltangentialebene T_A in einer Geraden schneiden, welche einerseits durch den Durchstoßpunkt $(\varDelta, \varDelta')$ der letzteren Ebene mit der Geraden (g, g'), andererseits aber auch durch den fraglichen Punkt (a_1, a'_1) geht.

Weiters muss die so erhaltene Gerade $(\varDelta a_1, \varDelta' a'_1)$, als Schnitt der Ebene T_1 mit der horizontal liegenden Scheiteltangentialebene T_A parallel zur Horizontaltrace T'_h sein.

Nachdem aber die Ebene T_1 senkrecht auf der Geraden $(F a_1, F' a'_1)$ steht, ihre Horizontaltrace T'_h also und mithin auch die Horizontalprojection $\varDelta' a'_1$ auf der Horizontalprojection $F' a'_1$ des Perpendikels $(F a_1, F' a'_1)$ senkrecht stehen soll, so folgt unmittelbar, dass sich die horizontalen Projectionen a'_1 und a'_2 der fraglichen Punkte als Schnittpunkte der Geraden l' mit dem über $\varDelta' F'$ als Durchmesser beschriebenen Kreise γ' ergeben müssen.

Die Verticalprojectionen a_1 und a_2 können nun sofort aus a'_1 und a'_2 abgeleitet und in der Verticalprojection l bestimmt werden.

Die weiteren Constructionen sind in Übereinstimmung mit jenen in der vorhergegangenen Lösungsweise besprochenen durchzuführen.

§. 590.

218. Aufgabe. Es ist die Berührungscurve des Rotationsparaboloides mit einem demselben, aus einem Punkte außerhalb umschriebenen Kegel zu construieren.

Der gegebene Kegelscheitel sei (P, P') (Taf. XXIX, Fig. 194). Die durch (P, P') gelegte Meridianebene $P_v P_h$ ist, nachdem sie das Paraboloid symmetrisch theilt, auch eine Symmetrieebene für den Kegel sowohl, als auch für dessen Berührungscurve.

Hieraus folgt aber unmittelbar, dass die Ebene der Berührungscurve auf der Meridianebene $P_v P_h$ senkrecht steht und dieselbe in einer Achse der Berührungscurve schneiden müsse. Die Endpunkte dieser Achse können offenbar nur die in der Meridianebene $P_v P_h$ liegenden Punkte der Berührungscurve, d. i. die Berührungspunkte der von (P, P') aus an die in dieser Meridianebene liegende Meridianparabel gezogenen Tangenten sein.

Diese Berührungspunkte construieren wir wie folgt. Wir drehen die Meridianebene $P_v P_h$ um die Achse (Z, Z') in die zur verticalen Projectionsebene parallele Lage, wobei der Meridian derselben zur Coincidenz mit dem Hauptmeridiane und der Punkt P nach P_0 gelangt.

Von P_0 aus führen wir an die Hauptmeridianparabel die Tangenten t'_0 und t^2_0 und bestimmen deren Berührungspunkte a_0 und b_0 auf die in Aufgabe 207) besprochene Weise. Dreht man diese Punkte a_0 und b_0 in die Ebene $P_v P_h$ nach (a, a') und (b, b') zurück, so repräsentieren die letzterhaltenen Punkte bereits die Berührungspunkte der von (P, P') aus an den in $P_v P_h$ liegenden Meridian gezogenen Tangenten, und daher, wie früher gezeigt wurde, deren Verbindungsgerade $(ab, a'b')$ eine Achse der Berührungscurve.

Die Ebene der Berührungscurve $B_v B_h$ ist sodann diejenige, welche durch die Gerade $(ab, a'b')$ senkrecht zu der Meridianebene $P_v P_h$ gelegt wird.

Die horizontale Projection der Berührungscurve ist, wie wir bereits bei Lösung der Aufgabe 212) gefunden haben, der über $a'b'$ als Durchmesser beschriebene Kreis K', vermittelst dessen ohne jedwede Schwierigkeit die zweite Achse derselben bestimmt werden kann.

Die vorstehende Aufgabe, beziehungsweise deren eben durchgeführte graphische Lösung schließt alle möglichen Fälle der unbe-

stimmten Aufgabe: „durch einen Punkt (P, P') außerhalb an ein Rotationsparaboloid eine Berührebene zu legen", in sich, indem jeder Punkt der eben construierten Berührungscurve den Berührungspunkt einer Ebene, die durch den gegebenen Punkt (P, P') geht, darstellt.

§. 591.

219. Aufgabe. Es ist der Schnitt eines, einem Rotationsparaboloide umschriebenen Kegels mit der horizontalen Projectionsebene zu bestimmen.

Oder mit anderen Worten:

Es ist der Schlagschatten eines Rotationsparaboloides auf die horizontale Projectionsebene bei centraler Beleuchtung zu construieren.

Der Scheitel des dem Paraboloide umschriebenen Kegels sei (P, P') (Taf. XXIX, Fig. 195).

Bestimmen wir zwei Punkte jenes Kegelschnittes, welcher sich als Schnitt des dem Paraboloide umschriebenen Kegels mit der horizontalen Projectionsebene ergibt, und wählen diesbezüglich der Einfachheit wegen die Horizontaldurchstoßpunkte derjenigen Kegelerzeugenden, welche in der durch den Punkt (P, P') gehenden Meridianebene $P_v P_h$ liegen, d. h. die horizontalen Durchstoßpunkte der von dem Kegelscheitel (P, P') an den in der Ebene $P_v P_h$ liegenden Meridian gezogenen Tangenten.

Dreht man sodann die Meridianebene $P_v P_h$ mit dem Kegelscheitel (P, P') um (Z, Z') in die zur verticalen Projectionsebene parallele Lage, wobei P nach P_0 gelangt, so stellen sich die vorgenannten Meridiantangenten als die Tangenten t^0_1 und t^0_2 von P_0 aus an die Hauptmeridianparabel dar. Dieselben können nach der in Aufgabe 207) angegebenen Methode construiert werden. Führt man deren horizontale Durchstoßpunkte (a_0, a'_0) und (b_0, b'_0) in die Ebene $P_v P_h$ nach (a, a') und (b, b') zurück, so erhält man die beiden verlangten Punkte des zu bestimmenden Kegelschnittes.

Bestimmt man ferner die Horizontalspur (f_1, f'_1) jener Geraden, welche den Kegelscheitel (P, P') mit dem Scheitel (A, A') des Rotationsparaboloides verbindet, so wird (nach Satz 345), der so erhaltene Punkt f'_1 den einen, und die horizontale Projection $P' = f'_2$ den zweiten Brennpunkt des gesuchten Kegelschnittes darstellen.

Berücksichtigt man endlich noch, dass die Gerade $(PA, P'A')$ sowohl, als auch die durch den Kegelscheitel gehende horizontal-pro-

jicierende Gerade in der Meridianebene $P_v P_h$ liegen, die vier Punkte f'_1, f'_2, a' und b' also in die nämliche Gerade P_h fallen, so folgt unmittelbar, dass a' und b' gleichzeitig die Endpunkte der einen Achse des gesuchten Kegelschnittes darstellen. Die andere Achse $c'd'$ kann mittelst der Brennpunkte f'_1 und f'_2 leicht abgeleitet werden.

§. 592.

220. Aufgabe. **Die Berührungscurve eines dem Rotationsparaboloide umschriebenen Cylinders ist zu construieren.**

Da die Berührungscurve einer Fläche zweiten Grades mit einem derselben umschriebenen Cylinder jedesmal ein Diametralschnitt ist, beim Paraboloide aber die sämmtlichen Diametralebenen zur Rotationsachse parallel sind, so gelangen wir folgerichtig zu dem Schlusse, dass die Ebene der Berührungscurve diesfalls eine horizontal-projicierende sein werde, und dass weiters die Berührungscurve, als Schnitt dieser Ebene mit dem Paraboloide, nothwendig eine Parabel sein müsse, deren Achse zu der Rotationsachse parallel ist.

Die Richtung der Erzeugenden des umschriebenen Cylinders sei durch (g, g') (Taf. XXIX, Fig. 196) dargestellt. Wir wählen diese Gerade gleich von vornherein derart, dass sie einen Punkt (s, s') mit der Rotationsachse gemein hat.

Legen wir durch die Gerade (g, g') die Meridianebene $P_v P_h$, so wird dieselbe, nachdem sie einerseits zu den Cylindererzeugenden parallel ist und andererseits eine Symmetrieebene des Paraboloides darstellt, auch eine Symmetrieebene für den umschriebenen Cylinder sowohl, als auch für dessen Berührungscurve repräsentieren. Hieraus folgt unmittelbar, dass die Ebene der Berührungscurve auf der Meridianebene $P_v P_h$ senkrecht stehe, und dass deren Schnitt mit dieser Ebene die Achse der Berührungsparabel darstelle.

Nachdem aber die Ebene der Berührungscurve auch auf der horizontalen Projectionsebene senkrecht steht, so wird dieselbe insbesondere eine horizontal-projicierende Ebene sein müssen, deren Horizontaltrace B_h zu der Horizontaltrace P_h der genannten Meridianebene senkrecht ist.

Behufs Bestimmung der besagten Ebene wird daher die Kenntnis eines einzigen Punktes der Berührungscurve hinreichen. Als einen dieser Punkte kann man direct den Berührungspunkt der in der Meridianebene $P_v P_h$ liegenden Cylindererzeugenden, d. i. den Berührungspunkt jener Tangente betrachten, welche an den in der Ebene $P_v P_h$ liegenden Meridian, parallel zur Geraden (g, g'), gezogen werden

kann. Derselbe ergibt sich sogleich, wenn wir die Ebene $P_v P_h$ mit der in ihr liegenden Geraden (g, g'), durch Drehung um die Achse (Z, Z'), in eine zur Bildebene parallele Lage bringen, sodann parallel zu der gedrehten Geraden g_0 (nach Aufgabe 208) an die Hauptmeridianparabel die Tangente t_0 ziehen und deren Berührungspunkt p_0 in die Ebene $P_v P_h$ nach (p, p') zurückdrehen.

Legen wir durch den so erhaltenen Punkt (p, p') die horizontalprojicierende Ebene $B_v B_h$, deren Horizontaltrace B_h auf der Horizontaltrace P_h der Meridianebene $P_v P_h$ senkrecht steht, so stellt diese Ebene $B_v B_h$, den gepflogenen Erörterungen gemäß, die Ebene der Berührungscurve dar.

Die Berührungscurve selbst ist eine Parabel, deren Achse die Schnittgerade (x, x') der Ebenen $P_v P_h$ und $B_v B_h$ ist.

Nachdem der Punkt (p, p') der Berührungscurve auf der eben erwähnten Schnittgeraden liegt (wie auch schon aus dessen Construction zu entnehmen ist), so stellt derselbe gleichzeitig den Scheitel der B e r ü h r u n g s p a r a b e l dar.

Die letztere wird mithin vollständig bestimmt sein, wenn man noch einen ihrer Punkte kennt. Als solchen wollen wir den Schnittpunkt derselben mit der Hauptmeridianebene feststellen.

Die Ebene $B_v B_h$ der Berührungsparabel schneidet die Hauptmeridianebene η_h in der horizontal-projicierenden Geraden (σ, σ'). Bestimmen wir den Schnittpunkt (π, π') der letztgenannten Geraden mit dem Hauptmeridiane, indem wir in dem Mittelpunkte μ der Strecke $F\Delta$ (Δ ist der Schnittpunkt der oberwähnten Geraden σ mit der Directrix D der Hauptmeridianparabel) eine Senkrechte t auf $F\Delta$ fällen und diese mit σ in dem gesuchten Punkte (π, π') zum Schnitte bringen.

Selbstverständlich repräsentiert dieser Punkt (π, π') den der Berührungsparabel und der Hauptmeridianparabel gemeinschaftlichen Punkt. Die vorgenannte Gerade $\pi\mu$ ist somit die Tangente des Hauptmeridians in dem genannten Punkte π, also gleichzeitig auch die Verticaltrace der vertical-projicierenden Berührungsebene des Paraboloides im Punkte (π, π').

Es ist somit auch klar gelegt, dass die Schnittgerade dieser Berührebene mit der Ebene $B_v B_h$, d. i. jene Gerade, deren Verticalprojection $\pi\mu$ und deren horizontale Projection B_h ist, die Tangente der Berührungsparabel in dem Punkte (π, π') darstelle.

Mit Zuhilfenahme dieser Tangente lassen sich nun auch anstandslos die Projectionen des Brennpunktes der Berührungsparabel construieren.

Ziehen wir zu diesem Zwecke die Scheiteltangente der Parabel, d. i. die durch (p, p') gehende horizontale Gerade (τ, τ') in der Ebene $B_v B_h$ und berücksichtigen wir hierbei, dass, wenn man von dem Schnittpunkte (α, α') derselben mit der Parabeltangente $(\pi \mu, B_h)$ eine Senkrechte auf die letztere (selbstverständlich in der Ebene $B_v B_h$) führt, diese die Achse (x, x') in dem Brennpunkte (f, f') trifft, so hat man offenbar bloß den Schnitt der Achse (x, x') mit der durch den Punkt (α, α') gehenden, zur Geraden $(\pi \mu, B_h)$ senkrechten Ebene $\varepsilon_v \varepsilon_h$ zu bestimmen, um dadurch gleichzeitig auch den gesuchten Brennpunkt (f, f') zu erhalten.

Die Berührungsparabel ist somit durch ihre Hauptstücke, d. i. durch die Achse (x, x'), den Scheitel (p, p') und den Brennpunkt (f, f') dargestellt, womit das gestellte Problem gelöst erscheint.

§. 593.

221. Aufgabe. Es ist der Schnitt eines dem Rotationsparaboloide umschriebenen Cylinders mit der horizontalen Projectionsebene zu bestimmen.

Oder was dasselbe aussagt:

Es ist für parallele Beleuchtung der Schlagschatten eines Rotationsparaboloides auf die horizontale Projectionsebene zu ermitteln.

Die Richtung der Cylindererzeugenden sei (g, g') (Taf. XXIX, Fig. 197). Der dem Rotationsparaboloide parallel zur Geraden (g, g') umschriebene Cylinder berührt dasselbe, wie in der vorhergehenden Aufgabe gefunden wurde, längs einer Parabel. Der besagte Cylinder ist mithin ein parabolischer; der gesuchte Schnitt desselben mit der horizontalen Projectionsebene wird daher eine Parabel sein.

Die zur Geraden (g, g') parallele Meridianebene $P_v P_h$ ist eine Symmetrieebene des Paraboloides, folglich auch eine Symmetrieebene des parallel zu (g, g') umschriebenen Cylinders. Da dieselbe aber überdies zur horizontalen Projectionsebene senkrecht steht, so ist ihre horizontale Trace P_h gleichzeitig eine Symmetriegerade für den Schnitt des Cylinders und wird somit als solche die Achse der gesuchten Parabel repräsentieren.

Weiters wird es sich noch um die Feststellung des Scheitels und des Brennpunktes dieser Parabel auf P_h handeln. Der Brennpunkt ist, wie aus Satz 345) folgt, der horizontale Durchstoßpunkt f' der durch den Scheitel (A, A') des Paraboloides parallel zu (g, g') gezogenen Geraden.

Der Scheitel a' hingegen wird offenbar durch den horizontalen Durchstoßpunkt der in der Ebene $P_v P_h$ liegenden Cylindererzeugenden, d. h. durch den horizontalen Durchstoßpunkt der zu (g, g') parallelen Tangente des in der Ebene $P_v P_h$ liegenden Meridians dargestellt. Der besagte Durchstoßpunkt a' kann unmittelbar durch Drehung der Ebene $P_v P_h$ um die Achse (Z, Z') in die zur verticalen Projectionsebene parallele Lage erhalten werden.

Die gesuchte Horizontaltrace des umschriebenen Cylinders ist demnach eine Parabel, welche durch ihre Achse, durch ihren Scheitel a' und ihren Brennpunkt f' vollkommen bestimmt ist und daher aus diesen Bestimmungsstücken anstandslos construiert werden kann.

Die eben entwickelte Construction bietet zugleich ein Mittel, ein bereits besprochenes Problem einer einfacheren Lösung zuzuführen.

§. 594.

222. Aufgabe. Durch eine gegebene Gerade (g, g') sind an ein Rotationsparaboloid die möglichen Tangentialebenen zu legen und deren Berührungspunkte zu construieren.

Wie in der vorhergehenden Aufgabe bestimmen wir auch diesfalls zunächst den Scheitel a' und den Brennpunkt f' jener Parabel, in welcher der dem Paraboloide parallel zur Geraden (g, g') (Taf. XXIX, Fig. 197) umschriebene Cylinder die horizontale Projectionsebene schneidet.

Auf Grund vorausgeschickter Erörterungen ist bekannt, dass jede Berührebene des umschriebenen Cylinders auch das Rotationsparaboloid in einem Punkte berührt, welcher der Berührungscurve des ersteren angehört. Die verlangten Berührebenen werden daher gleichzeitig auch die durch die Gerade (g, g') an den umschriebenen Cylinder gelegten Tangentialebenen darstellen und ihre Horizontaltracen mithin diejenigen Tangenten T^1_h und T^2_h sein, welche durch den horizontalen Durchstoßpunkt δ' der Geraden (g, g') an die Parabel (a', f') gezogen werden können.

Die besagten Tangenten T^1_h und T^2_h, sowie ihre Berührungspunkte π'_1 und π'_2 mit der Parabel bestimmen wir einfach mit Zugrundelegung der Aufgabe 208). Da die zu bestimmenden Berührebenen durch die Gerade (g, g') gehen sollen, so sind nunmehr auch deren Verticaltracen T^1_v und T^2_v leicht zu construieren.

Es erübrigt noch die Berührungspunkte dieser Ebenen mit dem Paraboloide zu ermitteln. Dies vollführen wir in nachstehender Weise.

Zieht man durch den Punkt (π, π'), in welchem die Parabel (a', f') von T^1_h berührt wird, die Gerade (g_1, g'_1) parallel zu den Cy-

lindererzeugenden, d. i. parallel zu (g, g'), so stellt diese Gerade jene Cylindererzeugende dar, längs welcher die Ebene $T^1_v T^1_h$ den Cylinder berührt. Auf dieser Geraden muss offenbar auch der Berührungspunkt der Ebene $T^1_v T^1_h$ mit dem Paraboloide liegen. Der bezeichnete Berührungspunkt ist nämlich einerseits der Schnittpunkt von (g_1, g'_1) mit der Berührungscurve des Cylinders. Da aber andererseits der gesuchte Berührungspunkt auch in der zur Ebene $T^1_v T^1_h$ senkrechten Meridianebene $P^1_v P^1_h$ liegt, so wird derselbe durch den Schnittpunkt (p_1, p'_1) der letzteren mit der Geraden (g_1, g'_1) dargestellt und bestimmt erscheinen. Das Gleiche gilt in Bezug auf die Ebene $T^2_v T^2_h$.

§. 595.

223. Aufgabe. **Es sind die Contouren eines Rotationsparaboloides unter der Voraussetzung zu construieren, dass die Rotationsachse sowohl gegen die verticale, als auch gegen die horizontale Projectionsebene geneigt ist; das Paraboloid ist durch die Projectionen seines Scheitels und seines Brennpunktes gegeben.**

Die Projectionen der Rotationsachse seien durch (Z, Z') (Tafel XXIX, Fig. 198) dargestellt; auf denselben ist der Scheitel (A, A') und der Brennpunkt (F, F') des Rotationsparaboloides gegeben.

Construieren wir die Scheiteltangentialebene des Paraboloides, d. i. die Ebene $T^a_v T^a_h$, welche durch (A, A') senkrecht zur Achse (Z, Z') geführt wird; legen wir ferner durch den Brennpunkt (F, F') eine Ebene ε_v parallel zur horizontalen Projectionsebene, so wird die letztere die Scheiteltangentialebene $T^a_v T^a_h$ in einer Geraden (τ, τ') schneiden, welche zur horizontalen Trace T^a_h parallel ist. Die horizontale Projection τ' derselben ist mithin senkrecht auf der horizontalen Projection Z' der Rotationsachse.

Nehmen wir auf der Geraden (τ, τ') irgend einen beliebigen Punkt (m, m') an. Die Verbindungsgerade $(Fm, F'm')$ desselben mit dem Brennpunkte (F, F') ist, da beide Punkte in der horizontalen Ebene ε_v liegen, selbst horizontal. Legen wir weiters durch den Punkt (m, m') eine Ebene $T_h T_v$ senkrecht zu der Geraden $(Fm, F'm')$, so wird diese Ebene horizontal-projicierend sein, daher deren Horizontaltrace T_h durch m' gehen und auf $F'm'$ senkrecht stehen müssen.

Diese letzterhaltene Ebene ist aber (nach Satz 340), da der Punkt (m, m') der Scheiteltangentialebene $T^a_v T^a_h$ angehört, gleichzeitig eine Tangentialebene des Paraboloides. Es ist somit einleuchtend, dass die horizontale Trace T_h dieser Ebene eine Tangente der horizontalen Contour darstelle.

Lässt man nun den Punkt (m, m') die Gerade (τ, τ') durchlaufen, so ändert diese Contourtangente T_h ihren Ort derart, dass sie in jeder ihrer Lagen auf der zugehörigen Verbindungsgeraden des jeweiligen Punktes m', m'_1, m'_2, m'_3 . . . mit dem Punkte F' senkrecht steht, woraus aber unmittelbar folgt, dass die horizontale Contour des Paraboloides eine Parabel sei, deren Brennpunkt F' und deren Scheiteltangente τ' ist. In gleich einfacher Weise lässt sich die verticale Contour ermitteln und hiermit die gestellte Aufgabe graphisch durchführen.

§. 596.

224. Aufgabe. In freier schiefer Projection ist die Contour eines Rotationsparaboloides unter der Voraussetzung zu construieren, dass die Rotationsachse eine gegen die Bildebene geneigte Gerade ist. Das Paraboloid ist durch dessen Scheitel und Brennpunkt auf dieser Geraden gegeben.

Durch dv, (Z) (Taf. XXIX, Fig. 199) sei die gegebene Rotationsachse, durch A die Projection des Scheitels, durch F die Projection des Brennpunktes des Paraboloides, und durch $v \Delta_1 \Delta^0$ das Projectionsdreieck dargestellt.

Die Contour ist, wie bereits bekannt, der Schnitt der Bildebene mit dem schief-projicierenden, dem Rotationsparaboloide umschriebenen Cylinder. Es ist einleuchtend, dass besagte Contour gleichzeitig auch die schiefe Projection aller auf diesem Cylinder liegenden Curven, insbesondere aber auch aller seiner ebenen Schnitte repräsentieren wird.

Von der eben erwähnten Eigenschaft werden wir diesfalls in der Weise Gebrauch machen, dass wir einen gewissen, leicht zu construierenden ebenen Schnitt des Cylinders ermitteln und dessen schiefe Projection construieren.

Legen wir zu diesem Zwecke eine Ebene senkrecht zu der Rotationsachse Z_d^v, etwa die Ebene $S_b S_v$, welche durch den Fluchtpunkt v geht. Der Schnitt dieser Ebene mit dem schief-projicierenden, dem Paraboloide umschriebenen Cylinder ist eine Parabel, deren Brennpunkt (nach Satz 345) der Durchschnittspunkt der besagten Ebene $S_b S_v$ mit dem schief-projicierenden, durch den Scheitel A gehenden Strahle ist. Die schiefe Projection dieses Punktes fällt hiernach selbstverständlich mit der schiefen Projection A des Scheitels zusammen. Betrachten wir also A als die schiefe Projection eines Punktes in der Ebene $S_b S_v$, so ist dieser letztere gleichzeitig der Brennpunkt des fraglichen Schnittes.

Der Scheitel jener in der Ebene $S_b S_v$ liegenden Parabel dagegen ist der Schnittpunkt der Ebene $S_b S_v$ mit der in der schief-projicierenden Meridianebene (deren Trace dv ist) liegenden Cylindererzeugenden, das ist der Schnittpunkt der Ebene $S_b S_v$ mit jener zum schief-projicierenden Strahle parallelen Tangente, welche an denjenigen Meridian, welcher in der durch dv geführten, schief-projicierenden Ebene liegt, gezogen werden kann.

Die besagte Tangente und ihren Schnittpunkt mit der Bildebene bestimmen wir diesfalls, indem wir die obbezeichnete Ebene um ihre Trace dv in die Bildebene umlegen. Hierbei gelangt der Scheitel der Meridianparabel nach A_0 und der Brennpunkt nach F_0.

Führen wir auf bekannte Weise (Aufgabe 209) parallel zu dem umgelegten, schief-projicierenden Strahle vv_0 eine Tangente t_0 an die gleichfalls umgelegte Meridianparabel (A_0, F_0), so schneidet diese die Bildflächtrace der vorerwähnten schief-projicierenden Ebene dv in dem Punkte a, welcher bereits den Durchstoßpunkt der Bildebene mit der schief-projicierenden, in der projicierenden Meridianebene liegenden Meridiantangente repräsentiert.

Betrachtet man nunmehr wieder den Punkt a als die schiefe Projection eines in der Ebene $S_b S_v$ liegenden Punktes, so stellt dieser letztere den Scheitel der zu suchenden Schnittparabel dar.

Fassen wir die Resultate der durchgeführten Constructionen zusammen, so können wir kurz sagen: Die Ebene $S_b S_v$ schneidet den schief-projicierenden, dem Paraboloide umschriebenen Cylinder in einer Parabel, deren Scheitel und Brennpunkt durch ihre schiefen Projectionen a und A dargestellt sind.

Nun wird es sich weiter noch darum handeln, die schiefe Projection dieser Parabel, welche selbstverständlich wieder eine Parabel sein wird, durch den ihr zugehörigen Scheitel und den ihr entsprechenden Brennpunkt darzustellen.

Zu diesem Behufe legen wir die vorher bestimmte Schnittparabel (a, A) um S_b in die Bildebene um, wobei z nach z'_0, der Scheitel a nach a'_0 und der derselben zukommende, mit A zusammenfallende Brennpunkt nach $A'_0 = f$ gelangt, während vv^0_2 den Affinitätsstrahl repräsentiert.

Der umgelegten Scheiteltangente t^a_0 (durch a'_0 senkrecht zu $a'_0 A'_0$) entspricht als schiefe Projection die Gerade t_a, welche die Tangente der schiefen Projection Σ der Parabel im Punkte a repräsentiert.

Die Scheiteltangente der Parabel Σ kann auf folgende Weise construiert werden. Zunächst ist unschwer einzusehen, dass die Gerade aA ein Durchmesser der Parabel Σ sei. Die Achse von Σ wird zu dem besagten Durchmesser parallel und die gesuchte Scheiteltangente zu demselben senkrecht sein.

Ziehen wir daher an beliebiger Stelle x eine Senkrechte s zu aA und legen wir dieselbe, indem wir sie als eine Gerade der Ebene $S_b S_v$ betrachten, unter dieser letzteren Voraussetzung nach s'_0 um; führen wir ferner an die umgelegte Parabel $(a'_0 A'_0)$ eine zu s'_0 parallele Tangente τ'_0 und bestimmen wir auf die bereits mehrfach besprochene Weise deren Berührungspunkt π'_0. Die schiefe Projection τ dieser Tangente wird die zu aA senkrechte Scheiteltangente der Parabel Σ, die schiefe Projection π des Berührungspunktes π'_0 daher den Scheitel von Σ darstellen. Den früheren Betrachtungen zufolge ist somit die schiefe Projection Σ der Parabel durch den Scheitel π, die Scheiteltangente τ und die Tangente t_a vollkommen bestimmt und folglich auch die gesuchte Contour unzweideutig festgestellt.

Ein ganz übereinstimmender Vorgang kann auch dann beobachtet und behufs graphischer Durchführung gewählt werden, wenn es sich darum handeln sollte, die Contour eines Paraboloides mit gegen die Bildebene geneigter Achse in centraler Projection darzustellen.

Man wird nämlich den Schnitt des dem Paraboloide umschriebenen centralprojicierenden Kegels mit einer zur Rotationsachse senkrechten Ebene durch seine Brennpunkte und Scheitel bestimmen, und hierauf dessen Centralprojection aus der Umlegung ableiten.

Diese Centralprojection wird ebenso, wie im vorhergehenden Falle, die gesuchte Bildflächcontour des Paraboloides repräsentieren.

§. 597.

Bestimmungsarten des Rotationsparaboloides aus gegebenen Elementen.

225. Aufgabe. Ein Rotationsparaboloid ist durch die Rotationsachse Z der Lage nach, dem Scheitel A auf derselben und einem Punkte p gegeben; der Brennpunkt der Fläche ist zu bestimmen.

Die durch Z und p (Taf. XXIX, Fig. 200) gelegte Ebene schneidet das Paraboloid offenbar in einer Meridianparabel, welche durch p geht und welcher der Scheitel A und die Achse Z zukömmt. Behufs Bestimmung des Brennpunktes F dieser Parabel ziehen wir von p aus die Senkrechte pa zu Z und fixieren auf der letztgenannten

Achse den zu a in Bezug auf A symmetrischen Punkt α, indem wir $A\alpha = Aa$ machen. Nachdem nun A und der unendlich ferne Punkt von Z der Parabel angehören und Z eine Achse derselben ist, wird der Punkt α der Pol der Geraden ap in Bezug auf die Parabel sein und folglich $p\alpha$ die Tangente t der Parabel im Punkte p darstellen.

Fällen wir auf diese Tangente pa in dem Punkte π, in welchem sie die Scheiteltangente T trifft, eine Senkrechte, so schneidet die letztere die Achse Z in dem Brennpunkte F dieser Parabel, welcher gleichzeitig auch der Brennpunkt der Fläche ist.

§. 598.

226. Aufgabe. **Ein Rotationsparaboloid ist durch die Scheiteltangentialebene, durch den in ihr liegenden Scheitel und durch irgend eine Berührebene gegeben; es ist der Brennpunkt der Fläche zu bestimmen.**

Sei T_a die Scheiteltangentialebene, A der Scheitel und T die gegebene Berührebene.

Fällt man von A aus auf T_a eine Senkrechte Z, so repräsentiert diese die Achse des Rotationsparaboloides. Legt man weiters durch diese Achse Z eine Ebene P senkrecht zur Berührebene T, so wird die letztere in einer Geraden t und die Scheiteltangentialebene T_a in einer Geraden t_a geschnitten.

Das Paraboloid selbst wird von der Ebene P in einer Meridianparabel getroffen, welcher die Achse Z, der Scheitel A und die Scheiteltangente t_a entspricht, nebstbei aber von der Geraden t berührt wird. Fällt man daher wieder von dem Punkte π, in welchem sich t_a und t schneiden, eine Senkrechte auf t (natürlich in der Ebene P), so trifft diese bereits die Achse Z in dem zu bestimmenden Brennpunkte F.

§. 599.

227. Aufgabe. **Von einem Rotationsparaboloide ist die Rotationsachse der Lage nach, ferner eine Tangente der Fläche und deren Berührungspunkt gegeben; der Scheitel und der Brennpunkt ist zu construieren.**

Die Rotationsachse sei Z, t sei die Tangente und p deren Berührungspunkt mit dem Rotationsparaboloide.

Die Berührebene T im Punkte p muss einerseits durch die Tangente t gehen und andererseits auf der Meridianebene P des Punktes p, d. i. auf jener Ebene P, welche durch Z und p geht, senkrecht

stehen. Besagte Ebene ist mithin vollständig bestimmt. Dieselbe wird von der Meridianebene P in der Tangente t_p geschnitten.

Die in der Meridianebene P liegende Meridianparabel ist sonach durch die Achse Z, die Tangente t_p und deren Berührungspunkt p (Taf. XXX, Fig. 201) bestimmt.

Die Gerade ap, welche man durch p senkrecht zur Achse Z führt, ist, in Bezug auf die Meridianparabel, die Polare jenes Punktes α, in welchem die Tangente t_p die Achse Z trifft. Es müssen demnach die Punkte α, a, der unendlich ferne Punkt von Z und der zu suchende Scheitel A vier harmonische Punkte sein; der Scheitel A ist demnach derjenige Punkt, welcher die Strecke αa halbiert.

Der Brennpunkt F kann nunmehr leicht gefunden werden. Es genügt nämlich, durch A die Scheiteltangente T zu ziehen und durch den Punkt π, in welchem dieselbe die Tangente t_p schneidet, auf die letztere eine Senkrechte zu führen, um im Schnitte mit der Achse Z den gesuchten Brennpunkt F zu erhalten.

§. 600.

228. Aufgabe. **Ein Rotationsparaboloid ist durch die Achse Z der Lage nach, den Brennpunkt F auf derselben und einen Punkt p der Fläche gegeben; es ist dessen Scheitel zu bestimmen.**

Jeder Punkt des Paraboloides hat den gleichen Abstand vom Brennpunkte und von der Directrixebene. Beschreiben wir daher aus dem gegebenen Punkte p, als Mittelpunkt, eine Kugel, welche durch den Brennpunkt F geht, so entspricht jeder Tangentialebene derselben von dem Punkte p ein Abstand, der jenem vom Brennpunkte F gleich kömmt.

Unter diesen Tangentialebenen gibt es zwei, welche auf der Achse Z senkrecht stehen. Jede derselben kann als die Directrixebene des gesuchten Paraboloides betrachtet werden. Halbiert man sodann deren Abstand von dem gegebenen Brennpunkte F, so stellt der Halbierungspunkt den verlangten Scheitel des Paraboloides dar.

§. 601.

229. Aufgabe. **Ein Rotationsparaboloid ist durch die Lage der Rotationsachse Z, den Brennpunkt F und eine Tangentialebene T gegeben; der Scheitel des Paraboloides ist zu construieren.**

Fällen wir von dem Brennpunkte F auf die Tangentialebene T das Perpendikel Fa, so muss (nach Satz 340) der Fußpunkt a des-

selben auf dieser Ebene T der Scheiteltangentialebene angehören. Letztere ergibt sich demnach als die durch a senkrecht zur Achse Z geführte Ebene T_a. Dort wo die Achse Z von der letztbezeichneten Ebene getroffen wird, erhalten wir bereits den gesuchten Scheitel A des Paraboloides.

§. 602.

230. Aufgabe. **Ein Rotationsparaboloid ist durch die Lage der Achse Z und durch zwei Tangentialebenen T_1 und T_2 gegeben; der Scheitel und der Brennpunkt desselben sind zu bestimmen.**

Drehen wir zunächst die beiden Tangentialebenen T_1 und T_2 so lange, bis sie auf einer und derselben, beliebig durch Z gelegten Meridianebene P senkrecht stehen. Da die bezeichneten Ebenen bei dieser Drehung nicht aufhören, Tangentialebenen an die vorgegebene Fläche zu sein, so werden sie die Ebene P in der gedrehten Lage in zwei Tangenten t_1 und t_2 des in dieser Ebene P liegenden Meridianes schneiden.

Es wird sich demnach bloß darum handeln, den Scheitel und den Brennpunkt einer Parabel zu finden, welche durch die Achse Z (der Lage nach) und zwei Tangenten t_1 und t_2 (Taf. XXX, Fig. 202) gegeben ist.

Suchen wir vorerst die Scheiteltangente T dieser Parabel. Dieselbe wird eine zu Z senkrechte Gerade sein, welcher die Eigenschaft zukömmt, dass sie die beiden Tangenten t_1 und t_2 in jenen Punkten a_1 und a_2 treffen wird, in welchen Senkrechte zu diesen Tangenten geführt, in einem und demselben Punkte F der Achse Z, d. i. in dem Brennpunkte der Parabel zum Schnitt gelangen.

Um demnach diese Scheiteltangente T und den Brennpunkt F zu finden, ziehen wir zunächst an beliebiger Stelle x eine Senkrechte τ zur Achse Z, welche den Tangenten t_1 und t_2 in α_1 und α_2 begegnen mögen. In den Punkten α_1 und α_2 fällen wir auf t_1 und t_2 die Normalen n_1 und n_2, welche sich in einem Punkte φ schneiden. Verbindet man diesen Punkt φ mit dem Schnittpunkt s der beiden Tangenten t_1 und t_2, so trifft die Verbindungsgerade φs die Achse Z in dem zu bestimmenden Brennpunkte F.

Denn, zieht man von F aus die Perpendikel F_{a_1} und F_{a_2} auf t_1 und t_2, und verbindet man a_1 und a_2 durch eine Gerade T, so erhält man zwei Dreiecke $a_1 a_2 F$ und $\alpha_1 \alpha_2 \varphi$, die in Bezug auf s als Ähnlichkeitspunkt ähnlich gelegen sind. Es sind daher auch die dritten Seiten $\alpha_1 \alpha_2 = \tau$ und $a_1 a_2 = T$ parallel, woraus folgt, dass T die Scheiteltangente und F der Brennpunkt der gesuchten Parabel sei.

Selbstverständlich sind sodann auch die Punkte F und A, beziehungsweise der Brennpunkt und Scheitel für das ursprünglich gegebene Paraboloid.

§. 603.

231. Aufgabe. **Ein Rotationsparaboloid ist durch die Lage der Rotationsachse Z und durch zwei Punkte a und b gegeben; es ist dessen Scheitel und Brennpunkt zu bestimmen.**

Denken wir uns die beiden gegebenen Punkte a und b durch Drehung um die Rotationsachse Z in eine beliebige durch Z gelegte Meridianebene P versetzt, so werden die besagten Punkte in dieser Lage zwei Punkte der in der Ebene P liegenden Meridianparabel darstellen. Die vorgelegte Aufgabe reduciert sich mithin auf die: „den Scheitel und Brennpunkt einer Parabel zu finden, von welcher die Achse Z und zwei Punkte a und b (Taf. XXX, Fig. 203) bekannt sind".

Ziehen wir demnach die Verbindungsgerade ab und bestimmen wir zu a, b und dem Schnittpunkte M von ab mit der Achse Z den vierten harmonischen Punkt M_1. Fällt man ferner von dem so erhaltenen Punkte M_1 die Senkrechte μ auf die Achse Z, so repräsentiert die besagte Gerade μ die Polare des Punktes M in Bezug auf die Parabel. Es müssen daher der Punkt M, der Punkt m, in welchem μ die Achse Z trifft, der unendlich ferne Punkt μ_∞ der Achse, und der zu suchende Parabelscheitel A harmonisch sein, d. h. A liegt in der Mitte zwischen M und m.

Der Brennpunkt F kann folgendermaßen gefunden werden. Fällt man von a aus das Perpendikel $a a_1$ auf die Achse Z und überträgt man den Punkt a_1 symmetrisch in Bezug auf A nach α, so ist, wie wir aus Aufgabe 208) wissen, αa die Tangente t der Parabel im Punkte a. Fällen wir auf dieselbe in dem Punkte π, in welchem besagte Tangente t die Scheiteltangente T schneidet, eine Senkrechte, so trifft diese die Achse Z in dem verlangten Brennpunkte F.

§. 604.

232. Aufgabe. **Ein Rotationsparaboloid ist durch den Brennpunkt F und durch drei Tangentialebenen T_1, T_2 und T_3 gegeben; der Scheitel der Fläche ist zu bestimmen.**

Fällen wir von F aus auf diese drei Ebenen die bezüglichen Perpendikel F_{a_1}, F_{a_2} und F_{a_3}, so liegen (nach Satz 340) deren Fußpunkte a_1, a_2 und a_3 in der Scheiteltangentialebene T_A. Letztere ist somit durch diese drei Punkte a_1, a_2 und a_3 vollkommen bestimmt.

Die Senkrechte Z von F auf diese Ebene T_A repräsentiert die Rotationsachse und der Punkt A, in welchem dieselbe die Ebene T_A trifft, den Scheitel des Paraboloides.

§. 605.

233. Aufgabe. **Ein Rotationsparaboloid ist durch den Brennpunkt, einen Punkt auf der Fläche und zwei Tangentialebenen gegeben; der Scheitel der Fläche ist zu bestimmen.**

Die beiden Tangentialebenen seien T_1 und T_2, der gegebene Punkt sei p und F stelle den Brennpunkt des Paraboloides dar.

Die Scheiteltangentialebene ist, wie wir wissen, von dem Brennpunkte eben soweit als von der Directrixebene entfernt. Zieht man daher durch den Brennpunkt F eine beliebige Gerade, welche die Scheiteltangentialebene im Punkte a und die Directrixebene im Punkte α trifft, so ist jederzeit $a\alpha = aF$. Der Punkt α ist also mit F in Bezug auf den Punkt a als „Symmetriepunkt" symmetrisch gelegen.

Diese Eigenschaft werden wir in folgender Weise zur Lösung der vorstehenden Aufgabe verwenden.

Wir fällen von dem Brennpunkte F auf die Ebenen T_1 und T_2 die betreffenden Perpendikel F_{a_1} und F_{a_2}. Die Fußpunkte a_1 und a_2 dieser Perpendikel gehören (nach Satz 340) der Scheiteltangentialebene an. Verlängert man die genannten Perpendikel über a_1, resp. a_2 hinaus, um ihre eigenen Längen F_{a_1} und F_{a_2} bis α_1, beziehungsweise α_2, so stellen die Punkte α_1 und α_2 (welche eigentlich die Symmetriepunkte des Brennpunktes F in Bezug auf die beiden Tangentialebenen T_1 und T_2 repräsentieren), der vorausgeschickten Betrachtung zufolge, zwei Punkte der Directrixebene dar.

Nun ist aber noch der Punkt p gegeben. Die Directrixebene muss von diesem Punkte p den nämlichen Abstand besitzen, welchen p von dem Brennpunkte F hat. Die Directrixebene muss demnach jene Kugel berühren, welche den Punkt p zum Mittelpunkte hat und durch den Brennpunkt F geht. Da somit zwei Punkte α_1 und α_2, also eine Gerade $\alpha_1\alpha_2$ der Directrixebene bekannt ist, so ergibt sich die letztere als die eine oder die andere der Tangentialebenen, welche durch die Gerade $\alpha_1\alpha_2$ an die genannte Kugel gelegt werden können.

Jene Ebene, welche parallel zu der Directrixebene durch die Gerade a_1a_2 geführt werden kann, ist die Scheiteltangentialebene und der Punkt, in welchem dieselbe von der durch F zu ihr senkrecht geführten Rotationsachse geschnitten wird, der gesuchte Scheitel.

§. 606.

234. Aufgabe. Ein Rotationsparaboloid ist durch den Brennpunkt F, eine Tangentialebene T und zwei Punkte p_1 und p_2 gegeben; der Scheitel der Fläche ist zu bestimmen.

Bestimmen wir zunächst den Symmetriepunkt α des Brennpunktes F in Bezug auf die Tangentialebene T. Dieser Punkt α gehört, wie in der vorhergegangenen Aufgabe gezeigt wurde, der Directrixebene an.

Beschreiben wir ferner aus jedem der beiden Punkte p_1 und p_2 als Mittelpunkte, die Kugeln S_1 und S_2, welche durch den Brennpunkt F gehen, so wird offenbar jede gemeinschaftliche Berührungsebene dieser beiden Kugeln von den Punkten p_1 und p_2 die nämlichen Entfernungen wie die Punkte p_1 und p_2 vom Brennpunkte F besitzen.

Unter diesen Ebenen muss sich offenbar auch die zu bestimmende Directrixebene befinden. Da dieselbe jedoch auch den Punkt α enthalten muss, so wird obgenannte Ebene die eine oder die andere jener durch α gehenden gemeinschaftlichen Berührebenen der beiden Kugeln S_1 und S_2 sein. Halbiert man sodann den senkrechten Abstand des Brennpunktes von dieser Ebene, so wird durch den Halbierungspunkt A der gesuchte Scheitel des Paraboloides dargestellt.

§. 607.

235. Aufgabe. Ein Rotationsparaboloid ist durch den Brennpunkt F und durch drei Punkte p_1, p_2 und p_3 gegeben; es ist der Scheitel der Fläche zu construieren.

Die Directrixebene des Paraboloides wird diesfalls durch jene Ebene dargestellt werden, welche von den drei gegebenen Punkten p_1, p_2, p_3 die nämlichen Entfernungen besitzt, wie beziehungsweise die vorgenannten Punkte von dem Brennpunkte F.

Dieses Ergebnis sagt aber nichts anderes aus, als dass die Directrixebene D eine gemeinschaftliche Berührebene jener drei Kugeln sei, welche die drei gegebenen Punkte p_1, p_2 und p_3 zu Mittelpunkten haben und durch den Brennpunkt F gehen.

Der Halbierungspunkt A des senkrechten Abstandes des Brennpunktes F von dieser Directrixebene D repräsentiert gleichzeitig den verlangten Scheitel des Paraboloides.

§. 608.

236. Aufgabe. Ein Rotationsparaboloid ist durch den Brennpunkt F, eine Tangentialebene T und deren Berührungspunkt p gegeben; der Scheitel der Fläche ist durch Construction zu finden.

Die Meridianebene des Berührungspunktes p muss selbstverständlich durch diesen Punkt p gehen und auf der Berührebene T senkrecht stehen. Die Meridianebene muss aber, da dieselbe unter allen Verhältnissen eine durch die Rotationsachse gehende Ebene ist, auch den gegebenen Brennpunkt F enthalten. Besagte Ebene ist somit als die durch Fp geführte zu T senkrecht stehende Ebene P bestimmt. Der in ihr liegende Meridian hat gleichfalls den Punkt F zum Brennpunkte, geht durch den Punkt p und wird in letzterem von der Schnittgeraden t der Ebenen T und P berührt.

Die gestellte Aufgabe reduciert sich hiernach auf die: „den Scheitel A jener Parabel zu bestimmen, welche durch den Brennpunkt F, die Tangente t und deren Berührungspunkt p (Taf. XXX, Fig. 204) gegeben ist".

Führen wir demgemäß durch p eine Gerade s, welche mit pF, in Bezug auf die Tangente t als Symmetrieachse symmetrisch liegt, so wissen wir, dass diese Gerade zur Achse Z der Parabel parallel ist. Hiedurch ist die letztere, als Parallele durch F zu s, vollkommen bestimmt.

Fällen wir ferner vom Brennpunkte F auf die Tangente t das Perpendikel Fa, so ist, wie bereits bekannt, durch den Fußpunkt a desselben, die Scheiteltangente T senkrecht zu s oder Z zu führen. Dort wo T die Achse Z trifft, erhält man unmittelbar den gesuchten Scheitel A.

Das Rotationsparaboloid kann mit Vortheil auch zur Lösung von Problemen verwendet werden, welche die Construction eines Kegelschnittes fordern, welcher eine gegebene Parabel in zwei Punkten (innerhalb) berührt, nebstbei aber durch gegebene Punkte gehen oder gegebene Geraden berühren soll.

Die Methode zur Lösung und graphischen Durchführung derartiger Probleme besteht, wie analogen Aufgaben bezüglich des Ellipsoides und Hyperboloides entnommen werden kann, darin, dass man die gegebene Parabel als den zur verticalen Projectionsebene parallelen Hauptmeridian und den zu suchenden Kegelschnitt als verticale Projection eines ebenen Schnittes eines Rotationsparaboloides auffasst.

Nachdem gelegentlich der Besprechung des Rotationsellipsoides diesbezügliche Aufgaben ausführlich behandelt wurden, dürfte es dies-

falls genügen, durch irgend ein Beispiel die betreffende Anwendung des Paraboloides zu zeigen und den Nachweis zu liefern, dass sich hiedurch gewisse constructive Vereinfachungen, welche in der besonderen Natur des Rotationsparaboloides ihren Grund haben, ergeben.

§. 609.

237. Aufgabe. **Eine Parabel und drei dieselbe reell schneidende Geraden sind gegeben; es ist ein Kegelschnitt zu construieren, welcher die Parabel in zwei Punkten berührt und die drei Geraden in Punkten tangiert, welche auf den innerhalb der Parabel liegenden Stücken der Geraden liegen.**

Der Brennpunkt der gegebenen Parabel sei F, Z sei deren Achse und D die Directrixebene derselben; ferner seien t_1, t_2 und t_3 (Taf. XXX, Fig. 205) die drei gegebenen Geraden.

Die Parabel betrachten wir als den zur verticalen Projectionsebene parallelen Hauptmeridian eines Rotationsparaboloides und Z als die Rotationsachse desselben. Unter dieser Voraussetzung haben wir die Grundlinie XX senkrecht zur Parabelachse Z zu wählen.

Der zu bestimmende Kegelschnitt Σ soll einerseits die Parabel in zwei Punkten berühren und andererseits auch mit jeder der drei gegebenen Geraden t_1, t_2, t_3 eine Berührung eingehen.

Betrachten wir den zu suchenden Kegelschnitt Σ als die verticale Projection eines ebenen Schnittes (Σ, Σ') des Rotationsparaboloides, so müssen offenbar die drei Geraden t_1, t_2 und t_3 die verticalen Projectionen dreier Tangenten (t_1, t'_1). (t_2, t'_2) und (t_3, t'_3) dieses ebenen Schnittes darstellen.

Nachdem aber die Tangente eines ebenen Schnittes einer Fläche eine Tangente der Fläche selbst sein muss, so haben wir t_1, t_2 und t_3 als die Verticalprojectionen dreier Tangenten des Rotationsparaboloides aufzufassen, die in einer und derselben Ebene — der Ebene des zu suchenden Schnittes (Σ, Σ') — liegen müssen.

Soll jedoch t_1 die Verticalprojection einer Tangente des Rotationsparaboloides darstellen, so muss diese Tangente insbesondere die Ellipse ε_1 berühren, in welcher die vertical-projicierende Ebene t_1 das Paraboloid schneidet. Desgleichen folgt, dass t_2 die Verticalprojection einer Tangente der Ellipse ε_2 ist, in welcher die vertical-projicierende Ebene t_2 das Paraboloid trifft und endlich t_3 die Verticalprojection einer Tangente der Ellipse ε_3, in welcher das Paraboloid von der durch t_3 gehenden vertical-projicierenden Ebene geschnitten wird.

Weiters ist eine nothwendige Bedingung, dass diese drei Tangenten t_1, t_2 und t_3 in einer und derselben Ebene liegen. Diese Ebene wird dann offenbar gleichzeitig eine solche sein, welche die drei Ellipsen ε_1, ε_2 und ε_3 berührt.

Nun lassen sich aber (nach Satz 451, Band II) durch jedes Paar dieser Ellipsen zwei Kegel zweiten Grades legen. Dieser Kegel kann man sich zur Construction der gesuchten Ebene bedienen.

Zunächst bestimmen wir mit Zugrundelegung der Aufgabe 207) die bezüglichen Schnittpunkte m_1, n_1 von t_1; m_2, n_2 von t_2 und m_3, n_3 von t_3 mit der gegebenen Parabel. Diese Punktepaare sind gleichzeitig diejenigen, in welchen die Ellipsen ε_1, ε_2 und ε_3 die Hauptmeridianebene schneiden.

Infolge der Symetrie der drei Ellipsen gegen die Hauptmeridianebene erhält man den Scheitel (S_1, S'_1) des einen durch ε_1 und ε_2 gehenden Kegels als Schnitt von $m_1 n_2$ und $m_2 n_1$, und den Scheitel (S_2, S'_2) des durch ε_1 und ε_3 gehenden Kegels im Schnitte von $m_2 m_3$ und $n_2 n_3$. Die beiden Kegelscheitel liegen in der Hauptmeridianebene, daher deren Verbindungsgerade $(S_1 S_2, S'_1 S'_2)$ parallel zur verticalen Projectionsebene sein wird.

Legen wir durch diese Gerade $(S_1 S_2, S'_1 S'_2)$ eine Ebene, welche die Ellipse ε_1 berührt, so ist dieselbe eine gemeinschaftliche Berührebene der beiden Kegel, welche somit als solche auch die Ellipsen ε_2 und ε_3 berühren wird.

Um besagte Ebene zu construieren, haben wir bloß von dem Durchstoßpunkte (s, s') der Geraden $(S_1 S_2, S'_1 S'_2)$ mit der Ebene der Ellipse ε_1 an diese letztere eine Tangente (t_1, t'_1) zu ziehen (in der horizontalen Projection erscheint ε'_1 als der über (m'_1, n'_1) als Durchmesser beschriebene Kreis und ist daher die Tangente t'_1 von s' aus leicht zu construieren) und durch diese Tangente und die Gerade $(S_1 S_2, S'_1 S'_2)$ die Ebene $E_v E_h$ zu legen. Dieselbe wird das Paraboloid in einer Ellipse (Σ, Σ') schneiden, deren Verticalprojection Σ die gegebenen Bedingungen erfüllen wird.

XXVII. Capitel.

Constructionen und Aufgaben, das dreiachsige Ellipsoid betreffend.

§. 610.

Den diesbezüglichen Constructions-Problemen seien noch nachstehend einige allgemeine Bemerkungen vorangeschickt.

Zunächst wollen wir in Folgendem voraussetzen, dass das Ellipsoid in einer derartigen Lage gegen die beiden Projectionsebenen entweder unmittelbar gegeben oder durch entsprechende Transformation gebracht worden sei, dass dessen drei Hauptebenen zu den betreffenden Projectionsebenen beziehungsweise parallel sind oder senkrecht stehen. Um Wiederholungen zu vermeiden, setzen wir ein für allemal fest, dass die längste der drei Achsen des Ellipsoides, die wir mit AB (Taf. XXX, Fig. 206) bezeichnen, stets horizontal-projicierend, die mittlere Achse, die wir mit CD bezeichnen, stets kreuzriss-projicierend, also parallel zur Grundlinie und folglich die kleinste Achse, die wir mit EF bezeichnen, stets vertical-projicierend sei.

Wird ein- oder das anderemal von diesen Voraussetzungen infolge vorliegender Bedingungen oder behufs Erreichung ganz bestimmter Resultate und Zwecke abgegangen, so wird es im betreffenden Falle ausdrücklich bemerkt werden.

Der Kürze wegen bezeichnen wir die horizontal-liegende Hauptebene, d. i. jene, welche die mittlere Achse CD und die kleine Achse EF des Ellipsoides enthält, mit ε; die zur verticalen Projectionsbene parallele Hauptebene, d. i. jene, welche die große Achse AB und die mittlere Achse CD enthält, mit η und endlich die zur Profilebene parallele (zur Grundlinie normale) Hauptebene, welche die große Achse AB und die kleine Achse EF des Ellipsoides enthält, mit π.

Die Verticaltrace der erstgenannten Ebene ε sei sodann, entsprechend der Benennung der Ebene, mit ε_v, die Horizontaltrace der zweiten Ebene sei mit η_h und die Verticaltrace resp. die Horizontaltrace der dritten Ebene π sei beziehungsweise mit π_v und π_h bezeichnet.

Endlich wollen wir noch als unveränderliche Bezeichnungen feststellen, dass (O, O') stets der Mittelpunkt des dreiachsigen Ellipsoides sei, dass der Kreis, welcher in der Ebene η über der Achse AB als Durchmesser gezeichnet wird, K_0 heiße und dass die beiden Kreise, die in der horizontalen Hauptebene ε beziehungsweise über den Achsen CD und EF beschrieben werden, K'_1 und K'_2 heißen mögen.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen übergehen wir somit auf die Lösung und Durchführung der wichtigsten hieher gehörenden Constructionsaufgaben.

§. 611.

238. Aufgabe. **Es ist der Schnitt eines dreiachsigen Ellipsoides mit einer zur horizontalen Projectionsebene parallelen Ebene zu bestimmen.**

Die zur Grundlinie XX parallele Verticaltrace der gegebenen schneidenden Ebene e, sei e_v (Taf. XXX, Fig. 206).

Da die Ebene e gleichzeitig zu der Hauptebene ε_v des Ellipsoides parallel ist, wird deren Schnitt mit dem letzteren (nach Satz 443 *b*, Band II) eine Ellipse sein, deren Mittelpunkt auf der conjugierten Achse $(AB, A'B')$ liegt und welche mit der in der Hauptebene ε_v liegenden Ellipse $(CDEF, C'D'E'F')$ ähnlich und ähnlich gelegen ist.

Die eine zur Achse $(CD, C'D')$ parallele Achse $(cd, c'd')$ der zu suchenden Schnittellipse hat somit ihre Endpunkte (c, c') und (d, d') nothwendig auf der Hauptellipse $ABCD$. Die verticalen Projectionen c und d dieser Punkte erhält man mithin im Schnitte der Verticaltrace e_v der gegebenen Ebene e mit der Hauptellipse $ABCD$ und können dieselben direct mittelst des dieser Hauptellipse entsprechenden affinen Kreises K_0 leicht construiert werden. Die Horizontalprojectionen c' und d' ergeben sich sodann unmittelbar in der Trace η_h.

Die zweite Achse $(ef, e'f')$ der Schnittellipse ist aus der ersten, eben gefundenen Achse $(cd, c'd')$ leicht abzuleiten. Da nämlich die Schnittellipse und die in der Hauptebene ε_v liegende Hauptellipse ähnlich und ähnlich gelegen sind und überdies auch die Mittelpunkte (o, o') und (O, O') dieser beiden Ellipsen auf der horizontal-projicierenden Achse $(AB, A'B')$ liegen, so sind offenbar die Horizontalprojectionen $c'd'e'f'$ und $C'D'E'F'$ dieser beiden Ellipsen ähnlich gelegene concentrische Ellipsen; es genügt daher die Achse $e'f'$ so zu bestimmen, dass sie zur Achse $c'd'$ in demselben Verhältnisse wie die Achse $E'F'$ zur Achse $C'D'$ steht. Letzteres wird, wie an und für sich klar, bewerkstelligt, wenn man die Geraden $c'f'$ und $e'd'$ parallel zu $C'F'$ oder $E'D'$ zieht.

Nachdem weiters die Achse $(ef, e'f')$ eine vertical-projicierende ist, so erhalten wir die Verticalprojectionen e und f der eben gefundenen Achsenendpunkte als zwei mit der Verticalprojection o des Mittelpunktes der Schnittellipse zusammenfallende Punkte. Die Schnittellipse ist somit durch ihre beiden Achsen $(cd, c'd')$ und $(ef, e'f')$ vollkommen bestimmt.

§. 612.

239. Aufgabe. Es ist der Schnitt eines dreiachsigen Ellipsoides mit einer zur verticalen Projectionsebene parallelen Ebene zu ermitteln.

Die horizontale Trace der gegebenen schneidenden Ebene e sei e_h (Taf. XXX, Fig. 207). Nachdem die Ebene e zur Hauptebene η_h parallel läuft, so wird (nach Satz 443*b*, II) deren Schnitt mit dem Ellipsoide eine Ellipse $(abcd, a'b'c'd')$ sein, welche mit der Hauptellipse $(ABCD, A'B'C'D')$ ähnlich gelegen ist, und deren Mittelpunkt (o, o') auf der conjugierten Hauptachse $(EF, E'F')$ liegt.

Die eine zur Achse $(CD, C'D')$ parallele Achse der gesuchten Schnittellipse ist daher die Schnittgerade der gegebenen Ebene e_h mit der Hauptebene ε_v; die Endpunkte derselben sind demgemäß die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Hauptellipse $(CDEF, C'D'E'F')$.

Die horizontalen Projectionen c' und d' dieser Endpunkte werden sich demnach als die Schnittpunkte von e_h mit der Ellipse $C'D'E'F'$ ergeben. Wir construieren dieselben mittelst der beiden Kreise K'_1 und K'_2, indem wir den Schnittpunkt β der Geraden e_h und des Kreises K'_2 mit dem Mittelpunkte O' verbinden und durch den Schnittpunkt α dieser Verbindungsgeraden $O'\beta$ mit dem Kreise K'_1 die Senkrechte auf e_h fällen; die letztere wird von der besagten Senkrechten bereits in einem der beiden Punkte, d. i. in c' getroffen. Der andere gemeinschaftliche Punkt der Geraden e_h und der Ellipse $C'D'E'F'$ ist der dem Punkte c' in Bezug auf den Mittelpunkt o' symmetrische Punkt d'. Die Verticalprojectionen c und d dieser Achsenendpunkte ergeben sich unmittelbar auf der Trace ε_v.

Aus der eben gefundenen Achse $(cd, c'd')$ lässt sich die zweite Achse $(ab, a'b')$ der Schnittellipse leicht ableiten. Da nämlich diese Ellipse mit der Hauptellipse $(ABCD, A'B'C'D')$ ähnlich gelegen ist, und ihr Mittelpunkt (o, o') mit dem Mittelpunkte (O, O') der letzteren auf derselben vertical-projicierenden Geraden $(EF, E'F')$ liegt, so ist ihre Verticalprojection $abcd$ ähnlich gelegen und concentrisch mit der Verticalprojection $ABCD$.

Man wird daher die Verticalprojection ab der Achse $(ab, a'b')$ auf der Geraden AB dadurch erhalten, dass man die Strahlen ac und bd beziehungsweise parallel zu AC oder BD zieht. Die Horizontalprojectionen a' und b' der Achsenendpunkte erhält man unmittelbar als zwei mit der Horizontalprojection o' des Mittelpunktes der Schnittellipse zusammenfallende Punkte.

Die gesuchte Schnittellipse ist vermöge dieser Constructionen durch ihre beiden Achsen $(ab, a'b')$ und $(cd, c'd')$ vollkommen bestimmt und dargestellt.

§. 613.

240. Aufgabe. Die verticale Projection eines auf einem dreiachsigen Ellipsoide liegenden Punktes ist gegeben; dessen Horizontalprojection ist zu bestimmen.

Die gegebene Verticalprojection des Punktes auf dem Ellipsoide sei a (Taf. XXX, Fig. 208). Die Forderung der gestellten Aufgabe geht somit bloß dahin, die beiden Punkte zu bestimmen, in welchen die durch a gehende vertical-projicierende Gerade (s, s') das Ellipsoid schneidet. Die besagten Punkte werden selbstverständlich die gegebene verticale Projection a gemeinschaftlich besitzen; die Horizontalprojectionen dagegen werden, da die Gerade (s, s') zu der Haupt- oder Symmetrieebene η senkrecht steht, symmetrisch gegen die Horizontaltrace η_h dieser Ebene liegen.

Um die besagten Punkte constructiv festzustellen, legen wir durch die Gerade (s, s') eine zur horizontalen Projectionsebene parallele Ebene e_v; diese wird das Ellipsoid in einer Ellipse schneiden, welche die Gerade (s, s') in den beiden zu suchenden Punkten (a, a'_1) und (a, a'_2) treffen wird.

Diese Ellipse $(cdef, c'd'e'f')$ könnte man (wie in Aufgabe 238), durch ihre Achsen bestimmen, und hierauf vermittelst Affinität ihre Schnittpunkte (a, a'_1) und (a, a'_2) mit der Geraden (s, s') aufsuchen, doch sei diesfalls, behufs der zu vollziehenden Constructionen, das vorher angegebene Verfahren durch nachstehendes ersetzt.

Wir bestimmen zunächst nur die Verticalprojection d des in der Hauptebene η_h liegenden Achsenendpunktes der Schnittellipse $(cdef, c'd'e'f')$ mit Zuhilfenahme des affinen Kreises K_0. Von dieser Schnittellipse ist aber bekannt, dass sie mit der Hauptellipse $(CDEF, C'D'E'F')$ ähnlich gelegen sei, dass also die genannten beiden Ellipsen stets als parallele, ebene Schnitte eines und desselben Kegels zweiten Grades betrachtet werden können.

Der Kegelscheitel (δ, δ') wird auf der Verbindungsgeraden ähnlich liegender Punktepaare beider Ellipsen, also vor allem auf der Verbindungsgeraden ihrer Mittelpunkte (O, O') und (o, o'), d. h. in der Achse $(AB, A'B')$ des Ellipsoides selbst liegen. Es gibt aber, wie wir wissen, zwei verschiedene Kegel, welche durch die beiden Ellipsen gehen, je nachdem man den Achsenendpunkt (d, d') der einen Ellipse mit dem einen oder dem anderen Endpunkte (C, C') oder (D, D')

der entsprechenden Achse der zweiten Ellipse als ähnlich liegend betrachtet.

Nehmen wir nun an, es seien (d, d') und (C, C') ähnlich liegende Punkte der beiden Ellipsen, so erhalten wir sofort den Kegelscheitel (δ, δ') als Schnittpunkt der Geraden $(d\,C, d'C')$ mit der Achse $(AB, A'B')$.

Wir sind somit im Stande vermittelst dieses Kegelscheitels (δ, δ') die Schnittellipse $(cdef, c'd'e'f')$ in die Hauptellipse $(CDEF, C'D'E'F')$ zu projicieren.

Gleichzeitig wollen wir aber auch die vertical-projicierende Gerade (s, s') in der Ebene e_v der Schnittellipse in die Ebene ε_v der Hauptellipse projicieren. Die Projection (σ, σ') derselben erhalten wir als die ebenfalls vertical-projicierende Schnittgerade der Ebene ε_v mit der durch (s, s') und den Kegelscheitel (δ, δ') gelegten vertical-projicierenden Ebene. Es ist einleuchtend, dass bei dieser Projection die gesuchten Schnittpunkte von (s, s') mit der Schnittellipse in jene Punkte abgebildet werden, welche die Gerade (σ, σ') mit der Hauptellipse $(CDEF, C'D'E'F')$ gemein hat.

Die horizontalen Projectionen der letzteren sind die Schnittpunkte von σ' mit der Ellipse $C'D'E'F'$, welche folgendermaßen bestimmt werden können. Man verbindet den Schnittpunkte x von σ' und dem Kreise K'_1 mit dem Mittelpunkte O' und fällt von dem Punkte y, in welchem die Gerade $O'x$ den Kreis K'_2 schneidet, das Perpendikel ya'_0 auf σ'; der Fußpunkt a'_0 desselben ist bereits der eine Schnittpunkt. Projicieren wir diesen Punkt a'_0 vermittelst des Kegelscheitels δ' in die Gerade s' nach a'_1 zurück, so repräsentiert der Punkt a'_1 bereits die horizontalen Projectionen des einen jener beiden Punkte, in welchen die Gerade (s, s') die Schnittellipse in der Ebene e_v, also auch das Ellipsoid trifft. Die horizontale Projection a'_2 des anderen Schnittpunktes liegt mit a'_1, in Bezug auf η_h, symmetrisch.

Man erhält also in (a, a'_1) und (a, a'_2) die Projectionen der gesuchten Punkte auf dem durch seine Achsen gegebenen Ellipsoide.

In gleicher Weise wird man vorzugehen haben, wenn die Verticalprojection eines Punktes des Ellipsoides, dessen Horizontalprojection gegeben ist, zu bestimmen wäre. Selbstverständlich beziehen sich sodann die soeben an den Verticalprojectionen durchgeführten Constructionen auf die Horizontalprojectionen und umgekehrt.

§. 614.

241. Aufgabe. Es ist der Schnitt eines dreiachsigen Ellipsoides mit einer vertical-projicierenden Ebene zu ermitteln.

Die gegebene vertical-projicierende Ebene sei $E_v E_h$ (Taf. XXX, Fig. 209). Die genannte Ebene steht auf der Haupt- und Symmetrieebene η des Ellipsoides senkrecht; es wird daher deren Schnitt mit dem Ellipsoide, in Bezug auf diese Ebene η, symmetrisch sein, d. h. die zu suchende Schnittellipse wird die Schnittgerade (s, s') der beiden Ebenen $E_v E_h$ und η_h als eine ihrer Achsen besitzen.

Die Endpunkte (m, m') und (n, n') dieser Achse sind unschwer festzustellen. Dieselben sind nämlich die Schnittpunkte der Geraden (s, s') mit dem Ellipsoide, oder, da die Gerade (s, s') in der Hauptebene η liegt, insbesondere ihre Schnittpunkte mit der in dieser Ebene η liegenden Hauptellipse.

Die Verticalprojectionen der besagten Punkte ergeben sich somit unmittelbar als die Schnittpunkte m und n der Geraden s mit der Ellipse $ABCD$, vermittelst des der letzteren affinen Kreises K_0. Die horizontalen Projectionen m' und n' findet man einfach durch Projection der Punkte m und n in die Gerade s'.

Halbiert man die gefundene Achse $(mn, m'n')$ des zu suchenden Schnittes im Punkte (o, o'), so repräsentiert dieser letztere den Mittelpunkt der Schnittellipse.

Die zweite Achse des Schnittes ist sodann jene Gerade (s_1, s_1'), welche durch (o, o') auf die vorher genannte Gerade (s, s') in der schneidenden Ebene $E_v E_h$ senkrecht gezogen wird. Nachdem dieselbe eine vertical-projicierende Gerade ist, so werden deren Endpunkte, d. i. deren Schnittpunkte (p, p') und (r, r'), mit dem Ellipsoide durch Zuhilfenahme jener Constructionen gefunden, welche in der vorigen Aufgabe entwickelt wurden. Die gesuchte Schnittellipse ist mithin durch ihre Achsen $(mn, m'n')$ und $(pr, p'r')$ dargestellt.

In analoger Weise kann vorgegangen werden, wenn der Schnitt des Ellipsoides mit einer horizontal-projicierenden Ebene zu bestimmen wäre. Es ist diesfalls an und für sich klar, dass man bloß die Ordnung der vorzunehmenden Constructionen, in Betreff der horizontalen, beziehungsweise der verticalen Projectionen mit einander zu vertauschen hat, dass also die Constructionen, die in dem vorher besprochenen Falle an den Verticalprojectionen vorgenommen wurden, nun an den Horizontalprojectionen ausgeführt werden müssen, und umgekehrt.

§. 615.

242. Aufgabe. Es sind die Schnittpunkte eines dreiachsigen Ellipsoides mit einer zur verticalen Projectionsebene parallelen Geraden festzustellen.

Die gegebene zur verticalen Projectionsebene parallele Gerade sei (g, g') (Taf. XXX, Fig. 210).

Legen wir durch diese Gerade eine horizontal-projicierende, also zur verticalen Projectionsebene parallele Ebene e_h, so wird dieselbe das Ellipsoid in einer Ellipse schneiden, deren Schnittpunkte mit der gegebenen Geraden (g, g') bereits die gesuchten Punkte darstellen werden.

Die besagten Punkte könnte man in der Weise construieren, dass man (wie in Aufgabe 239) die Achsen $(ab, a'b')$ und $(cd, c'd')$ der Schnittellipse der Ebene e_h construiert und dann vermittelst eines zu dieser Schnittellipse affinen Kreises die Schnittpunkte mit (g, g') aufsucht.

Man kann jedoch auch, um einige Abwechslung in die Lösungsarten zu bringen, folgenden Weg einschlagen.

Die Schnittellipse $(abcd, a'b'c'd')$ ist bekanntlich ähnlich gelegen mit der Hauptellipse $(ABCD, A'B'C'D')$; es können daher diese beiden Ellipsen stets als parallele Schnitte eines und desselben Kegels betrachtet werden. Die Erzeugenden dieses Kegels (es gibt ihrer bekanntlich zwei) sind die Verbindungsgeraden ähnlich liegender Punkte beider Ellipsen.

Als ein Paar solcher ähnlich liegender Punkte sind offenbar auch die Mittelpunkte (O, O') und (o, o') der beiden Ellipsen zu betrachten. Auf der Verbindungsgeraden dieser Punkte, d. i. auf der vertical-projicierenden Achse $(EF, E'F')$ des Ellipsoides muss daher der Kegelscheitel liegen.

Da ferner die Achsenendpunkte beider Ellipsen ähnlich liegende Punkte (und zwar in doppelter Beziehung ähnlich liegend) sind, so wird es genügen, einen Achsenendpunkt, etwa (c, c') der Schnittellipse zu bestimmen und denselben mit einem der beiden ihm ähnlich liegenden Achsenendpunkten der Hauptellipse $(ABCD, A'B'C'D')$, diesfalls mit (C, C'), zu verbinden, um in $(Cc, C'c')$ eine Erzeugende des obgenannten Kegels, und in deren Schnitt (S, S') mit der Achse $(EF, E'F')$ den Scheitel des Kegels zu erhalten. Vermittelst dieses Kegelscheitels (S, S') sind wir nun in der Lage, die Schnittellipse $(abcd, a'b'c'd')$ auf die Hauptellipse $(ABCD, A'B'C'D')$ zu projicieren.

Gleichzeitig ist aber auch die gegebene, in der Ebene e_h der Schnittellipse liegende Gerade (g, g') auf die Ebene η_h der Hauptellipse vom Scheitel (S, S') aus zu projicieren, d. h. der Schnitt (g_1, g'_1) der Ebene η mit der durch (S, S') und (g, g') gelegten Ebene zu ermitteln.

Da infolge der Parallelität der Ebenen e_h und η_h auch dieser Schnitt (g_1, g'_1) zur Geraden (g, g') parallel sein muss, genügt es, irgend einen Punkt, allenfalls (α_1, α'_1) von (g_1, g'_1), als Projection eines Punktes (α, α') von (g, g') zu construieren und durch diesen Punkt (α_1, α'_1) die Gerade (g_1, g'_1) parallel zu (g, g') zu ziehen. Die Schnittpunkte der Geraden (g_1, g'_1) mit der Hauptellipse $(ABCD, A'B'C'D')$ werden offenbar bereits die Projectionen (vom Scheitel (S, S') aus) der Schnittpunkte der Geraden (g, g') mit der Ellipse $(abcd, a'b'c'd')$ darstellen.

Wir haben demnach nichts anderes zu thun, als die Schnittpunkte m_1 und n_1 der Geraden g_1 mit der Ellipse $ABCD$ vermittelst des Affinitätskreises K_0 zu construieren, um in den besagten Punkten die Verticalprojectionen der Schnittpunkte der Geraden (g_1, g'_1) mit der Hauptellipse $(ABCD, A'B'C'D')$ zu erhalten. Projicieren wir diese Punkte m_1 und n_1 vom Kegelscheitel S auf die Gerade g zurück (man sieht, dass zur Ausführung dieser Construction die verticalen Projectionen hinreichen), so erhält man daselbst zwei Punkte m und n, welche bereits die Verticalprojectionen der gemeinsamen Punkte der Geraden (g, g') mit der Ellipse $abcd$, also auch mit dem Ellipsoide darstellen. Die Horizontalprojectionen m' und n' dieser Schnittpunkte ergeben sich unmittelbar auf g'.

Das Verfahren wird im Principe unverändert bleiben, wenn die Schnittpunkte des Ellipsoides mit einer zur horizontalen Projectionsebene parallelen Geraden zu ermitteln sein sollten. Man wird in einem solchen Falle nur die Constructionen betreffs der Projectionen umzukehren haben; man wird also durch die Gerade eine horizontale Ebene legen und deren Schnitt mit dem Ellipsoide von einem gewissen Punkte der Achse AB auf den horizontalen Hauptschnitt $CDEF$ projicieren und im übrigen den oben eingeschlagenen Weg festhalten.

Sind die Schnittpunkte einer gegen beide Projectionsebenen geneigten Geraden zu bestimmen, so werden die Constructionen, wenn auch nicht mehr so einfach wie in den eben besprochenen Fällen, so doch nicht wesentlich complicierter sein.

In dem vorstehenden Falle hat man nämlich durch die gegebene Gerade eine vertical- oder horizontal-projicierende Ebene zu legen; die Achsen der Schnittellipse dieser Ebene mit dem Ellipsoid (wie in Aufgabe 241) zu construieren und endlich die Schnittpunkte der Geraden mit dieser Ellipse zu ermitteln.

Wie leicht einzusehen, hätte man hierbei dreimal die Schnittpunkte von Geraden mit verschiedenen Ellipsen zu bestimmen, bevor

man zur Kenntnis des gewünschten Resultates käme, was zwar keinerlei Schwierigkeit bietet, den Gang der Lösung aber schwerfällig macht.

Besonders schleppend und langwierig wäre aber, unter Beibehaltung dieser Methode, die Bestimmung des Schnittes einer beliebigen, gegen die Projectionsebene geneigten Ebene mit dem dreiachsigen Ellipsoide dann, wenn es sich um die directe Construction eines Paares conjugierter Durchmesser oder gar der Achsen dieses Schnittes handeln würde.

Hiernach erscheint uns die Weisung gegeben, vor allem eine Methode zu suchen, welche die Construction der Schnittpunkte einer Geraden mit einem Ellipsoide auf eine einfache und sichere Weise ermöglicht.

Die gestellte Forderung wird erfüllt sein, wenn es gelingt, die Constructionen auf solche zu reducieren, welche bloß von der Bestimmung der Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreise abhängen. Selbstverständlich darf jedoch die Lösung nicht etwa in der Weise erfolgen, dass ein solcher Kreis allenfalls wieder bloß den Affinkreis einer Ellipse repräsentiere, deren Achsen erst gefunden werden müssten.

Um zu dem angestrebten Ziele zu gelangen, wird es geboten erscheinen, die beiden nachstehenden Aufgaben vorauszuschicken.

§. 616.

243. Aufgabe. **Es ist der Schnitt eines dreiachsigen Ellipsoides mit einer durch die kleine Achse desselben gehenden Ebene zu bestimmen.**

Sei $E_v E_h$ (Taf. XXXI, Fig. 211) die schneidende Ebene, welche, der Voraussetzung gemäß, durch die kleine Achse $(EF, E'F')$ des Ellipsoides geführt wird. Die Verticaltrace E_v derselben wird mithin durch die Verticalprojection EF oder durch die Verticalprojection O des Mittelpunktes gehen.

Die eine Achse des Schnittes dieser Ebene mit dem Ellipsoide ist die Gerade (s, s'), in welcher die Ebene $E_v E_h$ die zu ihr senkrechte Haupt- und Symmetrieebene η des Ellipsoides schneidet. Die Endpunkte dieser Achse sind deren Schnittpunkte (m, m') und (n, n') mit dem Ellipsoid oder insbesondere mit der Hauptellipse $(ABCD, A'B'C'D')$. Dieselben wurden diesfalls vermittelst des affinen Kreises K_0 festgestellt.

Da die Achse $(mn, m'n')$ durch den Mittelpunkt (O, O') des Ellipsoides geht, ist der letztbezeichnete Punkt auch der Mittelpunkt

des Schnittes der Ebene $E_v E_h$ mit der Fläche. Die zweite Achse wird durch die durch (O, O') in der Ebene $E_v E_h$ senkrecht zur ersteren Achse $(mn, m'n')$ gezogene Gerade dargestellt, ist also mit der kleinen Achse $(EF, E'F')$ des Ellipsoides identisch.

Das gleiche Resultat ergibt sich auch direct durch folgende Betrachtung.

Die Tangentialebenen des Ellipsoides in den Endpunkten der kleinen Achse $(EF, E'F')$ stehen, wie bekannt, auf dieser letzteren senkrecht. Die durch die besagte Achse gehende Ebene schneidet diese Tangentialebenen in zwei zur Achse $(EF, E'F')$ senkrechten Geraden, welche gleichzeitig die Tangenten der Schnittellipse in den Punkten (E, E') und (F, F') darstellen, woraus unmittelbar hervorgeht, dass $(EF, E'F')$ eine Achse dieser Schnittellipse sei.

Der Schnitt der Ebene $E_v E_h$ mit dem Ellipsoide ist somit durch seine beiden Achsen $(mn, m'n')$ und $(EF, E'F')$ dargestellt.

Als besonders wichtig sei noch hervorgehoben, dass die horizontale Projection $E'F'm'n'$ dieser Ellipse die Horizontalprojection $C'D'E'F'$ der Hauptellipse in der Ebene ε_v in den beiden Achsenendpunkten E' und F' berührt.

Denken wir uns nun die schneidende Ebene $E_v E_h$ um die Achse $(EF, E'F')$ gedreht, so wird dieselbe das Ellipsoid stets in einer Ellipse schneiden, deren eine Achse $(EF, E'F')$ ist. Die andere Achse ist offenbar jener Durchmesser der Hauptellipse $(ABCD, A'B'C'D')$, welcher jeweilig in der Ebene $E_v E_h$ liegt.

Übergeht die schneidende Ebene $E_v E_h$ bei der vorerwähnten Drehung in die horizontale Lage, so ist die ebengenannte Achse die mittlere Achse des Ellipsoides und daher der Schnitt der Ebene mit dem Ellipsoide, die Hauptellipse (CD, EF).

Wird die Drehung fortgesetzt, dreht sich also die Ebene $E_v E_h$ aus der letztangeführten Lage heraus, so wird sich die Achse $(mn, m'n')$ derart ändern, dass ihre horizontale Projection $m'n'$ immer kleiner wird und endlich ganz verschwindet, wenn die schneidende Ebene $E_v E_h$ in die horizontal-projicierende Lage übergeht.

Während der Drehung wird daher die Ebene $E_v E_h$ einmal eine Lage einnehmen, bei welcher die Horizontalprojection $m'n'$ der Länge $E'F'$ gleich wird, die Horizontalprojection der Schnittellipse also durch einen über $E'F'$ als Durchmesser beschriebenen Kreis K'_2 repräsentiert erscheint.

Hierauf gestützt, wollen wir die nachstehende Aufgabe, deren Möglichkeit soeben bewiesen wurde, lösen.

§. 617.

244. Aufgabe. Es ist die Lage einer Ebene aufzufinden, welche durch die kleine Achse eines dreiachsigen Ellipsoides geht und letzteres in einer Ellipse schneidet, deren Horizontalprojection ein Kreis ist.

Den vorhergegangenen Betrachtungen entsprechend, kann die horizontale Projection dieses Kegelschnittes, den wir (γ, γ') nennen wollen, unmittelbar gezeichnet werden. Besagte Projection ist nämlich der über $E'F'$ als Durchmesser beschriebene Kreis $\gamma' = K'_2$ (Taf. XXXI, Fig. 212).

Der zu $E'F'$ senkrechte, der Lage nach mit $C'D'$ zusammenfallende Durchmesser $m'n'$ repräsentiert somit die Horizontalprojection der zweiten Achse $(mn, m'n')$ des verlangten Kegelschnittes (γ, γ'). Nachdem aber diese Achse, wie wir früher gesehen haben, nothwendig ein Durchmesser der Hauptellipse $(ABCD, A'B'C'D')$ sein muss, so ist auch einleuchtend, dass die beiden Punkte m' und n' die horizontalen Projectionen zweier Punkte der Hauptellipse $(ABCD, A'B'C'D')$ darstellen müssen.

Die verticalen Projectionen dieser Punkte werden sich daher als die Schnittpunkte m und n oder m_1 und n_1 der Ellipse $ABCD$ mit den durch m' beziehungsweise n' senkrecht zur Grundlinie XX gezogenen Geraden ergeben.

Hiernach erhalten wir in mn oder in $m_1 n_1$ die Verticalprojection der zweiten Achse des Kegelschnittes (γ, γ') und gleichzeitig mit derselben die Verticaltrace Γ_v (oder Γ'_v) der vertical-projicierenden durch $(EF, E'F')$ gehenden Ebene, welche diesen Kegelschnitt enthält.

Wie somit ersichtlich, gibt es zwei Lagen von Ebenen — $\Gamma_v \Gamma_h$ und $\Gamma'_v \Gamma'_h$ — welche der gestellten Aufgabe Genüge leisten.

Diese Ebenen lassen sich nun, wie wir in der Folge zeigen werden, sehr vortheilhaft zu verschiedenen weiteren Constructionen benützen.

Damit die nachstehenden erläuternden Figuren möglichst einfach erscheinen und die nothwendigen Constructionen klar hervortreten, setzen wir voraus, dass im allgemeinen bei allen folgenden hierher gehörenden Aufgaben die Lage der einen oder der anderen Ebene Γ mit dem Ellipsoid als gegeben vorliege, dass also deren Construction bereits seitwärts durchgeführt worden sei, bevor auf jene der gestellten Aufgabe entsprechende Ebene übergangen wurde.

§. 618.

245. Aufgabe. Es ist der Schnitt einer beliebigen Geraden mit einem dreiachsigen Ellipsoide zu construieren.

Die gegebene, gegen die Projectionsebenen geneigte Gerade sei (g, g') (Taf. XXXI, Fig. 213).

Wir legen zunächst durch die gegebene Gerade eine vertical-projicierende Ebene P_v. Diese schneidet das Ellipsoid in einer Ellipse, deren eine Achse die Schnittgerade der Ebene P_v mit der Hauptebene η_h ist. Die verticalen Projectionen m_1 und n_1 der Endpunkte dieser Achse sind die Schnittpunkte von $g = P_v$ mit der Ellipse $ABCD$ und können mittelst des Affinkreises K_0 construiert werden. Die horizontalen Projectionen dieser Punkte liegen auf η_h. Wir benöthigen jedoch dieselben ebensowenig als die zweite Achse des Schnittes.

Durch die Schnittellipse der Ebene P_v und durch die Ellipse (γ, γ') kann man (nach Satz 451, Band II) immer zwei Kegelflächen zweiten Grades legen. Eine dieser Kegelflächen wollen wir zur weiteren Construction benützen.

Da die beiden vorgenannten Ellipsen in Ebenen liegen, die zur Hauptebene η_h senkrecht stehen, und nachdem jede derselben in dieser Hauptebene eine Achse — mn, beziehungsweise $m_1 n_1$ — besitzt, so ist einleuchtend, dass diese Hauptebene η_h auch eine Symmetrie-ebene des Kegels sein werde. Hieraus folgt aber unmittelbar weiter, dass der Kegelscheitel in dieser Ebene liegen müsse.

Dieser Kegelscheitel ist leicht zu construieren, wenn man berücksichtigt, dass die Ebene η_h den Kegel in zwei Erzeugenden schneiden werde, welche durch die Punkte m_1, n_1, m und n gehen müssen. Betrachtet man $m_1 n$ und $m n_1$ als die vorbezeichneten Erzeugenden, so liefern dieselben in ihrem gegenseitigen Schnitte den Kegelscheitel (S, S').

Würde man $m m_1$ und $n n_1$ als Erzeugenden wählen, so erhielte man im Schnitte derselben den Scheitel des zweiten durch beide Ellipsen möglichen Kegels.

Vermittelst des Kegelscheitels (S, S') sind wir nun in der Lage, den Schnitt des Ellipsoides mit der vertical-projicierenden Ebene P_v in den Kegelschnitt (γ, γ') zu projicieren. Selbstverständlich werden wir auch die in der Ebene P_v liegende Gerade (g, g') aus dem Punkte (S, S') auf die Ebene Γ des Kegelschnittes (γ, γ') projicieren. Wir werden also mit anderen Worten den Schnitt der durch (S, S') und die Gerade (g, g') gelegten Ebene mit der Ebene Γ aufsuchen. Letzteres kann einfach in nachstehender Weise geschehen.

Die Gerade (g, g') selbst schneidet die vertical-projicierende Ebene Γ in dem Punkte (δ, δ'); ferner trifft die durch (S, S') parallel zu (g, g') gezogene Gerade die Ebene Γ im Punkte (x_1, x'_1), so dass sich die gesuchte Schnittgerade (g_γ, g'_γ) direct als die Verbindungsgerade der beiden Punkte (δ, δ') und (x_1, x'_1) ergibt.

Die Gerade (g_γ, g'_γ) wird die Ellipse (γ, γ') in zwei Punkten (α, α') und (β, β') treffen, welche, indem wir (S, S') als Projectionscentrum auffassen, nichts anderes als die Projectionen jener beiden Punkte darstellen, in welchen die Gerade (g, g') die in der Ebene P_v liegende Schnittellipse trifft.

Die besagten Punkte (α, α') und (β, β') werden nunmehr anstandslos bestimmt werden können, da sich deren horizontale Projectionen α' und β' unmittelbar als die Schnittpunkte von g'_γ mit dem Kreise γ' ergeben.

Projiciert man diese Punkte (α, α') und (β, β') von (S, S') aus auf die Gerade (g, g') zurück, so erhält man daselbst jene Punkte (a, a') und (b, b'), in welchen (g, g') die Ellipse, die sich als der Schnitt des Ellipsoides mit der Ebene P_v ergibt, schneidet, mithin das gegebene dreiachsige Ellipsoid selbst trifft.

§. 619.

246. Aufgabe. **Es ist der Schnitt eines dreiachsigen Ellipsoides mit einer beliebigen Ebene durch ein Paar seiner conjugierten Durchmesser darzustellen.**

Die schneidende Ebene $E_v E_h$ (Taf. XXXI, Fig. 214) trifft die Ebene η_h in einer Geraden (s, s'). Bestimmen wir weiters die Schnittpunkte m_1 und n_1 der genannten Schnittgeraden (s, s') mit der Hauptellipse $(ABCD, A'B'C'D')$ durch Zuhilfenahme des Affinkreises K_0, sowie ferner die Tangenten t_1 und t_2 der Ellipse $ABCD$ in eben diesen beiden Punkten.

Da die Punkte m_1 und n_1 der schneidenden Ebene und dem Ellipsoide angehören, so sind dieselben bereits zwei Punkte des gesuchten Schnittes.

Nachdem ferner die Tangenten t_1 und t_2 in den Punkten m_1 und n_1 der Hauptellipse $ABCD$ gleichzeitig die Verticaltracen der vertical-projicierenden Tangentialebenen des Ellipsoides in diesen Punkten repräsentieren, so stellen sie auch die Verticalprojectionen der Tangenten an die Schnittellipse in den betreffenden Punkten m_1 und n_1 dar, oder mit anderen Worten: die Verticalprojection des Schnittes der Ebene $E_v E_h$ mit dem Ellipsoide ist jene Ellipse, welche durch die Punkte m_1 und n_1 geht und in denselben von den Geraden t_1 und t_2 berührt wird.

Construieren wir weiters die Schnittgerade (ϱ, ϱ') der Ebene $E_v E_h$ mit der Ebene $\Gamma_v \Gamma_h$, so trifft diese den Kegelschnitt (γ, γ') in zwei Punkten (x, x') und (y, y'), welche sich unmittelbar in der hori-

zontalen Projection als die Schnitte x' und y' von ϱ' mit dem Kreise γ' ergeben. Offenbar sind auch diese beiden Punkte (x,x') und (y,y') wieder zwei Punkte der gesuchten Schnittellipse (Σ, Σ'),

Von der verticalen Projection Σ der letzteren sind sonach vier Punkte m_1, n_1, x und y, und die Tangenten t_1 und t_2 in den beiden erstgenannten Punkten bekannt. Es unterliegt demnach auch keiner Schwierigkeit, zwei conjugierte Durchmesser der genannten Verticalprojection Σ zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir die verticale Projection der Schnittellipse Σ als collinear mit einem, den beiden Tangenten t_1 und t_2 eingeschriebenen Kreise Σ_0. Dabei repräsentiert der Schnittpunkt C_0 dieser Tangenten t_1 und t_2 das Collineationscentrum. Der Berührungssehne $m^0{}_1\, n^0{}_1$ des Kreises Σ_0 mit den Tangenten t_1 und t_2 entspricht collinear die Berührungssehne $m_1\, n_1$. Die beiden letztgenannten Geraden schneiden sich mithin in einem Punkte δ_1 der Collineationsachse.

Bestimmt man ferner mittelst der Collineationsstrahlen die den Punkten x und y collinearen Punkte x_0 und y_0 auf dem Kreise Σ_0 (sind x und y durch m_1 und n_1 getrennt, so gilt das Gleiche auch von x_0 und y_0, es sind also auch x_0 und y_0 durch $m_1{}^0$ und $n_1{}^0$ getrennt anzunehmen), so erhält man im Schnitte δ_2 der beiden collinearen Geraden xy und $x_0 y_0$ einen zweiten Punkt der Collineationsachse, welch letztere demnach als die Verbindungsgerade C_a der Punkte δ_1 und δ_2 vollkommen bestimmt ist.

Um nun c o n j u g i e r t e D u r c h m e s s e r von Σ zu bestimmen, ziehen wir den zur Collineationsachse C_a senkrechten Durchmesser z_0 des Kreises Σ_0 und ermitteln die demselben collinear entsprechende Gerade z.

Den Endpunkten a_0 und b_0 von z_0 entsprechen collinear die Punkte a und b auf der Geraden z, und es ist leicht einzusehen, dass ab einen Durchmesser von Σ darstelle. Die Tangenten des Kreises Σ_0 in a_0 und b_0 sind nämlich senkrecht zu z_0, also parallel zur Collineationsachse; es müssen denselben daher auch zur Collineationsachse parallele Tangenten von Σ in den Punkten a und b entsprechen.

Hieraus ist aber auch sofort zu ersehen, dass der dem Durchmesser z conjugierte Durchmesser von Σ zur Collineationsachse parallel sein werde. Der besagte Durchmesser ergibt sich als die Gerade v, welche durch den Mittelpunkt o von Σ (Halbierpunkt von ab) parallel zu C_a gezogen wird. Die Endpunkte dieses Durchmessers erhält man unmittelbar, indem man die demselben entsprechende Gerade v_0 aufsucht. Letztere geht durch den dem Punkte o collinear entsprechenden Punkt o_0 parallel zur Collineationsachse C_a und trifft den Kreis Σ_0

in c_0 und d_0. Die den letztgenannten Punkten entsprechenden Punkte c und d sind bereits die gesuchten Endpunkte.

Die Verticalprojection Σ des gesuchten Schnittes ist somit durch ein Paar conjugierter Durchmesser ab und cd dargestellt. Berücksichtigt man, dass diese (bei orthogonaler Projection) nothwendig die Projectionen zweier conjugierter Durchmesser der Schnittellipse selbst sind, so werden, wenn man zu den Geraden $z(ab)$ und $v(cd)$ die Horizontalprojectionen z' $(a'b')$ und v' $(c'd')$ in der Ebene $E_v E_h$ bestimmt, diese wieder zwei conjugierte Durchmesser der Horizontalprojection Σ' des verlangten Schnittes repräsentieren; es sind demnach $(ab, a'b')$ und $(cd, c'd')$ die conjugierten Durchmesser des gesuchten Schnittes (Σ, Σ').

Wir werden an späterer Stelle, nachdem wir Tangentialebenen an ein dreiachsiges Ellipsoid zu legen im Stande sein werden, einfachere Methoden zur Bestimmung des ebenen Schnittes kennen lernen.

§. 620.

247. Aufgabe. **Es ist der Schnitt eines dreiachsigen Ellipsoides mit einer Durchmesserebene zu ermitteln.**

Es sei $E_v E_h$ (Taf. XXXII, Fig. 215) die schneidende Ebene, welche, der Voraussetzung gemäß, durch den Mittelpunkt (O, O') des Ellipsoides geht. Dieselbe wird das Ellipsoid in einer Ellipse schneiden, deren Mittelpunkt, wie bereits bekannt, mit dem Mittelpunkte (O, O') des Ellipsoides zusammenfällt. Es wird daher jede in der Ebene $E_v E_h$ durch den Punkt (O, O') geführte Gerade ein Durchmesser des gesuchten Schnittes sein.

Um möglichst einfach ein Paar conjugierter Durchmesser des Schnittes zu bestimmen, ermitteln wir vor allem die Schnittgerade (s, s') der Ebene $E_v E_h$ mit der Hauptebene η_h. Die so erhaltene Schnittgerade (s, s') ist offenbar ein Durchmesser der gesuchten Schnittellipse sowohl, als auch der Hauptellipse $(ABCD, A'B'C'D')$.

In letzterer Eigenschaft ist es besonders leicht, dessen Endpunkte (m_1, m'_1) und (n_1, n'_1) zu bestimmen. Die Verticalprojectionen m_1 und n_1 derselben ergeben sich nämlich als die Schnittpunkte von s mit der Ellipse $ABCD$, vermittelst des affinen Kreises K_0, und können mit Hilfe des letzteren auch die parallelen Tangenten t_1 und t_2 der Ellipse $ABCD$ in den Punkten m_1 und n_1 construiert werden. Die Horizontalprojectionen m'_1 und n'_1 ergeben sich sofort in $s' = \eta_h$.

Wir erhalten demnach einen Durchmesser des gesuchten Schnittes in $(m_1 n_1, m'_1 n'_1)$ dargestellt. Es handelt sich somit

bloß noch darum, den ihm conjugierten Durchmesser zu construieren. Zu diesem Zwecke stellen wir folgende Betrachtung an.

Die Gerade $(m_1 n_1, m'_1 n'_1)$ ist auch ein Durchmesser der Hauptellipse $(ABCD, A'B'C'D')$. Die Tangenten t_1 und t_2 der letzteren in m_1 und n_1 repräsentieren gleichzeitig die Verticaltracen der verticalprojicierenden Tangentialebenen des Ellipsoides in den Punkten (m_1, m'_1) und (n_1, n'_1). Besagte Tangentialebenen sind selbstverständlich untereinander parallel. Die Schnitte der letztgenannten Ebenen mit der Ebene $E_v E_h$ sind demnach zwei parallele Tangenten der Schnittellipse in den Endpunkten des Durchmessers $(m_1 n_1, m'_1 n'_1)$; die Richtung derselben stimmt folglich mit der des diesem Durchmesser conjugierten Durchmessers überein.

Zieht man demnach die Gerade r parallel zu t_1, t_2 durch O, so erhält man die Verticalprojection des dem Durchmesser $(m_1 n_1, m'_1 n'_1)$ conjugierten Ellipsen-Durchmessers. Da derselbe in der Ebene $E_v E_h$ liegt, so ist dessen Horizontalprojection r' aus der Verticalprojection r leicht abzuleiten.

Es erübrigt jetzt noch, die Endpunkte dieses Durchmessers, d. h. die Schnittpunkte der Geraden (r, r') mit dem Ellipsoide zu bestimmen.

Zu diesem Behufe legen wir durch (r, r') die vertical-projicierende Ebene P_v. Diese schneidet das Ellipsoid nach einer Ellipse, deren eine Durchmesser $m_2 n_2$ gleichzeitig ein Durchmesser der Hauptellipse $(ABCD, A'B'C'D')$ ist. Die Endpunkte m_2 und n_2 desselben erhalten wir im Schnitte von $P_v = r$ mit der Ellipse $ABCD$ durch Zuhilfenahme des affinen Kreises K_0. Die Horizontalprojectionen m'_2 und n'_2 benöthigen wir zu den weiteren Constructionen ebenso wenig, wie den zweiten Durchmesser.

Durch den besagten Schnitt und durch den Kegelschnitt (γ, γ') können wir, da beide Kegelschnitte einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt (O, O') besitzen, einen Cylinder legen. Die Erzeugenden dieses Cylinders sind, nachdem beide Kegelschnitte gegen die Hauptebene η_h symmetrisch liegen, parallel zu dieser letzteren, und ihre Verticalprojectionen sind speciell zu den Geraden $m_2 n$ und $m n_2$ (oder $n m_2$ und $n n_2$) parallel.

Vermittelst dieses Cylinders projiciert sich der Schnitt des Ellipsoides mit der Ebene P_v in den Kegelschnitt (γ, γ').

Projicieren wir gleichzeitig auch die Gerade (r, r') auf die Ebene Γ, so erscheint dieselbe in (r_0, r'_0) dargestellt.

Führt man die Schnittpunkte (p_0, p'_0) und (q_0, q'_0) der Geraden (r_0, r'_0) mit dem Kegelschnitte (γ, γ') (in der horizontalen Projection

ergeben sich diese Schnitte, da γ' ein Kreis ist, unmittelbar) vermittelst Projection parallel zu mn_2 in die Gerade (r, r') zurück, so repräsentieren sie daselbst die Schnittpunkte (p, p') und (q, q') der Geraden (r, r') mit dem Kegelschnitte in P_v, also auch die Schnitte mit dem Ellipsoide; es sind sonach (p, p') und (q, q') die gesuchten Durchmesser-Endpunkte.

§. 621.

248. Aufgabe. **Die Kreisebenen des dreiachsigen Ellipsoides sind zu construieren.**

Ausnahmsweise geben wir diesmal dem Ellipsoide eine solche Lage, dass dessen mittlere Achse CD (Taf. XXXI, Fig. 216) verticalprojicierend und die kleine Achse EF zur Grundlinie parallel wird. Die große Achse AB bleibt jetzt wie vorher horizontal-projicierend. Durch die mittlere Achse $(CD, C'D')$ legen wir, indem wir $(CD, C'D')$ als Durchmesser betrachten, eine Kugel (S, S_1').

Da die Berührebenen sowohl des Ellipsoides als auch der Kugel in den Endpunkten (C, C') und (D, D') dieser Achse senkrecht auf derselben sind, nachdem also die Kugel das Ellipsoid in den beiden Punkten (C, C') und (D, D') berührt, so müssen sich (nach Satz 449, Band II) die beiden Flächen nach ebenen Curven schneiden, welche, da die eine von ihnen eine Kugel ist, nur Kreise sein können. Dass diese Kreise reell sind, ist, da ein Theil des Ellipsoides innerhalb, ein anderer Theil außerhalb der Kugel liegt, unschwer zu erkennen.

Es wird sich nun um die Construction der beiden Kreise und ihrer Ebenen handeln.

Auf Grund des bereits citierten Satzes 449, Band II) gehen die beiden ebenen Schnitte durch die beiden Berührungspunkte (C, C') und (D, D') der Flächen; die gesuchten Kreisebenen enthalten also die mittlere Achse $(CD, C'D')$ des Ellipsoides.

Zur Bestimmung der besagten Ebenen wird daher nur noch die Kenntnis eines Punktes jedes Kreisschnittes erforderlich sein, oder mit anderen Worten, es wird die Kenntnis zweier dem Ellipsoide und der Kugel gemeinschaftlicher Punkte genügen.

Um diese Punkte zu finden, denken wir uns die Kugel sowohl, als auch das Ellipsoid durch die zur Achse $(CD, C'D')$ senkrechte, also zur verticalen Projectionsebene parallele Hauptebene geschnitten. Hiedurch ergibt sich als Schnitt mit dem Ellipsoide die Hauptellipse $(ABEF, A'B'E'F')$ und mit der Kugel der mit dieser Ellipse concentrische Kreis (S, S'_1).

Kreis und Ellipse werden sich in vier Punkten schneiden, welche zu zweien in zwei gemeinschaftlichen Durchmessern der beiden

Curven liegen. Bezeichnete Punkte können folgendermaßen bestimmt werden.

Nennen wir den einen Punkt, in welchen der über der Achse EF beschriebene Kreis K'_0 die Achse AB schneidet, α, und beschreiben wir über αB als Durchmesser einen Kreis (K), welcher den Kreis S in dem Punkte β treffen möge, so entsteht das bei β rechtwinklige Dreieck $\alpha\beta B$. Dieses Dreieck drehen wir um O so lange, bis die Kathete βB zur großen Achse AB senkrecht wird. Letzteres wird einfach dadurch erreicht, dass man die Gerade $O\xi\eta$ parallel zu $\alpha\beta$ zieht. Dieselbe trifft beziehungsweise die Kreise K'_0 und K_0 in ξ und η, oder auf der entgegengesetzten Seite des Mittelpunktes O in ξ_1 und η_1.

Führt man ferner durch ξ die Gerade ξm parallel zu AB und durch η die Gerade ηm senkrecht zu AB, so schneiden sich die beiden genannten Geraden ξm und ηm in einem Punkte m. Das Dreieck $\xi m \eta$ ist bei m rechtwinklig; die Hypotenuse $\xi\eta$ desselben ist der Hypotenuse αB des Dreieckes $\alpha\beta B$ und ferner ist der Winkel bei η jenem bei B gleich, da die Schenkel dieser beiden Winkel wechselseitig auf einander senkrecht stehen. Die Dreiecke $\xi m \eta$ und $\alpha B \beta$ sind mithin congruent; es muss folglich der Punkt m auf dem Kreise S liegen.

Weiters ist, auf Grund einer sehr geläufigen Ellipsenconstruction, unschwer zu erkennen, dass der Punkt m auch der Ellipse $ABCD$ angehöre, dass also m einer der vier Schnittpunkte des Kreises S mit der Ellipse $ABEF$ sei. Ein zweiter dieser Punkte ist der dem Punkte m diametral entgegengesetzte Punkt n. Die beiden anderen Schnittpunkte m_1 und n_1 liegen, in Bezug auf die Achsen AB und EF, zu m und n symmetrisch.

Die Punkte m und n bestimmen mit der mittleren Achse $(CD, C'D')$ die vertical-projicierende Ebene $C_v C_h$, während die Punkte m_1 und n_1 mit der Achse $(CD, C'D')$ die vertical-projicierende Ebene $C'_v C'_h$ feststellen. Den früheren Betrachtungen gemäß werden nunmehr durch diese beiden Ebenen die Kreisebenen des dreiachsigen Ellipsoides dargestellt.

Die Richtigkeit unserer Erörterungen kann nachträglich auch der vollführten Construction entnommen werden.

Die Ebene $C_v C_h$ schneidet nämlich das Ellipsoid in einem Kegelschnitte, dessen eine Achse $(CD, C'D')$ ist. Die andere Achse desselben ist der Durchmesser mn der Hauptellipse $(ABEF, A'B'E'F')$, welcher in der Ebene $C_v C_h$ liegt.

Nachdem aber die Länge dieses Durchmessers jenem der Achse $(EF, E'F')$ der Construction zufolge gleich ist, so besitzt der in der

Ebene $C_v C_h$ liegende Kegelschnitt zwei gleich lange Achsen, ist mithin ein Kreis. Das Gleiche lässt sich bezüglich des Schnittes der Ebene $C'_v C'_h$ nachweisen.

§. 622.

249. Aufgabe. **Ein dreiachsiges Ellipsoid ist durch eine Ebene in einem Kreise von gegebenem Radius zu schneiden.**

Wir denken uns behufs einfacher Durchführung des gestellten Problems das Ellipsoid wieder in derjenigen Stellung abgebildet, die wir gelegentlich der Lösung der vorhergehenden Aufgabe wählten; wir setzen also die mittlere Achse CD (Taf. XXXI, Fig. 217) als vertical-projicierend voraus und ermitteln, sowie dort auch hier, die beiden Kreisebenen $C_v C_h$ und $C'_v C'_h$.

Da bekanntlich ein dreiachsiges Ellipsoid (siehe §. 621) zwei Scharen reeller Kreisschnitte zulässt und andererseits parallele Schnitte einer solchen Fläche mit einer Ebene stets einander ähnlich sind, so muss auch die Ebene des zu bestimmenden Kreises nothwendig zu einer der beiden Kreisebenen $C_v C_h$ oder $C'_v C'_h$ parallel sein.

Nehmen wir, um einen bestimmten Constructionsfall vor Augen zu haben, an, die gesuchte Kreisschnittsebene sollte eine zur Kreisebene $C_v C_h$ parallele Lage besitzen. Nachdem die Ebene $C_v C_h$ vertical-projicierend ist, so muss es selbstverständlich auch die gesuchte Ebene sein.

Der Mittelpunkt der Ellipse, in welcher eine vertical-procierende Ebene das Ellipsoid schneidet, ist aber, wie wir bereits (Aufgabe 241) wissen, stets in der zur verticalen Projectionsebene parallelen Hauptebene gelegen. Ferner ist bekannt, dass jene Punkte, in welchen die schneidende Ebene die in dieser Hauptebene liegende Ellipse trifft, die Endpunkte der einen Achse der Schnittellipse repräsentieren. Die besagten Endpunkte werden daher in verticaler Projection als die Schnittpunkte der verticalen Trace der projicierenden (schneidenden) Ebene mit der Verticalprojection der genannten Hauptellipse dargestellt erscheinen.

Wenden wir diese Resultate auf den vorliegenden Fall an. Eine vertical-projicierende Ebene wird das Ellipsoid in einer Ellipse schneiden, deren eine Achse in der zur verticalen Projectionsebene parallelen Hauptebene η_h liegt. Die Achsenendpunkte dieser Ellipse werden die Schnittpunkte der Verticaltrace mit der in dieser Hauptebene liegenden Ellipse $ABEF$ sein.

Ist die schneidende Ebene überdies zur Kreisebene $C_v C_h$ parallel, so wird die genannte Achse offenbar nichts anderes als

den in der Hauptebene η_h liegenden Durchmesser des Schnittkreises darstellen, und wird dieser, da derselbe zur verticalen Projectionsebene parallel ist, in wahrer Größe erscheinen.

Soll daher das Ellipsoid durch eine zur Ebene $C_v C_h$ parallele Ebene $E_v E_h$ nach einem Kreise vom gegebenen Radius r geschnitten werden, so muss, den vorstehenden Betrachtungen gemäß, die Verticaltrace E_v dieser Ebene mit jener zu C_v parallelen Sehne der Ellipse $ABEF$ zusammenfallen, welche die Länge $2r$ besitzt.

Die gestellte Aufgabe reduciert sich somit auf die: „parallel zu dem Durchmesser C_v der Ellipse $ABEF$ eine Sehne von der gegebenen Länge $2r$ einzuschalten“.

Der letzteren Forderung kann, wie folgt, entsprochen werden. Die Mittelpunkte aller zu C_v parallelen Sehnen liegen auf dem Durchmesser d der Ellipse $ABEF$, welcher dem Durchmesser C_v conjugiert ist und vermittelst des Affinkreises K_0 über AB leicht construiert werden kann.

Tragen wir nun auf C_v zu beiden Seiten vom Mittelpunkte O die Strecken $O\mu = O\nu$ gleich dem gegebenen Radius r auf, und ziehen wir durch die Endpunkte μ und ν dieser Strecken die Geraden l_1 und l_2 parallel zum Durchmesser d, so ist einleuchtend, dass jede zwischen l_1 und l_2 eingeschaltete, zu C_v parallele Gerade die Länge $2r$ haben müsse.

Bestimmen wir daher die Schnittpunkte m_1, m_2 und n_1, n_2 dieser beiden Geraden l_1 und l_2 mit der Ellipse $ABEF$ durch Zuhilfenahme des Affinkreises K_0, so werden die Verbindungsgeraden m_1, n_1 und m_2, n_2 offenbar parallel zu C_v sein, und da sie zwischen den Geraden l_1 und l_2 liegen, die gesuchten Ellipsensehnen von der Länge $2r$ darstellen.

Gleichzeitig repräsentieren, wie aus den früheren Betrachtungen folgt, diese Sehnen m_1, n_1 und m_2, n_2 die Verticaltracen E^1_v und E^2_v jener Ebenen, welche der Kreisschnittsschar $C_v C_h$ angehören und das Ellipsoid in Kreisen von dem gegebenen Radius r schneiden.

Die Mittelpunkte dieser beiden Kreise sind die Punkte (o_1, o'_1) und (o_2, o'_2), in welchen m_1, n_1 und m_2, n_2 den Durchmesser d der Hauptellipse $ABEF$ treffen.

Selbstverständlich gibt es noch zwei anderweitige Ebenen, welche der gestellten Aufgabe gleichfalls entsprechen; es sind dies jene, welche zu der zweiten Kreisebene $C'_v C'_h$ parallel sind. Da die beiden Kreisebenen zu der doppelt-projicierenden Hauptebene symmetrisch sind, so ist leicht einzusehen, dass auch die beiden anderen Kreisschnittsebenen

zu den eben gefundenen (E_1 und E_2), in Bezug auf diese Hauptebene (CD, AB), symmetrisch liegen.

§. 623.

250. Aufgabe. **Es ist die Tangentialebene eines dreiachsigen Ellipsoides in einem seiner Punkte zu construieren.**

Erste Methode.

Wir setzen diesfalls voraus, dass, sowie es ursprünglich von uns angenommen wurde, wieder die mittlere Achse (CD, $C'D'$) des Ellipsoides zur Grundlinie parallel sei.

Die Tangentialebene in dem gegebenen Punkte des Ellipsoides, dessen Verticalprojection a (Taf. XXXII, Fig. 218) sei, wird bestimmt sein, sobald man zwei Tangenten des Ellipsoides in dem betreffenden Punkte a kennt.

Führen wir vor allem durch den Punkt a die zur horizontalen Projectionsebene parallele Ebene e_v. Diese Ebene schneidet das Ellipsoid in einer zur Hauptellipse $CDEF$ ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipse, welche durch den Punkt (a, a') geht, und welche wir (wie in Aufgabe 240), vermittelst des in der Achse (AB, $A'B'$) liegenden Kegelscheitels (S_1, S'_1) in diese Hauptellipse projicieren.

Die Horizontalprojection a' des durch seine verticale Projection a gegebenen Punktes (a, a') finden wir sodann, wie in der eben citierten Aufgabe 240) angegeben wurde, als Projection eines gewissen Punktes a'_0 der Hauptellipse ($C'D'E'F'$).

Die Tangente (t_1, t'_1) der in der Ebene e_v liegenden Schnittellipse im Punkte (a, a') kann, durch Projection vom Centrum (S_1, S'_1), aus der Tangente (t_0, t'_0) der Hauptellipse $C'D'E'F'$ im entsprechenden Punkte a'_0 abgeleitet werden. Wir construieren daher zuerst die Tangenten (t_0, t'_0) von $C'D'E'F'$ im Punkte a'_0 durch Zuhilfenahme des Affinkreises K'_0 und projicieren einen ihrer Punkte, etwa (δ_0, δ'_0), von (S_1, S'_1) in die Ebene e_v nach (d_1, d'_1). Die Verbindungsgerade (t_1, t'_1) der Punkte (a, a') und (d_1, d'_1) liefert bereits die gesuchte Tangente.

Zur Construction der Tangentialebene in (a, a') benöthigen wir jedoch noch eine zweite Tangente. Als solche betrachten wir die Tangente (t_2, t'_2) im Punkte (a, a') an jene Ellipse, in welcher das Ellipsoid von der durch (a, a') parallel zur verticalen Projectionsebene gelegten Ebene e'_h geschnitten wird. Diese Ellipse, welche ähnlich und ähnlich gelegen mit der Hauptellipse ($ABCD$, $A'B'C'D'$) ist, kann von einem gewissen Punkte (S_2, S'_2) der Achse (EF, $E'F'$) in

diese Hauptellipse projiciert werden. Die Construction des Punktes (S_2, S'_2) wurde analog jener in Aufgabe 240) vollführt. Der Punkt (a, a') wird hierdurch nach (a^2_0, a''_2) der vorgenannten Hauptellipse und die Tangente (t_2, t'_2) der Schnittellipse im Punkte (a, a') gleichzeitig in die Tangente (t^2_0, t''_0) der Hauptellipse $(ABCD, A'B'C'D')$ im entsprechenden Punkte (a^2_0, a''_0) projiciert.

Construiert man daher vermittelst des Affinkreises K_0 die Tangente t^2_0 von $ABCD$ im Punkte a^2_0, so hat man durch a bloß die Parallele t_2 zu dieser Tangente t^2_0 zu ziehen, um die verticale Projection der gesuchten Ellipsentangente zu erhalten.

Die horizontale Projection t^1_2 derselben ist selbstverständlich identisch mit der Horizontaltrace e'_h der Ellipsenebene.

Die Ebene $T_v T_h$, welche durch die beiden Tangenten (t_1, t_1') und (t_2, t'_2) gelegt werden kann, ist sodann die gesuchte Berührebene des Ellipsoides im Punkte (a, a').

§. 624.

Zweite Methode.

Diese Methode beruht zwar auf demselben Principe wie die eben besprochene, gestattet jedoch einige constructive Vereinfachungen.

Setzen wir diesbezüglich wieder voraus, es sei a (Taf. XXXII, Fig. 219) die verticale Projection des gegebenen Berührungspunktes; ferner wollen wir annehmen, dass auch der Kegelschnitt (γ, γ'), dessen Horizontalprojection der über $E' F'$ als Durchmesser beschriebene Kreis γ' ist, bestimmt worden sei.

Denken wir uns durch a eine beliebige vertical-projicierende Ebene gelegt. Der Einfachheit wegen wählen wir jene Ebene e', welche durch den Scheitel A des Ellipsoides geht. Diese Ebene wird das Ellipsoid in einer durch den Punkt (a, a') und durch den Scheitel (A, A') gehenden Ellipse schneiden, deren eine Achse in der Hauptebene η_h liegt und den Punkt A mit dem zweiten Schnittpunkte m_1 der Geraden e'_v und der Ellipse $ABCD$ (vermittelst des Affinkreises K_0 leicht zu construieren) verbindet. Durch die obbezeichnete Ellipse und durch die Ellipse (γ, γ') lässt sich, wie wir wissen, ein Kegel legen, dessen Scheitel jener Punkt (S_1, S'_1) in der Hauptebene η_h ist, in welchem sich die Verbindungsgeraden $m_1 m$ und $A n$ schneiden. Die Rechtfertigung dieses Vorganges kann der in Aufgabe 245) gegebenen, leicht entnommen werden.

Betrachtet man (S_1, S'_1) als Projectionscentrum, so wird die Ellipse der Ebene e' in die Ellipse (γ, γ'), der Punkt (a, a') in einen

Punkt (a_1, a'_1) von (γ, γ') projiciert — woraus sich durch Zurückprojicieren des Punktes a'_1 vermittelst des Projectionsstrahles $S'_1 a'_1 a$, unmittelbar die Horizontalprojection a' ergibt — und weiters die Tangente (t_1, t'_1) der Schnittellipse im Punkte (a, a'), in die Tangente (τ_1, τ'_1) der Ellipse (γ, γ') in dem entsprechenden Punkte (a_1, a'_1) projiciert. Die horizontale Projection τ'_1 kann direct als die Tangente der Kreises γ' im Punkte a'_1 gezeichnet werden.

Um somit die Tangente (t_1, t'_1) im Punkte (a, a') zu erhalten, hat man bloß die Tangente (τ_1, τ'_1) vom Centrum (S_1, S'_1) in die Ebene e' zurück zu projicieren. Berücksichtigt man aber, dass dieselbe einerseits durch (a, a') gehen muss und dass andererseits der Punkt (δ_1, δ'_1), in welchem (τ_1, τ'_1) die Ebene e'_v schneidet, bei der Projection ungeändert bleibt, so ergibt sich die gesuchte Tangente (t_1, t'_1) direct als die Verbindungsgerade der beiden Punkte (a, a') und (δ_1, δ'_1).

Legen wir nun durch den Punkt (a, a') eine zweite verticalprojicierende Ebene, allenfalls jene e^2_v, welche gleichzeitig durch den Scheitel (B, B') geht, so schneidet diese Ebene das Ellipsoid in einer Ellipse, welche vermittelst eines gewissen Punktes (S_2, S'_2) in der Hauptebene η_h, der in gleicher Weise wie vorher der Punkt (S_1, S'_1) gefunden wird, in die Ellipse (γ, γ') projiciert werden kann. Hierbei projiciert sich der Punkt (a, a') in einen Punkt (a_2, a'_2) der Ellipse (γ, γ'). Führt man in dem letztgenannten Punkte an die Ellipse (γ, γ') die Tangente (τ_2, τ'_2), was, da die Horizontalprojection γ' ein Kreis ist, leicht geschehen kann, so schneidet diese Tangente (τ_2, τ'_2) die Ebene e^2_v in einem Punkte (δ_2, δ'_2). Verbindet man endlich den so erhaltenen Punkt (δ_2, δ'_2) mit dem Punkte (a, a') durch die Gerade (t_2, t'_2), so repräsentiert diese die Tangente der mit der Ebene e^2_v resultierenden Schnittellipse des Ellipsoides im Punkte (a, a').

Legt man schließlich durch die beiden Tangenten (t_1, t'_1) und (t_2, t'_2) eine Ebene $T_v T_h$, so ist diese die verlangte Berührebene des dreiachsigen Ellipsoides im gegebenen Punkte (a, a').

Dritte Methode.

Sei wieder a (Taf. XXXII, Fig. 220) die Verticalprojection des gegebenen Berührungspunktes. Die Berührebene wird die Hauptebene η_h in einer Geraden (p_1, p'_1) schneiden, welche (nach Satz 379) die Polare des Punktes a in Bezug auf die in derselben Hauptebene liegende Ellipse $(ABCD, A'B'C'D')$ ist.

Behufs Construction dieser Polare p_1 verbinden wir den Punkt a mit den beiden Punkten A und B der Ellipse $ABCD$ und bestimmen die zweiten Schnittpunkte m_1 und n_1 der Geraden Aa und Ba mit der Ellipse $ABCD$ vermittelst des Affinkreises K_0.

Die Punkte $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$, in welchen sich die zwei Paare von Gegenseiten An_1 und Bm_1; AB und $m_1 n_1$ schneiden, sind bekanntlich zwei Punkte der gesuchten Polare p_1. Durch die Verbindungsgerade $\varDelta_1 \varDelta_2$ der Punkte $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ ist dieselbe somit vollständig bestimmt. Die Horizontalprojection p'_1 dieser Polare (p_1, p'_1) fällt in die horizontale Trace η_h der Hauptebene.

Die zu suchende Berührebene wird selbstverständlich die Gerade (p_1, p'_1) enthalten.

Ferner ist (nach Satz 379) auch die Trace der Berührebene auf der zur horizontalen Projectionsebene parallelen Hauptebene ε_v, die Polare der Horizontalprojection a' des Berührungspunktes in Bezug auf die in dieser Ebene liegende Hauptellipse $C'D'E'F'$.

Um diese Polare zu construieren, ziehen wir die Geraden $C'a'$ und $D'a'$ und bestimmen durch Zuhilfenahme des Affinkreises K'_0, die zweiten Schnittpunkte m_2 und n_2 der besagten Geraden mit der Ellipse $C'D'E'F'$.

Die Schnittpunkte δ_1 und δ_2 der zwei Paare von Gegenseiten $C'n_2$ und $D'm_2$; $C'D'$ und $m_2 n_2$ des Viereckes $C'D'n_2 m_2$ sind zwei Punkte der gesuchten Polare p'_2. Die Verticalprojection p_2 liegt in der Trace ε_v.

Die durch die beiden Geraden (p_1, p'_1) und (p_2, p'_2) gelegte Ebene $T_v T_h$ bestimmt sonach die gesuchte Berührebene.

§. 625.

Vierte Methode.

Diese beruht auf der Anwendung des Satzes: „dass die Tangentialebene einer Fläche zweiten Grades in einem Punkte (a, a') zu der dem Durchmesser $(a\,O, a'O')$ conjugierten Durchmesserebene parallel ist“ und auf jener des Satzes: „dass die einem Durchmesser conjugierte Durchmesserebene alle zu diesem Durchmesser parallelen Sehnen halbiert“.

Ist demnach (a, a') (Taf. XXXII, Fig. 221) der gegebene Berührungspunkt, dessen eine Projection direct bestimmt war, während dessen andere Projection auf Grund vorhergegangener Erörterungen festgestellt wurde.

Verbinden wir den Punkt (a, a') mit dem Mittelpunkte (O, O') des Ellipsoides und legen wir an beliebiger Stelle eine zu diesem Durchmesser $(Oa, O'a')$ parallele Ebene $e_v e_h$, die überdies verticalprojicierend ist, also eine Ebene, deren Verticaltrace e_v zu $O a$ parallel läuft, und zeichnen wir ferner in dieser Ebene zwei beliebige zu $(Oa, O'a')$

parallele Geraden (s_1, s'_1), (s_2, s'_2). Die Verticalprojectionen derselben fallen offenbar mit e_v zusammen, während die Horizontalprojectionen durch zwei beliebige zu $O'a'$ parallele Geraden s'_1 und s'_2 dargestellt werden.

Die Wahl dieser Geraden (s_1, s'_1) und (s_2, s'_2) treffen wir derart, dass sie das Ellipsoid in reellen Punkten schneiden. Die Schnittpunkte der bezeichneten Geraden (s_1, s'_1) und (s_2, s'_2) mit dem Ellipsoide ermitteln wir folgendermaßen.

Wir denken uns die in der zur verticalen Projectionsebene parallelen Hauptebene η_h liegende Achse $m_1 n_1$ der Ellipse, in welcher das Ellipsoid von der Ebene $e_v e_h$ geschnitten wird, festgestellt (dieselbe ist ihrer Länge nach durch die Schnittpunkte m_1 und n_1 der Trace e_v mit der Hauptellipse $ABCD$ bestimmt) und projicieren vermittelst des Kegelscheitels (S, S'), welcher sich im Schnitte der Verbindungsgeraden mm_1 und nn_1 ergibt, die vorgenannte Schnittellipse auf die Ellipse (γ, γ'). Gleichzeitig projicieren wir vom Punkte (S, S') aus, die beiden Geraden (s_1, s'_1) und (s_2, s'_2) auf die Ebene Γ des Kegelschnittes (γ, γ') nach (σ_1, σ'_1) und (σ_2, σ'_2).

Die letztgenannten Geraden schneiden den Kegelschnitt (γ, γ') in zwei Paaren von Punkten (α_1, α'_1) und (β_1, β'_1); (α_2, α'_2) und (β_2, β'_2), welche, da sich der Kegelschnitt (γ, γ') in seiner Horizontalprojection als Kreis γ' darstellt, direct construiert werden können.

Projiciert man die genannten Punkte vom Centrum (S, S') aus auf die Geraden (s_1, s'_1) und (s_2, s'_2), so erhält man daselbst beziehungsweise die Schnittpunkte (a_1, a'_1) und (b_1, b'_1); (a_2, a'_2) und (b_2, b'_2) dieser Geraden mit der in der Ebene $e_v e_h$ liegenden Ellipse des Ellipsoides, also auch die Schnitte von (s_1, s'_1) und (s_2, s'_2) mit dem Ellipsoide selbst.

Hiernach ergeben sich in $(a_1 b_1, a'_1 b'_1)$ und $(a_2 b_2, a'_2 b'_2)$ zwei zu dem Durchmesser $(aO, a'O')$ parallele Sehnen des Ellipsoides. Führen wir durch deren Halbierungspunkte (x_1, x'_1) und (x_2, x'_2), sowie durch den Mittelpunkt (O, O') des Ellipsoides eine Ebene $D_v D_h$, so repräsentiert diese (nach Satz 435, Band II) die dem Durchmesser $(aO, a'O')$ conjugierte Durchmesserebene. Legt man endlich durch den Punkt (a, a') eine Ebene $T_v T_h$ parallel zur Ebene $D_v D_h$, so ist dieselbe (nach Satz 435, Band II) die geforderte Berührebene des Ellipsoides im Punkte (a, a').

§. 626.

251. Aufgabe. **Es ist die Ebene der Berührungscurve eines dem dreiachsigen Ellipsoid umschriebenen Kegels unter der Voraus-**

setzung zu bestimmen, dass der Scheitel des Kegels auf einer der drei Hauptachsen der Fläche liegt.

Der gegebene Kegelscheitel auf der kleinen Achse $(EF, E'F')$ des Ellipsoides sei (P, P') (Taf. XXXII, Fig. 222).

Gestützt auf den Satz 401, Band II), kann als bekannt vorausgesetzt werden, dass die Ebene der Berührungscurve eines einer Fläche zweiten Grades umschriebenen Kegels gleichzeitig die Polarebene des Kegelscheitels sei und dass die besagte Ebene als solche parallel zu derjenigen Durchmesserebene ist, welche zu dem durch den Kegelscheitel gehenden Durchmesser conjugiert ist.

Im vorstehenden Falle liegt der Kegelscheitel (P, P') auf der Achse $(EF, E'F')$. Die dieser Achse conjugierte Durchmesserebene ist die zur verticalen Projectionsebene parallele Hauptebene η.

Zu der letztbezeichneten Ebene, also auch zur verticalen Projectionsebene, muss daher die gesuchte Ebene der Berührungscurve parallel sein. Es ist mithin von selbst einleuchtend, dass die Kenntnis der Lage irgend eines Punktes dieser Ebene, zu deren vollständigen Darstellung ausreichen werde.

Führen wir demgemäß von dem Punkte (P, P') an die Hauptellipse in der Ebene ε_v eine Tangente. Die horizontale Projection t' dieser Tangente und jene c' ihres Berührungspunktes erhalten wir durch die Tangente von P' an die Ellipse $C'D'E'F'$ mittelst des affinen Kreises K'_2.

Die Verticalprojection c des Berührungspunktes ergibt sich sodann unmittelbar in der Trace ε_v der Hauptebene.

Der Punkt (c, c') ist somit, als der Berührungspunkt einer von (P, P') ausgehenden Tangente des Ellipsoides, ein Punkt der Berührungscurve, während die Ebene der letzteren, die durch (c, c') parallel zur verticalen Projectionsebene gelegte Ebene ist. Die Horizontaltrace B_h derselben wird demnach die durch c' parallel zur Grundlinie gezogene Gerade sein.

Die Berührungscurve selbst ist ähnlich mit der Hauptellipse $(ABCD, A'B'C'D')$ und da, wie leicht einzusehen, (c, c') einer ihrer Achsenendpunkte ist, kann dieselbe ohne weiters durch ihre Achsen $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$ dargestellt werden.

In gleicher Weise hätte man vorzugehen, wenn der gegebene Kegelscheitel (P, P') in einer der beiden anderen Achsen $(AB, A'B')$ oder $(CD, C'D')$ gegeben wäre. Im ersteren Falle ist die Ebene der Berührungscurve zur horizontalen Projectionsebene parallel, im zweiten Falle hingegen ist dieselbe parallel zur Profilebene, oder mit anderen Worten, senkrecht zu der Grundlinie.

§. 627.

252. Aufgabe. Es ist die Ebene der Berührungscurve eines dreiachsigen Ellipsoides mit einem demselben umschriebenen Kegel unter der Voraussetzung zu construieren, dass der Kegelscheitel in einer der drei Hauptebenen des Ellipsoides liege.

Nehmen wir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, an, dass der Kegelscheitel (PP') (Taf. XXXII, Fig. 223) in der zur verticalen Projectionsebene parallelen Hauptebene η gegeben sei.

Es ist diesfalls unschwer nachzuweisen, dass unter den gestellten Bedingungen die Ebene der Berührungscurve zur Hauptebene η senkrecht stehen müsse.

Wir haben bereits (Band II, Satz 406) nachgewiesen, dass, wenn ein Punkt in einer gegebenen Ebene liegt, dessen Polarebene in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades durch den Pol jener Ebene gehen müsse. Im vorliegenden Falle liegt der Punkt (P, P') in der Hauptebene η; die Polarebene desselben, d. i. die Ebene der gesuchten Berührungscurve, muss daher durch den Pol der Ebene η gehen. Nachdem aber η eine Hauptebene des Ellipsoides ist, so wird deren Pol der unendlich ferne Punkt der ihr conjugierten Achse $(EF, E'F')$ sein und jede durch diesen Pol gehende Ebene, also auch die verlangte Ebene der Berührungscurve, muss daher eine zur Ebene η senkrechte Lage besitzen.

Hieraus folgt weiter, dass die Kenntnis zweier Punkte der gesuchten Ebene zu ihrer graphischen Darstellung vollkommen genügen werde.

Zwei solche Punkte sind unmittelbar die Berührungspunkte der von (P, P') aus an die in der Hauptebene η liegende Ellipse $(ABCD, A'B'C'D')$ gezogenen Tangenten, da, wie selbstverständlich, diese Punkte der Berührungscurve angehören müssen. Die verticalen Projectionen dieser Berührungspunkte sind die Punkte p_1 und p_2, in welchen die von P aus an die Ellipse $ABCD$ gezogenen Tangenten t_1 und t_2 diese letztere berühren. Dieselben können auf bekannte Weise mittelst des Affinkreises K_0 construiert werden. Die horizontalen Projectionen p'_1 und p'_2 liegen in der Trace η_h der Hauptebene.

Die Ebene der Berührungscurve geht nunmehr durch die beiden Punkte (p_1, p'_1) und (p_2, p'_2) und steht auf der Hauptebene η senkrecht; dieselbe ist somit jene vertical-projicierende Ebene $B_v B_h$, deren Verticaltrace B_v durch die Verbindungsgerade der beiden Verticalprojectionen p_1 und p_2 dargestellt erscheint.

Die Berührungscurve selbst ergibt sich als Schnitt dieser Ebene $B_v B_h$ mit dem Ellipsoide und kann, wie in Aufgabe 241) gezeigt wurde, construiert werden. Zu bemerken wäre hierbei nur noch, dass die Gerade $(p_1 p_2, p'_1 p'_2)$ bereits die eine (in der Hauptebene η liegende) Achse dieses Schnittes repräsentiere.

In gleicher Weise hätte man vorzugehen, wenn der Scheitel (P, P') in einer oder der anderen der beiden Hauptebenen gegeben wäre. Liegt der besagte Scheitel in der zur horizontalen Projectionsebene parallelen Hauptebene ε_v, so ist die Ebene der Berührungscurve eine horizontal-projicierende; liegt derselbe hingegen in der zur Grundlinie senkrechten Hauptebene $\pi_v \pi_h$, so ist die obgenannte Ebene parallel zur Grundlinie.

S. 628.

253. Aufgabe. Es ist die Ebene der Berührungscurve eines dreiachsigen Ellipsoides mit einem demselben aus einem beliebigen Punkte im Raume umschriebenen Kegel zu construieren.

Der gegebene Kegelscheitel, welcher irgend eine ganz beliebige Lage im Raume haben möge, sei (P, P') (Taf. XXXIII, Fig. 224).

Die Berührungscurve des von (P, P') aus dem Ellipsoide umschriebenen Kegels ist bekanntlich der Ort der Berührungspunkte aller durch (P, P') an das Ellipsoid geführten Tangenten, oder auch aller durch (P, P') gehenden Tangentialebenen des Ellipsoides.

Sehen wir zunächst nach, ob es unter den Tangentialebenen, welche durch (P, P') an das Ellipsoid gelegt werden können, nicht auch solche gibt, deren Construction sich besonders leicht und rasch bewerkstelligen, respective durchführen lässt. Man findet diesbezüglich sofort, dass dies jene Tangentialebenen sein werden, welche beziehungsweise zur verticalen oder horizontalen Projectionsebene senkrecht stehen.

Jede zur verticalen Projectionsebene senkrecht stehende Berührebene des dreiachsigen Ellipsoides tangiert dasselbe in einem Punkte der zur verticalen Projectionsebene parallelen Hauptellipse $(ABCD, A'B'C'D')$ und die Verticaltrace einer jeden solchen verticalprojicierenden Tangentialebene des Ellipsoides ist eine Tangente an die Verticalprojection $ABCD$ der genannten Hauptellipse. Soll nun die Berührebene überdies durch den Punkt (P, P') gehen, so muss die Verticaltrace derselben den Punkt P enthalten.

Führen wir daher von P aus an die Ellipse $ABCD$ die beiden möglichen Tangenten und bestimmen wir deren Berührungspunkte p_1 und p_2, so repräsentieren diese, den eben angestellten Betrachtungen gemäß, die verticalen Projectionen der Berührungspunkte jener durch

(P, P') gehenden vertical-projicierenden Berührebenen des Ellipsoides. Die horizontalen Projectionen p'_1 und p'_2 derselben liegen selbstverständlich in der Horizontaltrace η_h der Hauptebene η.

Hiernach kennen wir bereits zwei Punkte der Berührungscurve, also auch zwei Punkte der Ebene derselben.

Construieren wir weiters auch von P' aus die beiden Tangenten an die Horizontalprojection $(C'D'E'F')$ der in der horizontalen Hauptebene ε_v liegenden Hauptellipse, und bestimmen wir deren Berührungspunkte π'_1 und π'_2, so folgt aus gleichen Gründen wie oben, dass π'_1 und π'_2 die Horizontalprojectionen der Berührungspunkte der beiden durch (P, P') gehenden horizontal-projicierenden Berührebenen des Ellipsoides darstellen. Die verticalen Projectionen π_1 und π_2 dieser Punkte liegen in der Verticaltrace ε_v der Hauptebene ε.

Nachdem nun die Punkte (π_1, π'_1) und (π_2, π'_2) ebenfalls der Berührungscurve, also auch ihrer Ebene angehören, so müssen sich die beiden Verbindungsgeraden $(\pi_1 \pi_2, \pi'_1 \pi'_2)$ und $(p_1 p_2, p'_1 p'_2)$ in einem Punkte (r, r') schneiden. Letzterer Umstand kann nebenbei als Controle für die Genauigkeit der Construction benützt werden.

Die durch $(p_1 p_2, p'_1 p'_2)$ und $(\pi_1 \pi_2, \pi'_1 \pi'_2)$ gelegte Ebene $B_v B_h$ repräsentiert bereits die gesuchte Ebene der Berührungscurve. Die Berührungscurve selbst ist sodann der Schnitt der Ebene $B_v B_h$ mit dem Ellipsoide.

Man kann sich nunmehr auch leicht die Überzeugung verschaffen, dass die beiden Projectionen der Berührungscurve vermöge der bisher vorgenommenen Constructionen durch die bereits ermittelten Punkte und Tangenten vollständig bestimmt sind.

Da nämlich die vier Punkte (p_1, p'_1), (p_2, p'_2), (π_1, π'_1) und (π_2, π'_2) der Berührungscurve angehören, so geht die verticale Projection derselben durch die vier Punkte p_1, p_2, π_1 und π_2. Nachdem aber überdies die Punkte p_1 und p_2 der Verticalcontour $ABCD$ des Ellipsoides angehören, so muss die verticale Projection der Berührungscurve die verticale Contour in den eben genannten Punkten berühren, in denselben also die bereits früher construierten Tangenten t_1 und t_2 besitzen.

Hiernach sind von jenem Kegelschnitte, welcher die Verticalprojection der Berührungscurve darstellt, vier Punkte p_1, p_2, π_1, π_2 und die Tangenten in zweien derselben, d. i. in p_1 und p_2 bekannt. Es können daher (so wie in früheren Aufgaben) mit Zuhilfenahme eines collinearen Kreises anstandslos zwei conjugierte Durchmesser dieser Verticalprojection gefunden werden. Ebenso ist die horizontale Projection der Berührungscurve eine Ellipse, von welcher vier Punkte

p'_1, p'_2, π'_1, π'_2 und die Tangenten τ'_1 und τ'_2 in zweien derselben, d. i. in π'_1 und π'_2, bekannt sind.

Da die Ebene der Berührungscurve eines Ellipsoides mit einem demselben umschriebenen Kegel gleichzeitig die Polarebene des Kegelscheitels in Bezug auf das Ellipsoid darstellt, so ist das eben besprochene Problem mit der folgenden Aufgabe identisch.

§. 629.

254. Aufgabe. **Es ist die Polarebene eines außerhalb des dreiachsigen Ellipsoides liegenden Punktes in Bezug auf das Ellipsoid zu construieren.**

Liegt jedoch der Punkt (P, P') innerhalb, so müssen anderweitige Constructionen behufs Bestimmung der Polarebene desselben durchgeführt werden. Wir wollen, um diese Constructionen kennen zu lernen, zuvor noch die folgende „umgekehrte" Aufgabe lösen.

§. 630.

255. Aufgabe. **Der Pol einer Ebene ist in Bezug auf ein dreiachsiges Ellipsoid unter der Voraussetzung zu construieren, dass die Ebene das Ellipsoid in keiner reellen Curve schneidet.**

Die gegebene Ebene, von welcher wir, wie eben bemerkt wurde, voraussetzen, dass sie keine reellen Punkte mit dem Ellipsoide gemein habe, sei $p_v p_h$ (Taf. XXXIII, Fig. 225).

Um den Pol dieser Ebene zu finden, werden wir von einem in der Theorie der Flächen zweiten Grades bewiesenen Satze (Satz 405, Band II) Gebrauch machen. Mit Zugrundelegung desselben ist der Schnittpunkt dreier Ebenen der jeweilige Pol jener Ebene, welche die Pole dieser drei Ebenen verbindet.

Wählen wir demgemäß in der gegebenen Ebene drei beliebige Punkte und bestimmen wir deren Polarebenen, so werden sich diese letzteren in einem Punkte schneiden, welcher den gesuchten Pol darstellt.

Der Einfachheit der Construction wegen, werden wir aber diese drei Punkte nicht willkürlich annehmen, sondern insbesondere diejenigen drei Punkte (P_1, P'_1), (P_2, P'_2) und (P_3, P'_3) wählen, in welchen die gegebene Ebene $p_v p_h$ die drei Achsen $(AB, A'B')$, $(CD, C'D')$, $(EF, E'F')$ des Ellipsoides schneidet.

Als Polarebene des in der Achse $(AB, A'B')$ liegenden Punktes (P_1, P'_1) ergibt sich (vermöge der in Aufgabe 251) entwickelten Constructionen) die zur horizontalen Projectionsebene parallele Ebene e^1_v;

als Polarebene des in der Achse $(CD, C'D')$ liegenden Punktes (P_2, P'_2) die zur Grundlinie senkrechte Ebene $e^2_v e^2_h$, und endlich als Polarebene des in der Achse $(EF, E'F')$ liegenden Punktes (P_3, P'_3), die zur verticalen Projectionsebene parallele Ebene e^3_h.

Der Schnittpunkt (P, P') dieser drei Ebenen e^1_v, $e^2_v e^2_h$ und e^3_h, dessen Projectionen gleichzeitig die Schnittpunkte ihrer Tracen sind, repräsentiert, den früheren Betrachtungen gemäß, bereits den gesuchten Pol der gegebenen Ebene (p_h, p_v).

Durch Umkehrung des eben Dargethanen wird es nun auch leicht sein, das nachstehende Problem zu lösen.

§. 631.

256. Aufgabe. Es ist die Polarebene eines Punktes innerhalb eines Ellipsoides in Bezug auf dieses letztere zu construieren.

Sind (P, P') (Taf. XXXIII, Fig. 225) die Projectionen des gegebenen Punktes, so legen wir durch denselben drei zu den Projectionsebenen parallele Ebenen und zwar die Ebene e^1_v parallel zur horizontalen, $e^2_v e^2_h$ parallel zur Kreuzriss-Projectionsebene und e^3_v parallel zur verticalen Projectionsebene, und bestimmen die Pole (P_1, P'_1), (P_2, P'_2) und (P_3, P'_3) dieser drei Ebenen. Letzteres kann in höchst einfacher Weise vollführt werden.

Um beispielsweise den Pol (P_1, P'_1) der horizontalen Ebene e^1_v zu construieren, haben wir bloß zu berücksichtigen, dass derselbe einerseits in der horizontal-projicierenden Achse (AB, AB') liege und dass, wenn wir jenen Punkt, in welchem die Ebene e^1_v diese Achse AB trifft, π_1 nennen, die vier Punkte P_1, π_1, A und B harmonisch sein müssen. Der Punkt P_1 ergibt sich daher als Schnittpunkt der Achse AB mit der Tangente des über AB beschriebenen Kreises K_0 in einem der beiden Punkte a oder a_1, in welchem der Kreis K_0 von e^1_v geschnitten wird. In ganz gleicher Weise wird man die beiden übrigen Punkte (P_2, P'_2) und (P_3, P'_3) bestimmen können.

Die Ebene $p_v p_h$, welche nunmehr durch diese drei Punkte (P_1, P'_1), (P_2, P'_2) und (P_3, P'_3) gelegt werden kann, ist (nach Satz 405, Band II), die geforderte Polarebene des Punktes (P, P').

§. 632.

257. Aufgabe. Der einer gegebenen Ebene conjugierte Durchmesser eines dreiachsigen Ellipsoides ist zu construieren.

Die Construction dieses Durchmessers lässt sich unmittelbar aus den in der Aufgabe 255) erörterten Constructionen ableiten. Der einer

gegebenen Ebene $p_v p_h$ (Taf. XXXIII, Fig. 225) conjugierte Durchmesser ist bekanntlich die Verbindungsgerade des Poles (P, P') dieser Ebene mit dem Mittelpunkte (O, O') des Ellipsoides.

Construiert man daher, wie eben gezeigt wurde, den Pol (P, P') mittelst der drei in den Hauptachsen liegenden Punkten (P_1, P'_1), (P_2, P'_2) und (P_3, P'_3) und verbindet man denselben mit dem Mittelpunkte (O, O') des Ellipsoides durch eine Gerade (d, d'), so repräsentiert diese letztere den gesuchten, der Ebene $p_v p_h$ conjugierten Durchmesser.

Mit den nämlichen Mitteln lässt sich sogleich auch das folgende Problem constructiv durchführen.

§. 633.

258. Aufgabe. Parallel zu einer gegebenen Ebene sind an ein dreiachsiges Ellipsoid Berührebenen zu legen, und deren Berührungspunkte zu construieren.

Die gegebene Ebene sei wieder $p_v p_h$ (Taf. XXXIII, Fig. 225). Auf Grundlage des Satzes 435, Band II) wissen wir, dass die Berührungspunkte der zu dieser Ebene $p_v p_h$ parallelen Tangentialebenen des Ellipsoides gleichzeitig die Endpunkte jenes Durchmessers sind, welcher der Ebene $p_v p_h$ conjugiert ist.

Construieren wir demnach, wie in der vorhergehenden Aufgabe angedeutet wurde, den der Ebene $p_v p_h$ conjugierten Durchmesser (d, d'), so haben wir nur dessen Schnittpunkte mit dem Ellipsoide auf bekannte Weise [etwa mit Zuhilfenahme des Kegelschnittes (γ, γ')] zu bestimmen, um in den letzteren die gesuchten Berührungspunkte zu erhalten. Die Ebenen, welche durch die besagten Schnittpunkte parallel zur Ebene $p_v p_h$ gelegt werden können, sind sodann die verlangten Tangentialebenen.

§. 634.

259. Aufgabe. Im Innern eines dreiachsigen Ellipsoides ist ein Punkt (P, P') gegeben; durch diesen Punkt ist eine Ebene von der Eigenschaft zu legen, dass sie das Ellipsoid in einer Ellipse schneidet, welche den gegebenen Punkt zum Mittelpunkte hat.

Soll der im Innern des Ellipsoides gegebene Punkt (P, P') (Taf. XXXIII, Fig. 225) der Mittelpunkt eines ebenen Schnittes des Ellipsoides sein, so können wir von dem Satze 435, Band II) Gebrauch machen, dass „der Mittelpunkt eines ebenen Schnittes einer Fläche zweiten Grades stets auf dem der schneidenden Ebene conjugierten Durchmesser der Fläche liegen müsse“.

Der bezeichnete Durchmesser ist im vorliegenden Falle bereits bekannt, da derselbe durch die Verbindungsgerade (d, d') des gegebenen Punktes (P, P') mit dem Mittelpunkte (O, O') des Ellipsoides, dargestellt erscheint.

Bestimmen wir weiters zu dem Punkte (P, P') die Polarebene $p_v p_h$, nach der in Aufgabe 256) angegebenen Construction, so repräsentiert diese schon eine von jenen Ebenen aus der Parallelschar, welche dem Durchmesser (d, d') conjugiert ist. Man hat demnach nichts anderes zu thun, als durch den Punkt (P, P') selbst eine Ebene $E_v E_h$ parallel zu dieser Polarebene $p_v p_h$ zu legen.

§. 635.

260. Aufgabe. Die Polare einer gegebenen Geraden in Bezug auf ein dreiachsiges Ellipsoid ist zu construieren.

Die gegebene Gerade, von welcher wir vorderhand voraussetzen wollen, dass sie das Ellipsoid nicht in reellen Punkten schneiden möge, sei (g, g') (Taf. XXXIII, Fig. 226).

Wir wissen, dass, wenn ein Punkt die Gerade (g, g') durchläuft, sich dessen Polarebene um die Polare dieser Geraden dreht, oder mit anderen Worten, dass die Polare einer Geraden, die Schnittgerade der Polarebenen zweier auf der Geraden liegenden Punkte sei (Satz 407 und §. 378, Band II).

Diese letztere Eigenschaft wollen wir hier constructiv verwerten. Selbstverständlich werden wir auf der gegebenen Geraden zwei derartige Punkte wählen, dass sich deren Polarebenen auf eine möglichst einfache Weise bestimmen lassen. Als solche bieten sich diesfalls die Schnittpunkte (P_1, P'_1) und (P_2, P'_2) der gegebenen Geraden (g, g') mit der beziehungsweise zur verticalen oder mit der zur horizontalen Projectionsebene parallelen Hauptebene (η resp. ε) des Ellipsoides dar.

Die Polarebene $p'_v p'_h$ des ersteren Punktes (P_1, P'_1) ist, wie wir in Aufgabe 252) nachgewiesen haben, eine vertical-projicierende Ebene, deren Verticaltrace p'_v, sich als die Verbindungsgerade der Berührungspunkte der von P_1 aus an die Verticalprojection (AB, CD), der in der Hauptebene η liegenden Ellipse, gezogenen Tangenten ergibt.

In gleicher Weise findet man die Polarebene $p^2_v p^2_h$ des Punktes (P_2, P'_2) als eine horizontal-projicierende Ebene $p^2_v p^2_h$, deren horizontale Trace p^2_h durch die Verbindungsgerade der Berührungspunkte jener Tangenten dargestellt ist, die von dem Punkte P'_2 aus an die Horizontalprojection $C'D'E'F'$ der in der Hauptebene ε liegenden Ellipse gezogen werden.

Die Schnittgerade (g_1, g'_1) dieser beiden Ebenen ist sodann, den angestellten Betrachtungen gemäß, die gesuchte Polare. Da aber die eine der Ebenen vertical-projicierend, die andere hingegen horizontal-projicierend ist, so werden offenbar deren gegen die Grundlinie geneigte Tracen p^1_v und p^2_h gleichzeitig die bezüglichen Projectionen g_1 und g'_1 der gesuchten Polare darstellen.

Mit derselben Berechtigung können wir selbstverständlich auch die Gerade (g, g') als die Polare von (g_1, g'_1) betrachten. Hieraus ergibt sich unmittelbar die Construction der Polare für den Fall, dass die gegebene Gerade, als welche wir nun (g_1, g'_1) ansehen, das Ellipsoid in zwei reellen Punkten schneidet.

Es ist einleuchtend, dass man unter dieser Voraussetzung die Polare (g, g') anstandslos erhalten wird, wenn man die beiden Punkte (P_1, P'_1) und (P_2, P'_2) derselben construiert und festgestellt hat.

Fassen wir nämlich die Verticalprojection g_1 der gegebenen Geraden als die Polare eines Punktes in Bezug auf die Verticalprojection $ABCD$ der in der Hauptebene η liegenden Ellipse auf, so wird dieser Punkt offenbar kein anderer, als die Verticalprojection P_1 des einen der gesuchten Punkte (P_1, P'_1) sein können. Die Horizontalprojection P'_1 desselben liegt in der Trace η_h der genannten Hauptebene. Der Punkt P_1 wird bestimmt, indem man durch Zuhilfenahme des Affinkreises K_0 die Schnittpunkte der Geraden g_1 mit der Ellipse $ABCD$ ermittelt und die Tangenten der letzteren in den besagten Schnittpunkten construiert. Diese Tangenten werden sich in P_1 schneiden.

In gleicher Weise findet man vermittelst des Affinkreises K'_0 die Horizontalprojection P'_2 des zweiten in der Hauptebene ε liegenden Punktes, als Pol der Horizontalprojection g'_1 in Bezug auf die horizontale Projection $(C'D'E'F')$ der in der Hauptebene ε liegenden Ellipse.

Die Verbindungsgerade (g, g') der beiden Punkte (P_1, P_1') und (P_2, P'_2) repräsentiert sonach die gesuchte Polare der Geraden (g, g').

Es kann übrigens auch vorkommen, dass die gegebene Gerade das Ellipsoid in zwei reellen Punkten trifft, und dass dieselbe trotzdem die Hauptebenen η und ε in Punkten schneidet, welche außerhalb der in diesen Hauptebenen liegenden Ellipsen liegen.

Unter diesen Verhältnissen wird man natürlich von den beiden Schnittpunkten dieser Geraden mit den Hauptebenen η und ε in der früher entwickelten Weise Gebrauch machen können, um die Polare der Geraden festzustellen.

Weiters kann aber auch der Fall eintreten, dass die gegebene Gerade das Ellipsoid in reellen Punkten schneidet, dass aber gleich-

zeitig der Schnittpunkt derselben mit einer der beiden Hauptebenen η und ε außerhalb der in dieser Ebene liegenden Ellipse fällt, der Schnittpunkt mit der anderen hingegen innerhalb der in ihr liegenden Ellipse sich vorfindet.

Unter Zutreffen dieser Umstände wird man von dem erstgenannten Punkte, beispielsweise von (P_1, P'_1), wieder in der früher angegebenen Weise vorgehen und hiedurch eine Ebene $p'_v p'_h$ erhalten, in welcher die gesuchte Polare liegen muss.

Ein zweites Bestimmungsstück ergibt sich, wenn man nach der zweiten Methode von der horizontalen Projection der gegebenen Geraden, welche, der gemachten Voraussetzung zufolge, die Horizontalprojection $(C'D'E'F')$ der in der Hauptebene ε liegenden Ellipse in reellen Punkten schneidet, ausgeht.

Die vorher durchgeführte Construction der Polaren einer Geraden in Bezug auf ein dreiachsiges Ellipsoid lässt sich mit Vortheil auch zur Lösung des nachstehenden Problems verwenden.

§. 636.

261. Aufgabe. **Durch eine gegebene Gerade sind an ein dreiachsiges Ellipsoid Berührebenen zu legen und deren Berührungspunkte zu construieren.**

Die gegebene Gerade, welche, damit die Aufgabe reelle Tangentialebenen zulasse, das Ellipsoid nicht in reellen Punkten schneiden darf, sei (g, g').

Bestimmen wir (wie in Aufgabe 260), die Polare (g_1, g'_1) der gegebenen Geraden (g, g') und construieren wir vermittelst der früher erwähnten Ellipse (γ, γ') die Schnittpunkte (a, a') und (b, b') dieser Polare mit dem Ellipsoide, so stellen diese beiden Punkte, welche nothwendig reell sein werden (wie durch den Satz 409, Band II, bewiesen wurde) die Berührungspunkte der gesuchten, durch (g, g') gehenden Berührebenen des Ellipsoides dar. Letztere können nun auf bekannte Weise als die beziehungsweise durch (g, g') und (a, a'), resp. (b, b') gehenden Ebenen construiert werden.

Die Construction der Schnittpunkte (a, a') und (b, b') der Polare (g_1, g'_1) mit dem Ellipsoide lässt sich rasch durchführen, wenn man von der Schnittellipse des Ellipsoides mit der Ebene $p'_v p'_h$ Gebrauch macht.

Da nämlich die in der Hauptebene η_h liegende Achse dieser Schnittellipse, als die Verbindungsgerade der beiden Berührpunkte π_1 und π_1, als bereits bekannt vorliegt, so kann, wie wir früher zeigten, diese Ellipse auch sofort in die Ellipse (γ, γ') projiciert werden.

§. 637.

262. Aufgabe. **Es ist die Berührungscurve eines dreiachsigen Ellipsoides mit einem demselben umschriebenen Cylinder unter der Voraussetzung zu construieren, dass die Cylindererzeugenden zu einer der Hauptebenen parallel seien.**

Die Gerade (g, g') (Taf. XXXIII, Fig. 227), welche zur verticalen Projectionsebene, also auch zu der Hauptebene η des Ellipsoides parallel ist, betrachten wir als die Richtung der Erzeugenden des dem Ellipsoide umschriebenen Cylinders.

Die Berührungscurve jedes dem Ellipsoide umschriebenen Cylinders ist bekanntlich ein Diametralschnitt des Ellipsoides, und zwar derjenige, dessen Ebene der Richtung der Cylindererzeugenden conjugiert ist.

Im vorliegenden Falle ist die Richtung der Cylindererzeugenden eine zur Hauptebene η parallele; es muss daher die Diametralebene, welche die Berührungscurve enthält, als die der Geraden (g, g') conjugierte Durchmesserebene, den der Hauptebene η conjugierten Durchmesser, d. h. die auf dieser Hauptebene senkrecht stehende Achse $(EF, E'F')$ des Ellipsoides enthalten.

Das Gesagte lässt sich jedoch auch direct aus der nachstehenden Betrachtung folgern.

Die zu bestimmende Berührungscurve ist der geometrische Ort der Berührungspunkte aller parallel zu der Geraden (g, g') an das Ellipsoid gelegten Tangenten oder Tangentialebenen.

Nachdem die gegebene Gerade einerseits als eine zur verticalen Projectionsebene, also auch zur Hauptebene η parallele Gerade vorausgesetzt wurde, und andererseits die Tangentialebenen T_E und T_F des Ellipsoides in den Endpunkten (E, E') und (F, F') der verticalprojicierenden Achse zur verticalen Projectionsebene, also auch zu der gegebenen Geraden (g, g') parallel sind, so folgt, dass die beiden Punkte (E, E') und (F, F') der gesuchten Berührungscurve angehören, dass also die Ebene der letzteren die Achse $(EF, E'F')$ enthalten müsse.

Dies vorausgesetzt, leuchtet sofort auch ein, dass besagte Achse $(EF, E'F')$ gleichzeitig die eine Achse der Berührungscurve darstellen müsse. Denn, wie immer auch die durch die Achse $(EF, E'F')$ gehende Ebene der Berührungscurve liegen möge, sie wird das Ellipsoid stets in einer Ellipse, welche die Punkte (E, E') und (F, F') enthält, und die Tangentialebenen T_E und T_F des Ellipsoides in zwei zu $(EF, E'F')$ senkrechten Tangenten der Schnittellipse schneiden.

Die zweite Achse der Berührungscurve muss, da sie auf der ersteren $(EF, E'F')$ senkrecht steht, nothwendig in der Hauptebene η liegen. Die Endpunkte derselben werden daher der in dieser Hauptebene liegenden Ellipse $(ABCD, A'B'C'D')$ angehören. Andererseits müssen aber auch diese Endpunkte, als Punkte der Berührungscurve, die Berührungspunkte zweier zur Geraden (g, g') parallelen Tangentialebenen des Ellipsoides sein.

Berücksichtigen wir weiters, dass die gesuchten Endpunkte der Hauptellipse $(ABCD, A'B'C'D')$ angehören, und dass das Ellipsoid in allen Punkten dieser Ellipse vertical-projicierende Tangentialebenen besitzt, so folgt, dass die gesuchten Endpunkte keine anderen sein können, als die Berührungspunkte des Ellipsoides mit den zur Geraden (g, g') parallelen, vertical-projicierenden Tangentialebenen, oder, was dasselbe ist, die Berührungspunkte der Hauptellipse $(ABCD, A'B'C'D')$ mit den zur Geraden (g, g') parallelen Tangenten.

Die Verticalprojectionen a und b dieser beiden Punkte ergeben sich demgemäß als die Berührungspunkte der Ellipse (AB, CD) mit den zur Geraden g parallelen Tangenten t_1 und t_2. Die letzteren können, wie bereits vielfach besprochen, vermittelst des Affinkreises K_0 leicht construiert werden. Die Horizontalprojectionen a' und b' erhält man unmittelbar in der Horizontaltrace η_h der Hauptebene η.

Die gesuchte Berührungscurve ist somit durch ihre Achsen $(ab, a'b')$ und $(EF, E'F')$ dargestellt.

Die Verticaltrace P_v der Ebene der Berührungscurve fällt, da die besagte Ebene vertical-projicierend ist, mit der Verticalprojection ab der in der Hauptebene η liegenden Achse der Berührungscurve zusammen.

Die eben durchsprochene Aufgabe führt auch, wie nachstehend gezeigt werden soll, zu einer ebenso einfachen als eleganten Auflösung eines bereits früher behandelten Problems.

§. 638.

263. Aufgabe. Parallel zu einer gegebenen Ebene $E_v E_h$ sind an ein dreiachsiges Ellipsoid die möglichen Berührebenen zu legen und deren Berührungspunkte zu construieren.

Denken wir uns die Verticaltrace E_v (Taf. XXXIII, Fig. 227) dieser Ebene oder eine zu ihr parallele Gerade (g, g') als die Richtung der Erzeugenden eines dem Ellipsoide umschriebenen Cylinders angenommen und bestimmen wir, in Übereinstimmung mit der vorhergehenden Aufgabe, die betreffende Berührungscurve durch deren Achsen $(ab, a'b')$ und $(EF, E'F')$.

Weiters wollen wir noch den Schnitt des umschriebenen Cylinders mit der horizontalen Projectionsebene feststellen. Zu diesem Zwecke wird es genügen, die horizontalen Durchstoßpunkte (α, α'), (β, β'), $(\varepsilon, \varepsilon')$ und (η, η') der durch die Achsenendpunkte (a, a'), (b, b'), (E, E') und (F, F') der Berührungscurve gehenden Cylindererzeugenden zu ermitteln.

Dass der Schnitt des umschriebenen Cylinders mit der horizontalen Projectionsebene eine Ellipse sei, deren Achsen die Geraden $\alpha'\beta'$ und $\varepsilon'\eta'$ sind, bedarf gewiss keines besonderen Nachweises.

Jede Berührebene des Cylinders ist selbstverständlich gleichzeitig eine Berührebene des Ellipsoides. Nachdem aber die Erzeugenden des Cylinders zu der Ebene $E_v E_h$ parallel sind, wird es auch möglich sein, an den Cylinder Berührebenen zu legen, welche eine zur Ebene $E_v E_h$ parallele Lage haben. Diese letztgenannten Berührebenen werden selbstverständlich gleichzeitig auch die gesuchten Tangentialebenen des Ellipsoides repräsentieren.

Die Horizontaltracen dieser Ebenen müssen einerseits zur Horizontaltrace E_h der gegebenen Ebene parallel sein, und andererseits die Horizontalspur des Cylinders, d. i. die Ellipse $(\alpha'\beta', \varepsilon'\eta')$ berühren.

Ziehen wir daher an die Ellipse $(\alpha'\beta', \varepsilon'\eta')$ parallel zu E_h die Tangenten T^1_h und T^2_h, zu welchem Behufe wir von dem über $\alpha'\beta'$ als Durchmesser beschriebenen Kreise und einem der Brennpunkte, allenfalls von f_2 Gebrauch machen, so stellen diese die Horizontaltracen der verlangten Berührebenen dar. Die Verticaltracen T^1_v und T^2_v sind durch die Angabe ihrer Richtung E_v ebenfalls vollständig gegeben.

Es erübrigt jetzt nur noch, die Berührungspunkte dieser Ebenen mit dem Ellipsoide zu construieren.

Um beispielsweise den Berührungspunkt der Ebene $T^1_v T^1_h$ zu ermitteln, construieren wir zunächst mit Zuhilfenahme des zweiten Brennpunktes f_1 den Berührungspunkt π' der Ellipse $(\alpha'\beta', \varepsilon'\eta')$ mit der Horizontaltrace T'_h. Die Verticalprojection π dieses Punktes liegt selbstverständlich in der Grundlinie. Die durch (π, π') zu (g, g') parallel gezogene Gerade (g_1, g'_1) repräsentiert sodann bekanntlich jene Erzeugende, längs welcher der umschriebene Cylinder von der Ebene $T'_v T'_h$ berührt wird. Diese Erzeugende trifft weiters die Berührungscurve $(ab, EF; a'b', E'F')$ des Cylinders in dem, in der verticalen Projection sich unmittelbar ergebenden Punkte (p, p'), welcher offenbar den Berührungspunkt der Ebene $T^1_v T^1_h$ mit dem Ellipsoide darstellt.

In gleicher Weise kann nunmehr auch der Berührungspunkt des Ellipsoides mit der zweiten zu $E_v E_h$ parallelen Berührebene $T^2{}_v T^2{}_h$ construiert werden.

§. 639.

264. Aufgabe. Es ist die Berührungscurve eines dreiachsigen Ellipsoides mit einem demselben umschriebenen Cylinder unter der Voraussetzung zu construieren, dass die Cylindererzeugenden zu irgend einer beliebig gegebenen Geraden (g, g') parallel seien.

Die Berührungscurve ist der geometrische Ort der Berührungspunkte aller zur Geraden (g, g') (Taf. XXXIII, Fig. 228) parallelen Tangenten oder Tangentialebenen des Ellipsoides.

Heben wir unter den zur Geraden (g, g') parallelen Ebenen speciell die projicierenden hervor, so können ebenso einfach als rasch vier besondere Punkte der Berührungscurve ermittelt werden.

Führen wir nämlich an die Verticalprojection $ABCD$ der in der Hauptebene η liegenden Ellipse $(ABCD, A'B'C'D')$ parallel zur Verticalprojection g der gegebenen Geraden (g, g') die Tangenten t_1 und t_2 und construieren wir, durch Zuhilfenahme des Affinkreises K_0, deren Berührungspunkte p_1 und p_2, so stellen diese Tangenten gleichzeitig die Verticaltracen zweier vertical-projicierenden Tangentialebenen des Ellipsoides dar. Die Punkte p_1 und p_2 sind die Verticalprojectionen ihrer Berührungspunkte, und da diese der Hauptellipse $(ABCD, A'B'C'D')$ angehören, so ergeben sich deren Horizontalprojectionen p'_1 und p'_2 unmittelbar in der Trace η_h.

Die beiden Tangentialebenen werden aber auch parallel zu der Geraden (g, g') sein, da dieselben vertical-projicierende Ebenen sind, deren Verticaltracen t_1 und t_2 zur Verticalprojection g dieser Geraden parallel laufen. Eine natürliche Folge hiervon ist, dass deren Berührungspunkte (p_1, p'_1) und (p_2, p_2') Punkte der gesuchten Berührungscurve sind. Die Ebene der letzteren muss daher durch die Verbindungsgerade $(p_1 p_2, p'_1 p'_2)$, welche als Verbindungslinie der Berührungspunkte zweier parallelen Tangentialebenen des Ellipsoides durch den Mittelpunkt (O, O') des letzteren führt, hindurchgehen.

Zieht man ferner parallel zur Horizontalprojection g' an die Horizontalprojection $(C'D'E'F')$ der in der Hauptebene ε_v liegenden Ellipse die Tangenten, und ermittelt deren Berührungspunkte r'_1 und r'_2, so stellen diese letzteren (aus gleichen Gründen wie vorher die Punkte p_1 und p_2) die horizontalen Projectionen zweier der Haupt-

ellipse $(CDEF, C'D'E'F')$ angehörenden Punkte der geforderten Berührungscurve dar. Die verticalen Projectionen r_1 und r_2 derselben ergeben sich unmittelbar in der Trace ε_v der horizontalen Hauptebene des Ellipsoides.

Die Gerade $(r_1 r_2, r'_1 r'_2)$ ist somit ebenso wie die Gerade $(p_1 p_2, p'_1 p'_2)$ ein Durchmesser des Ellipsoides.

Die durch diese beiden Geraden gelegte Ebene $B_v B_h$ ist bereits die Ebene der gesuchten Berührungscurve. Diese letztere ist folglich der Schnitt des Ellipsoides mit der Ebene $B_v B_h$.

Es ist mit keinerlei Schwierigkeit verbunden, irgend ein Paar conjugierter Durchmesser der Berührungscurve zu construieren, wenn man berücksichtigt, dass deren Projectionen auch conjugierte Durchmesser jener Ellipsen Σ und Σ' seien, welche die Projectionen der Berührungscurve darstellen.

Betrachten wir zu diesem Zwecke die verticale Projection Σ der Berührungscurve. Dieselbe ist eine Ellipse, welche für's erste durch die vier Punkte p_1, p_2, r_1 und r_2 führt. Da aber die Tangentialebenen des Ellipsoides in den Punkten (p_1, p'_1) und (p_2, p'_2) projicierende Ebenen mit den Verticaltracen t_1 und t_2 sind, so sind t_1 und t_2 gleichzeitig auch die Tangenten der Verticalprojectionen aller durch (p_1, p'_1) und (p_2, p'_2) gehenden Curven auf dem Ellipsoide, also auch Tangenten der Ellipse Σ. Nachdem t_1 und t_2 überdies zu einander parallel sind, so ist $p_1 p_2$ ein Durchmesser der Ellipse Σ, und die durch dessen Mittelpunkt O parallel zu t_1 und t_2 gezogene Gerade d_2 der demselben conjugierte Durchmesser.

Die Endpunkte dieses Durchmessers können vermittelst eines affinen, den Tangenten t_1 und t_2 eingeschriebenen Kreises, aus den bekannten Stücken p_1, p_2, r_1, t_1 und t_2 gefunden werden.

Hat man auf diese Weise ein Paar conjugierter Durchmesser der Verticalprojection Σ der Berührungscurve gefunden, und bestimmt man deren Horizontalprojectionen als in der Ebene $B_v B_h$ liegende Geraden, so werden diese letzteren wieder conjugierte Durchmesser der Horizontalprojection Σ' der Berührungscurve darstellen, und zwar werden beide Paare conjugirter Durchmesser die Projectionen eines Paares conjugierter Durchmesser der Berührungscurve selbst repräsentieren.

Vermittelst des einem Ellipsoide parallel zu einer Geraden umschriebenen Cylinders lässt sich auch das nachstehende, bereits mit Hilfe polarer Beziehungen gelöste Problem durchführen.

§. 640.

265. Aufgabe. Durch eine Gerade (g, g') sind an ein dreiachsiges Ellipsoid Berührungsebenen zu legen, und deren Berührungspunkte zu construieren.

Zunächst sei das Princip, welches bei der nachstehenden Lösung zur Verwendung gelangt, gekennzeichnet.

Wird parallel zu einer Geraden irgend einer Fläche ein Cylinder umschrieben, welcher dieselbe längs einer Curve Σ berührt, so sind die Tangentialebenen des Cylinders, welche durch die genannte Gerade gehen, gleichzeitig Tangentialebenen der Fläche. Die Berührungspunkte derselben ergeben sich im Schnitte der betreffenden Berührungserzeugenden des Cylinders mit der Curve Σ.

Hiernach haben wir also im vorliegenden Falle parallel zu der Geraden (g, g') (Taf. XXXIV, Fig. 229) dem Ellipsoide einen Cylinder zu umschreiben, und an denselben durch die Gerade (g, g') Tangentialebenen zu legen. Letzteres wird am bequemsten dadurch zu bewerkstelligen sein, dass wir den Schnitt des dem Ellipsoide umschriebenen Cylinders mit der horizontalen Projectionsebene bestimmen.

Ziehen wir demnach vermittelst des Affinkreises K^0_1 an die Horizontalprojection $(C'D'E'F')$ der in der horizontalen Hauptebene ε_v liegenden Ellipse des Ellipsoides, parallel zur Horizontalprojection g' der gegebenen Geraden (g, g'), die Tangenten t'_1 und t'_2, und ermitteln wir deren Berührungspunkte c' und d', so repräsentieren diese Tangenten, wie in der vorhergehenden Aufgabe gezeigt wurde, gleichzeitig auch die Horizontaltracen zweier horizontal-projicierenden zur Geraden (g, g') parallelen Tangentialebenen des Ellipsoides, und mithin auch zwei parallele Tangenten des Horizontalschnittes des umschriebenen Cylinders, indem dieser Schnitt als die Enveloppe der Horizontaltracen aller zur Geraden (g, g') parallelen Tangentialebenen des Ellipsoides betrachtet werden kann.

Die Punkte c' und d' sind die Horizontalprojectionen der Berührungspunkte der genannten Tangentialebenen; die Verticalprojectionen c und d dieser Berührpunkte liegen in der Verticaltrace ε_v der Hauptebene ε.

Die durch die beiden Punkte (c, c') und (d, d') parallel zu (g, g') gezogenen Geraden sind zwei Erzeugenden des dem Ellipsoide parallel zu (g, g') umschriebenen Cylinders. Die horizontalen Durchstoßpunkte γ und δ dieser Erzeugenden sind daher zwei Punkte der Horizontalspur des Cylinders, und zwar, da sie in den Tangenten t'_1 und t'_2 dieser Horizontalspur liegen, die Berührungspunkte der letzteren.

Aus dieser einfachen Betrachtung folgt aber unmittelbar, dass $\gamma\delta$ ein Durchmesser der Horizontalspur sei und dass die Gerade, welche durch den Halbierungspunkt o desselben parallel zu t'_1 und t'_2 gezogen wird, den dem besagten Durchmesser conjugierten Durchmesser darstelle.

Nachdem also von jener Ellipse, in welcher der umschriebene Cylinder die horizontale Projectionsebene schneidet, ein Durchmesser $\gamma\delta$ der Länge und Lage nach, und der ihm conjugierte Durchmesser der Lage nach bekannt ist, wird zu dessen vollständiger Bestimmung die Kenntnis eines seiner Punkte genügen. Um letzteren festzustellen, führen wir an die Verticalprojection $ABCD$ der in der Hauptebene η liegenden Ellipse parallel zur verticalen Projection g der gegebenen Geraden (g, g'), mit Zuhilfenahme des Affinkreises K_0, die Tangenten und ermitteln deren Berührungspunkte a und b. Die letzteren stellen sodann die Verticalprojectionen der Berührungspunkte des Ellipsoides mit den beiden zur Geraden (g, g') parallelen, vertical-projicierenden Tangentialebenen, oder mit anderen Worten, die Verticalprojectionen der beiden in der Hauptebene η liegenden Punkte der Berührungscurve dar. Die horizontalen Projectionen a' und b' derselben liegen demgemäß in der Horizontaltrace η_h der genannten Hauptebene.

Führen wir nun durch einen dieser beiden Punkte, etwa durch (a, a') eine Parallele zur Geraden (g, g'), so repräsentiert dieselbe eine Erzeugende des umschriebenen Cylinders, während ihr Horizontaldurchstoßpunkt α einen Punkt der Horizontalspur dieses Cylinders darstellt.

Die Horizontaltracen der zu bestimmenden, durch die Gerade (g, g') gehenden Berührebenen des Cylinders sind die von dem Horizontaldurchstoßpunkte h' der gegebenen Geraden (g, g') an dessen Horizontalspur gezogenen Tangenten. Wir construieren die besagten Tangenten sowie auch deren Berührungspunkte, indem wir die Ellipse (Horizontalspur des Cylinders) als affin mit einem Kreise K^0_0 betrachten, welchen wir den beiden Tangenten t'_1 und t'_2 an beliebiger Stelle einschreiben. Dem Durchmesser $\gamma\delta$ der Ellipse entspricht sodann der Berührungsdurchmesser $\gamma_0\delta_0$ des Kreises K^0_0. Die beiden genannten Geraden ergeben im Schnitte ϱ einen Punkt der Affinitätsachse A_α.

Da t'_1 und t'_2 die Richtung der Affinitätsstrahlen repräsentieren, so findet man auch den dem Punkte α der Ellipse entsprechenden Punkt α_0 des Kreises K^0_0 mittelst der durch α parallel zu t'_1 gezogenen Geraden. Die beiden entsprechenden Geraden $\gamma_0\alpha_0$ und $\gamma\alpha$ schneiden sich in einem zweiten Punkt σ der Affinitätsachse A_α, welche somit durch die Gerade $\varrho\sigma$ dargestellt erscheint.

Bestimmen wir weiters den dem Punkte h' affin entsprechenden Punkt h_0, und ziehen wir von demselben die Tangenten τ^0_1 und τ^0_2 an den Kreis K^0_0, welche die Affinitätsachse A_a in den Punkten μ und ν treffen mögen, so repräsentieren die diesen Tangenten affin entsprechenden Geraden $h'\mu = T^1_h$ und $h'\nu = T^2_h$ die von h' ausgehenden Tangenten an die Horizontalspur des umschriebenen Cylinders, also die Horizontaltracen der gesuchten Berührebenen. Die Verticaltracen T^1_v und T^2_v können unmittelbar verzeichnet werden, da dieselben durch den Verticaldurchstoßpunkt v der Geraden (g, g') gehen.

Es erübrigt jetzt nur noch, die Berührungspunkte dieser Ebenen $T^1_v T^1_h$ und $T^2_v T^2_h$ mit dem Ellipsoide zu ermitteln.

Bestimmen wir den Berührungspunkt der einen Ebene, beispielsweise von $T^1_v T^1_h$, so wird um den zweiten Berührpunkt zu bestimmen, dasselbe Verfahren anzuwenden sein.

Den Berührungspunkt π' der Horizontaltrace T^1_h mit der Horizontalspur des Cylinders kann man direct aus dem ihm affin entsprechenden Punkte π_0 (Berührungspunkt des Kreises K^0_0 mit der Tangente τ^0_1) ableiten. Die Verticalprojection π dieses Punktes liegt selbstverständlich in der Grundlinie. Die durch (π, π') parallel zu (g, g') gezogene Gerade (g_1, g'_1) repräsentiert sodann diejenige Erzeugende des umschriebenen Cylinders, längs welcher dieser von der Ebene $T^1_v T^1_h$ berührt wird. Besagte Erzeugende wird die Berührungscurve des Cylinders in dem gesuchten Berührungspunkte der Ebene $T^1_v T^1_h$ mit dem Ellipsoide schneiden.

Da die Ebene der Berührungscurve als jene Ebene $B_v B_h$ erhalten wird, welche durch $(ab, a'b')$ und $(cd, c'd')$ gelegt werden kann, so wird sich der zu bestimmende Berührungspunkt (p_1, p'_1) als deren Durchstoßpunkt mit der Cylindererzeugenden (g_1, g'_1) ergeben.

Der eben behufs Lösung des besprochenen Problems benützte, dem Ellipsoide umschriebene Cylinder kann auch zur Construction des folgenden Problems dienen.

§. 641.

266. Aufgabe. Für eine gegebene Lichtstrahlen-Richtung ist der Schlagschatten eines dreiachsigen Ellipsoides auf eine der Projectionsebenen zu construieren.

Oder mit anderen Worten:

Für eine gegebene Richtung des schief-projicierenden Strahles ist die Contour eines orthogonal dargestellten dreiachsigen Ellipsoides auf einer der Projectionsebenen zu ermitteln.

Da es infolge des gleichen Verhaltens des Ellipsoides gegen die einzelnen Projectionsebenen ganz gleichgiltig ist, auf welcher der Projectionsebenen wir den Schlagschatten oder beziehungsweise die Contour des Ellipsoides bestimmen, so wählen wir wieder die horizontale Projectionsebene.

Stellt (g, g') (Taf. XXXIV, Fig. 229) die gegebene Richtung der Lichtstrahlen dar, so ist der zu suchende Schlagschatten (resp. die Contour) nichts anderes, als die bereits bestimmte Horizontalspur des dem Ellipsoide parallel zu der Geraden (g, g') umschriebenen Cylinders.

Es wird daher nur darauf ankommen, ein Paar conjugierter Durchmesser dieser Horizontalspur zu finden. In der vorhergegangenen Aufgabe fanden wir, dass $\gamma\delta$ einen Durchmesser und die durch den Halbierpunkt o desselben parallel zu t'_1 und t'_2 gezogene Gerade den zu $\gamma\delta$ conjugierten Durchmesser repräsentiere. Dieser letztere schneidet den Affinkreis K^0_0 in zwei Punkten ξ_0 und η_0, deren leicht zu construierende, affin entsprechende Punkte ξ und η die Endpunkte des zweiten Durchmessers darstellen. Der Schlagschatten oder die Contour des Ellipsoides auf der horizontalen Projectionsebene ist somit, wie verlangt wurde, durch ein Paar conjugierter Durchmesser $\gamma\delta$ und $\xi\eta$ bestimmt.

§. 642.

267. Aufgabe. Einem gegebenen dreiachsigen Ellipsoide ist ein gerader Kreiscylinder (Rotationscylinder) zu umschreiben.

Vor allem wollen wir diese Aufgabe analysiren, um festzustellen, ob und wann dieselbe überhaupt möglich sei.

Bezeichnen wir das dreiachsige Ellipsoid kurz mit E, dessen Mittelpunkt mit O und setzen wir voraus, es sei Z ein demselben umschriebener gerader Kreiscylinder.

Jedem geraden Kreiscylinder lassen sich bekanntlich unendlich viele Kugeln einschreiben, deren Mittelpunkte sämmtlich auf der Cylinderachse liegen und deren Radien allesammt dem Radius des Kreisschnittes des Cylinders gleich sind.

Weiters wissen wir aber, dass jeder Cylinder, welcher einer Fläche zweiten Grades umschrieben ist, diese Fläche nach einem Diametralschnitt berührt, dass also seine Achse durch den Mittelpunkt dieser Fläche geht.

Existiert also ein dem dreiachsigen Ellipsoide umschriebener Rotationscylinder, so muss es stets möglich sein, diesem Cylinder eine Kugel S einzuschreiben, welche zum Mittelpunkte den Mittelpunkt O des Ellipsoides hat.

Bezüglich der Kugel muss aber noch eine anderweitige Bedingung erfüllt werden.

Sind nämlich zwei Flächen zweiten Grades einer und derselben Kegelfläche eingeschrieben, so müssen sich dieselben (nach Satz 458, Band II) in zwei Punkten berühren; ebenso ist umgekehrt nothwendig, dass, wenn zwei Flächen zweiten Grades der nämlichen Kegelfläche eingeschrieben sein sollen, die besagten Flächen in zwei Punkten eine Berührung eingehen.

In dem fraglichen Falle wird also die Kugel S, welche mit dem Ellipsoid concentrisch sein soll, dasselbe auch in zwei Punkten berühren müssen.

Eine solche Kugel gibt es aber in der That. Es ist dies diejenige, welche das Ellipsoid in den Endpunkten der mittleren Achse berührt, diese Achse somit als Durchmesser besitzt.

Allerdings gibt es auch noch eine zweite Kugel, welche das Ellipsoid in den Endpunkten der großen Achse, und eine dritte Kugel, welche dasselbe in den Endpunkten der kleinen Achse berührt, aber es ist auch sofort einleuchtend, dass weder in dem einen noch in dem anderen Falle ein reeller Cylinder oder Kegel existiere, der beiden Flächen gemeinschaftlich umschrieben werden kann.

Nach diesen Vorbereitungen können wir daran gehen, den dem Ellipsoide umschriebenen Rotationscylinder, dessen Möglichkeit durch die angestellte Betrachtung erwiesen ist, auch wirklich zu construieren.

Setzen wir zu diesem Zwecke voraus, dass das Ellipsoid derart dargestellt sei, dass die große Achse $(AB, A'B')$ (Taf. XXXIII, Fig. 230) horizontal-projicierend, die mittlere Achse $(CD, C'D')$ vertical-projicierend, und endlich die kleine Achse $(EF, E'F')$ parallel zur Grundlinie sei. Verzeichnen wir die Kugel (S, S'_1), welche die mittlere Achse $(CD, C'D')$ zum Durchmesser hat, oder, was dasselbe ist, welche das Ellipsoid in den Endpunkten (C, C') und (D, D') dieser Achse berührt.

Die gemeinschaftlichen Tangentialebenen beider Flächen in diesen Punkten, d. h. die durch (C, C') und (D, D') gehenden, zur verticalen Projectionsebene parallelen Ebenen sind sodann (nach Satz 458, Band II) gleichzeitig auch Berührebenen der den beiden Flächen gemeinschaftlich umschriebenen Kegelfläche. Nachdem aber diese Ebenen untereinander parallel sind, muss nothwendig der Kegelscheitel in unendlicher Entfernung liegen, es muss sonach die gemeinschaftlich umschriebene Fläche diesfalls in der That ein Rotationscylinder sein.

Da die eben genannten, zur verticalen Projectionsebene parallelen gemeinschaftlichen Tangentialebenen der Kugel und des Ellipsoides

gleichzeitig Tangentialebenen des den beiden Flächen umschriebenen Cylinders sind, also je eine Erzeugende des Cylinders enthalten, so muss überhaupt jede zur verticalen Projectionsebene parallele Ebene den Cylinder in zwei Erzeugenden schneiden.

Wählen wir nun insbesondere die zur verticalen Projectionsebene parallele Hauptebene, so schneidet selbstverständlich auch diese den Cylinder in zwei Erzeugenden, die Kugel dagegen in dem größten Kreise (S, S'), das Ellipsoid aber in der Hauptellipse $(AB, EF; A'B', E'F')$, und es ist einleuchtend, dass die eben genannten zwei Cylindererzeugenden gleichzeitig die beiden gemeinschaftlichen Tangenten des Kreises (S, S') und der Ellipse $(ABEF, A'B'E'F')$ sein müssen.

Um die besagten Tangenten einfach construieren zu können, ermitteln wir vorerst eine der beiden Kreisebenen $C_v C_h$. Diese Ebene schneidet das Ellipsoid und die Kugel in einem und demselben Kreise. Der in der zur Bildebene parallelen Hauptebene liegende Durchmesser ab dieses gemeinsamen Kreises ist daher ein gemeinschaftlicher Durchmesser der Ellipse $ABEF$ und des Kreises S, oder mit anderen Worten, die Verticaltrace C_v der Kreisebene ist gleichzeitig eine gemeinschaftliche Sehne der Verticalprojection $ABEF$ der Hauptellipse und der Verticalprojection S des größten Kugelkreises.

Weiters ist aber bekannt, dass zwei Kegelschnitte, welche ein Paar von Punkten gemein haben, stets als centrisch collinear für die Verbindungsgerade dieser Punkte als Collineationsachse betrachtet werden können. Sind diese Punkte überdies Endpunkte eines Durchmessers in jedem der beiden Kegelschnitte, so sind die letzteren insbesondere affin, und der genannte Durchmesser repräsentiert die Affinitätsachse.

So ist es auch im vorliegenden Falle. Der Kreis S und die Ellipse $ABEF$ haben den Durchmesser ab gemein, sind daher, in Bezug auf diesen Durchmesser als Affinitätsachse, affin. Die Richtung der Affinitätsstrahlen ist nunmehr leicht gefunden. Zieht man nämlich an den Kreis S und an die Ellipse $ABEF$ die zu ab parallelen Tangenten und bestimmt man deren Berührungspunkte — m_0 und n_0 am Kreise, m und n an der Ellipse — so sind, weil sich die Tangenten affin entsprechen, auch die Punkte m_0 und m, n_0 und n, oder aber auch die Punkte m_0 und n; n_0 und m affin entsprechend. Im ersteren Falle erhält man $m_0 m$ parallel zu $n_0 n$ als Affinitätsstrahl, im zweiten Falle $m_0 n$ parallel zu $m n_0$ als Affinitätsstrahl. Zu diesen Affinitätsstrahlen — wir berücksichtigen bloß das eine Paar — sind die gesuchten gemeinschaftlichen Tangenten t_1 und t_2 des Kreises S und der Ellipse $ABEF$ parallel.

Gleichzeitig repräsentieren t_1 und t_2, welche zu $m_0 m$ und $n_0 n$ parallel sind, auch die Verticalprojectionen der beiden in der zur verticalen Projectionsebene parallelen Hauptebene liegenden Erzeugenden des dem Ellipsoide und der Kugel gemeinschaftlich umschriebenen Cylinders, oder mit anderen Worten, des dem Ellipsoide umschriebenen Rotationscylinders.

Über die Richtung dieser Cylindererzeugenden lässt sich noch Nachstehendes mit Bestimmtheit aussagen.

Es ist nämlich sofort zu ersehen, dass die Punkte m und n der Hauptellipse $ABEF$, als Berührungspunkte der zur Verticaltrace C_v der Kreisebene parallelen Tangenten, die Kreispunkte (eigentlich deren Verticalprojectionen) darstellen, und dass m_0, n_0 die Endpunkte des zur Kreisebene $C_v C_h$ senkrechten Durchmessers der Kugel (S, S'_1) repräsentieren. Nachdem nun sowohl $m_0 m$, als auch $m_0 n$ als Richtung der Affinitätsstrahlen betrachtet werden können, was zur Entstehung zweier (natürlich gegen zwei der Hauptebenen symmetrisch liegender) umschriebener Cylinder Veranlassung bietet, so können wir folgenden Satz aussprechen:

385. „Einem dreiachsigen Ellipsoide können stets zwei Rotationscylinder umschrieben werden; die Erzeugenden derselben sind zu jener Hauptebene parallel, welche auf der mittleren Achse senkrecht steht. Die Richtungen dieser Erzeugenden ergeben sich als die Verbindungsgeraden eines Kreispunktes mit den Endpunkten des auf der zugehörigen Kreisebene senkrecht stehenden Durchmessers jener Kugel, welche den in letzterer Ebene liegenden Kreisschnitt zum größten Kreise hat."

Oder mit anderen Worten:

386. „Beschreibt man über der mittleren Achse eines dreiachsigen Ellipsoides als Durchmesser eine Kugel, und verbindet man die Endpunkte des zu einer Kreisebene senkrechten Durchmessers dieser Kugel mit einem der beiden Kreispunkte des Ellipsoides, welche der genannten Kreisebene entsprechen, so sind diese Verbindungsgeraden parallel zu den Erzeugenden der beiden dem Ellipsoide umschriebenen Rotationscylinder."

§. 643.

Diese Ergebnisse, beziehungsweise die gewonnenen Resultate, sind für mannigfache Constructionen von der größten Bedeutung.

Wir werden nämlich unter anderem sofort nachweisen, dass jedes dreiachsige Ellipsoid als perspectivisch affin (d. h. affin

und in affiner Lage) mit jener über der mittleren Achse des Ellipsoides als Durchmesser beschriebenen Kugel betrachtet werden kann.

Nehmen wir zum Zwecke dieses Nachweises an, es sei E das dreiachsige Ellipsoid und E_0 die über dessen mittleren Achse als Durchmesser beschriebene Kugel.

Die beiden Flächen E und E_0 schneiden sich unter diesen Verhältnissen, wie wir wissen, nach zwei Kreisen, die wir C_1 und C_2 nennen wollen. Den genannten Flächen können, wie eben gezeigt wurde, zwei Cylinder Σ_1 und Σ_2 gemeinschaftlich umschrieben werden. Bezeichnen wir, um kurz sprechen zu können, die Ebene des einen Kreises, etwa des Kreises C_1 mit C, und führen wir parallel zu den Cylindererzeugenden eine Gerade mm_0, welche die nämliche Bedeutung wie die gleichnamige Gerade in den vorhergehenden Betrachtungen haben mag, so, dass wir uns auch gegenwärtig auf die Fig. 230 (Tafel XXXIII) stützen können.

Ferner treffe irgend eine beliebige zu der Geraden mm_0 parallele Gerade σ das Ellipsoid E in zwei Punkten p und r, die Kugel E_0 dagegen in den Punkten p_0 und r_0.

Die Ebene, welche durch die beiden Geraden σ und mm_0 gelegt wird, schneidet das Ellipsoid in einer Ellipse K, welche durch die drei Punkte m, p und r geht, und die Kugel in einem Kreise K_0, welcher durch die drei Punkte m_0, p_0 und r_0 geführt werden kann.

Weiters haben die beiden Curven K und K_0 zwei Punkte in der Schnittgeraden α der Ebenen (σ, mm_0) und C, d. i. jene Punkte gemein, in welchen die Ebene (σ, mm_0) den Kreis C_1 in der Ebene C trifft; endlich besitzen K und K_0 zwei parallele gemeinschaftliche Tangenten, d. h. jene Erzeugenden, in welchen der gemeinschaftlich umschriebene Rotationscylinder von der Ebene (σ, mm_0) der beiden Curven geschnitten wird.

Dieser einfachen Betrachtung ist unschwer zu entnehmen, dass die beiden Curven K und K_0 in Bezug auf die Gerade α in der Ebene C als Affinitätsachse und die Richtung der Cylindererzeugenden als Affinitätsstrahlen affin sind. Es sind somit auch die Punkte m und m_0, sowie die Punkte p und p_0, und jene r und r_0, der beiden Curven einander affin entsprechende Punkte. Da aber die Punktepaare p und p_0, r und r_0 Schnitte der beiden Flächen E und E_0 mit einer beliebigen, zu den Cylindererzeugenden parallelen Geraden σ sind, so folgt, dass sich überhaupt alle Punkte der beiden Flächen E und E_0 affin entsprechen, wenn man die Richtung der Cylindererzeugenden gleichzeitig als jene der Affinitätsstrahlen und eine der Kreisebenen (C) als Affinitätsebene wählt. Mithin gilt der Satz:

287. „Ein dreiachsiges Ellipsoid ist stets affin mit der über seiner mittleren Achse als Durchmesser beschriebenen Kugel. Als Affinitätsebene kann jede der beiden Kreisebenen und als Richtung der Affinitätsstrahlen jene der Erzeugenden eines jeden dem Ellipsoide umschriebenen Rotationscylinders betrachtet werden.“

§. 644.

Der eben aufgestellte Satz erlaubt uns, alle in Bezug auf das Ellipsoid bisher direct durchgeführten Probleme nunmehr auf solche der „Affinkugel“ zurückzuführen.

Bemerkt sei hier noch, dass man als Affinkugel des Ellipsoides nicht gerade nur die über der mittleren Achse als Durchmesser beschriebene Kugel, sondern offenbar jede Kugel betrachten könne, welche an irgend einer Stelle einem dem Ellipsoide umschriebenen Rotationscylinder eingeschrieben wird. Selbstverständlich ist aber in diesem Falle die Affinitätsebene nicht eine der Kreisebenen selbst, sondern eine zur Kreisschnittsebene parallele Ebene.

Diese Eigenschaften wollen wir nun, behufs Klarlegung zur constructiven Durchführung einiger bereits gelöster Aufgaben verwenden.

Am nachdrücklichsten tritt der Vortheil, welchen die Benützung der „Affinkugel“ bietet, bei dem nachstehenden Probleme in den Vordergrund.

§. 645.

268. Aufgabe. Es sind die Achsen jener Ellipse zu bestimmen, in welcher eine beliebige Ebene ein dreiachsiges Ellipsoid schneidet.

Als es sich, gelegentlich der Lösung der Aufgabe 246) um den Schnitt eines dreiachsigen Ellipsoides mit einer beliebigen Ebene handelte, gelangten wir erst auf ziemlich umständlichem Wege dazu, die conjugierten Durchmesser dieses Schnittes zu ermitteln. Das verlangte Ziel wurde, jedoch nur indirect, aus fünf construierten Stücken der Schnittcurve erreicht.

Mit Zuhilfenahme der Affinkugel ergeben sich, wie nunmehr gezeigt werden soll, die Achsen des Schnittes ohne jedwede Schwierigkeit.

Setzen wir diesbezüglich voraus, dass die große Achse $(AB, A'B')$ (Taf. XXXIV, Fig. 231) des gegebenen Ellipsoides horizontal-projicierend, die mittlere Achse $(CD, C'D')$ vertical-projicierend und die kleine Achse $(EF, E'F')$ demgemäß parallel zur Grundlinie sei.

Construieren wir vorerst über $(CD, C'D')$ als Durchmesser die Kugel (S, S_1'), bestimmen ferner eine Kreisebene $C_v C_h$, sowie den

einen dieser Ebene entsprechenden Kreispunkt (m, m') des Ellipsoides und endlich den einen Endpunkt (m_0, m'_0) des zu dieser Kreisebene senkrechten Kugeldurchmessers. Die Verbindungsgerade der Punkte (m, m') und (m_0, m'_0) heiße (σ, σ').

Nach dieser einfachen Vorbereitung übergehen wir sogleich auf unsere eigentliche Aufgabe. Die gegebene schneidende Ebene sei $E_v E_h$. Transformieren wir dieselbe affin in eine Ebene $E^0_v E^0_h$, indem wir die Kreisebene $C_v C_h$ als Affinitätsebene und die Punkte (m, m') und (m_0, m'_0) als ein Paar affiner Punkte betrachten. Diese Transformation kann anstandslos auf die bereits besprochene Weise bewerkstelligt werden.

Die transformierte Ebene $E^0_v E^0_h$ wird nämlich einerseits durch die Gerade (s, s') gehen, in welcher die gegebene Ebene $E_v E_h$ die Affinitätsebene $C_v C_h$ schneidet und andererseits durch einen Punkt (oder eine Gerade), welcher einem Punkte oder beziehungsweise einer Geraden der Ebene E affin entspricht. Bringen wir zu diesem Behufe die Ebene $E_v E_h$, beispielsweise mit der Hauptebene η_h zum Schnitte, welcher in der Geraden (σ_1, σ'_1) erfolgt, und suchen wir deren affine Gerade (σ_0, σ'_0). Hierbei bleibt der Punkt (δ_1, δ'_1) in der Affinitätsebene $C_v C_h$ ungeändert. Zu einem anderweitigen Punkte ϑ der Geraden (σ_1, σ'_1) (es genügt die verticale Projection) bestimmen wir mittelst der sich in einem Punkte Δ der Affinitätsebene schneidenden, einander entsprechenden Geraden $m\vartheta$ und $m_0\vartheta_0$, den entsprechenden Punkt ϑ_0. Die transformierte Gerade (σ_0, σ'_0) ergibt sich sodann als die Verbindungsgerade der beiden Punkte (δ_1, δ'_1) und $(\vartheta_0, \vartheta'_0)$. Die Horizontalprojection σ_0' derselben fällt in die Horizontaltrace η_h der Hauptebene η.

Die Ebene, welche nun durch die beiden Geraden (s, s') und (σ_0, σ'_0) gelegt wird, ist offenbar die der Ebene $E_v E_h$ affin entsprechende Ebene $E^0_v E^0_h$.

Nach dem vorher bewiesenen Satze 287) entspricht, infolge der angenommenen affinen Beziehung, dem vorliegenden Ellipsoide jene Kugel (S, S'_1), welche über dessen mittlerer Achse $(CD, C'D')$ als Durchmesser beschrieben werden kann. Es wird demnach dem gesuchten Schnitte des Ellipsoides mit der Ebene $E_v E_h$ affin derjenige Kreis entsprechen, in welchem die Affinitätskugel (S, S_1') von der Ebene $E^0_v E^0_h$ geschnitten wird.

Den verlangten Kegelschnitt erhalten wir mithin, wenn wir den Schnittkreis der Ebene $E^0_v E^0_h$ mit der Kugel (S, S'_1) durch Zuhilfenahme eines Cylinders, dessen Erzeugenden zu den Affinitätsstrahlen

$(m m'_0, m' m'_0)$ parallel sind, auf die gegebene Ebene $E_v E_h$ projicieren.

Bestimmen wir zu diesem Zwecke zunächst den Mittelpunkt (M_0, M'_0) des Kreises (Σ_0, Σ'_0), in welchem die Kugel (S, S'_1) von der Ebene $E^0_v E^0_h$ geschnitten wird, als Durchstoßpunkt dieser Ebene mit der durch den Kugelmittelpunkt (O, O') zu $E^0_v E^0_h$ senkrecht gezogenen Geraden.

Führen wir sodann durch (M_0, M_0') eine Parallele zum Affinitätsstrahle $(m m_0, m' m'_0)$, so trifft diese die Ebene $E_v E_h$ bereits in dem Mittelpunkte (M, M') des gesuchten Kegelschnittes (Σ, Σ'), da bekanntlich die Mittelpunkte aller auf einem Cylinder zweiten Grades liegenden Kegelschnitte, also auch die Punkte (M_0, M'_0) und (M, M') auf einer und derselben zu den Cylindererzeugenden parallelen Geraden der Cylinderachse, liegen.

Da sich ferner der gesuchte Kegelschnitt (Σ, Σ') als die schiefe Projection des Kreises (Σ_0, Σ'_0) auf die Ebene $E_v E_h$ ergibt, wobei die Projectionsstrahlen die vorher ermittelten Affinitätsstrahlen sind, so ist einleuchtend, dass die Projectionen eines jeden Paares senkrechter Kreisdurchmesser, ein Paar conjugierter Durchmesser des gesuchten Kegelschnittes darstellen werden, oder mit anderen Worten: die je zweien aufeinander senkrecht stehenden Durchmessern des Kreises $(\Sigma_0 \Sigma'_0)$ affin entsprechenden Geraden sind stets conjugierte Durchmesser des Kegelschnittes (Σ, Σ').

Führen wir nun durch M'_0 eine Parallele $M'_0 \beta'$ und eine Senkrechte $M'_0 \alpha'$ zur Horizontaltrace E^0_h der Ebene des Kreises (Σ_0, Σ'_0), so repräsentieren diese beiden Geraden $M'_0 \beta'$ und $M'_0 \alpha'$ die horizontalen Projectionen zweier auf einander senkrecht stehender Kreisdurchmesser. Dieselben treffen die Gerade (s, s') in den Punkten (α, α') und (β, β'). Nachdem die letztbezeichneten Punkte, welche der Affinitätsebene angehören, sich selbst entsprechen und weiters dem Punkte (M_0, M'_0) der Punkt (M, M') affin entspricht, so repräsentieren, den gepflogenen Erörterungen gemäß, die Punkte (α, α') und (β, β') gleichzeitig auch die Schnittpunkte eines Paares conjugierter Durchmesser des gesuchten Kegelschnittes (Σ, Σ') mit der Geraden (s, s').

Führen wir ferner durch M_0 eine Parallele $M_0 \delta$ und eine Senkrechte $M_0 \gamma$ zur Trace E^0_v, so sind diese Geraden ebenfalls die verticalen Projectionen zweier auf einander senkrecht stehender Durchmesser des Kreises (Σ_0, Σ'_0); es werden somit deren Schnittpunkte (γ, γ') und (δ, δ') mit der Geraden (s, s') wieder einem Paare con-

jugierter Durchmesser des gesuchten Kegelschnittes (Σ, Σ') angehören.

Da die sämmtlichen Paare conjugierter Durchmesser des Kegelschnittes (Σ, Σ') auf der Geraden (s, s') eine Involution bestimmen, von welcher wir zwei conjugierte Punktepaare, nämlich (α, α'), (β, β') und (γ, γ'), (δ, δ') kennen, so sind wir auch in den Stand gesetzt, die Projectionen beliebig vieler conjugierter Durchmesser dieses Kegelschnittes, vermittelst dieser Involution $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, zu construieren.

Der diesfalls gestellten Forderung gemäß, benöthigen wir aber die Achsen des Kegelschnittes (Σ, Σ'), d. h. jenes Paar conjugierter Durchmesser, welches insbesondere rechtwinklig ist.

Um das besagte Durchmesserpaar zu bestimmen, legen wir den Mittelpunkt (M, M') des Kegelschnittes sowohl, als auch die vier Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ um E_v in die verticale Projectionsebene nach $M^0{}_0$, α_0, β_0, γ_0, δ_0 um.

Die über $\alpha_0\beta_0$ und $\gamma_0\delta_0$ beschriebenen Halbkreise schneiden sich in dem Potenzpunkte π der Involution. Legen wir daher durch π und $M^0{}_0$ einen Kreis $\varkappa$, dessen Mittelpunkt auf dem Träger s_0 der Involution liegt, so schneidet derselbe diesen Träger in zwei Punkten ξ_0 und η_0, welche ein Punktepaar der Involution repräsentieren.

Es sind demnach $M^0{}_0\xi_0$ und $M^0{}_0\eta_0$, weil sie gleichzeitig auf einander senkrecht stehen, die umgelegten Achsen des gesuchten Kegelschnittes (Σ, Σ').

Führen wir die Punkte ξ_0 und η_0 in die Projection nach (ξ, ξ') und (η, η') zurück, so erhalten wir bereits in $x = M\xi$ und $y = M\eta$ die verticalen und in $x' = M'\xi'$ und $y' = M'\eta'$ die horizontalen Projectionen der gesuchten Achsen.

Es erübrigt jetzt nur noch deren Endpunkte zu bestimmen. Dies kann auf folgende Weise geschehen. Den beiden Achsen (x, x') und (y, y') des Kegelschnittes (Σ, Σ') entsprechen affin die beiden auf einander senkrecht stehenden Kreisdurchmesser (y_0, y'_0) und (x_0, x'_0), wobei y_0 mit $M_0\eta$; y'_0 mit $M'_0\eta'$; x mit $M_0\xi$; x' mit $M'_0\xi'$ übereinstimmt.

Die Endpunkte dieser Kreisdurchmesser bestimmen wir, indem wir die letzteren um $E^0{}_h$ in die horizontale Projectionsebene nach (x_0) und (y_0) umlegen. Der Schnittpunkt (M_0) von (x_0) und (y_0) ist der umgelegte Kreismittelpunkt. Der umgelegte Kreis (K_0) ist derjenige, welcher aus (M_0) mit einem Radius beschrieben wird, welcher der Kathete $(M)r$ eines rechtwinkligen Dreieckes gleich ist, in welchem die Hypotenuse $(O)r$ dem Kugelradius $R = C'O' = D'O'$

und die zweite Kathete $(M)(O)$ dem Abstande des Kreismittelpunktes vom Kugelmittelpunkte gleichkömmt.

Der umgelegte Kreis (K_0) schneidet (x_0) und (y_0) in den Punkten (a_0), (b_0), (c_0) und (d_0), welche zurückgeführt nach a'_0, b'_0, c'_0, d'_0, die Horizontalprojectionen der Endpunkte der beiden Kreisdurchmesser ergeben.

Die diesen Punkten affin entsprechenden Punkte a', b', c', d' sind bereits die horizontalen Projectionen der gesuchten Achsenendpunkte. Die verticalen Projectionen a, b, c und d derselben ergeben sich unmittelbar auf x und y durch Ableitung aus den eben festgestellten horizontalen Projectionen der gleichnamigen Punkte.

§. 646.

269. Aufgabe. Parallel zu einer gegebenen Ebene $E_v E_h$ sind an dreiachsiges Ellipsoid Berührebenen zu legen und deren Berührungspunkte zu construieren.

Construieren wir vor allem wieder die Affinkugel (S, S'_1) (Taf. XXXV, Fig. 232), die Affinitäts- (Kreis-) Ebene $C_v C_h$ und bestimmen wir, wie in den vorhergegangenen Problemen, die beiden affinen Punkte (m, m') und (m_0, m'_0) des Ellipsoides (E, E') und der Affinkugel (S, S'_1).

Wie wir bereits wissen, entsprechen parallelen Ebenen affin gleichfalls parallele Ebenen. Es werden mithin den zu suchenden zur Ebene $E_v E_h$ parallelen Tangentialebenen des Ellipsoides affin solche Ebenen entsprechen, welche einerseits die Kugel berühren und andererseits zu der der Ebene $E_v E_h$ entsprechenden Ebene $E^0_v E^0_h$ parallel sind. Dass die Berührungspunkte dieser Ebenen mit der Kugel den Berührungspunkten der zu bestimmenden Tangentialebenen des Ellipsoides ebenfalls affin entsprechen werden, ist selbstverständlich.

Diesen Betrachtungen zufolge wird es nothwendig sein, die der Ebene $E_v E_h$ affin entsprechende Ebene $E^0_v E^0_h$ zu ermitteln.

Die besagte Ebene geht erstens durch die Gerade (s, s'), in welcher die gegebene Ebene $E_v E_h$ die Affinitätsebene $C_v C_h$ schneidet, und zweitens durch irgend einen Punkt oder eine Gerade, welche einem Punkte oder beziehungsweise einer Geraden der Ebene $E_v E_h$ affin entspricht.

Wählen wir beispielsweise die Schnittgerade (σ, σ') der Ebene $E_v E_h$ mit der zur verticalen Projectionsebene parallelen Hauptebene η, welche offenbar auch die beiden affinen Punkte m und m_0 enthält.

Der Schnittpunkt (δ, δ') der beiden Geraden (s, s') und (σ, σ') bleibt bei der affinen Transformation ungeändert. Zu einem ander-

weitigen beliebigen Punkte x der Geraden σ findet man den affin entsprechenden x_0, mittelst der sich in einem Punkte α der Affinitätsebene $C_v C_h$ schneidenden, sich affin entsprechenden Geraden $mx\alpha$ und $m_0 x_0 \alpha$. Hiernach ist die Verbindungsgerade (σ_0, σ'_0) der beiden Punkte (δ, δ') und (x_0, x'_0) (die Punkte x'_0 und m'_0, also auch die Gerade σ'_0 fallen in die Trace η_h) die gesuchte, der Geraden (σ, σ') entsprechende Affingerade.

Diejenige Ebene, welche nun durch (s, s') und (σ_0, σ'_0) gelegt wird, ist die der gegebenen Ebene $E_v E_h$ affin entsprechende Ebene $E^0_v E^0_h$.

Ziehen wir den zur Ebene $E^0_v E^0_h$ senkrechten Durchmesser (d_0, d'_0) der Affinkugel und bestimmen wir (indem wir denselben durch Drehung um den horizontal-projicierenden Kugeldurchmesser in eine zur verticalen Projectionsebene parallele Lage bringen) dessen Endpunkte (a_0, a'_0) und (b_0, b'_0), so repräsentieren diese, wie wir wissen, die Berührungspunkte der Kugel mit den zu der Ebene $E^0_v E^0_h$ parallelen Tangentialebenen an die Kugel. Diesen Punkten werden daher affin die Berührungspunkte des Ellipsoides mit den gesuchten zur Ebene $E_v E_h$ parallelen Tangentialebenen entsprechen.

Um beispielsweise den dem Punkte (b_0, b'_0) affin entsprechenden Punkt zu finden, benützen wir irgend ein Paar bereits bekannter affiner Punkte, etwa x und x_0.

Die Gerade $b_0 x_0$ trifft die Affinitätsebene $C_v C_h$ in dem Punkte ϑ (es genügt, wenn die einschlagenden Constructionen in der verticalen Projection vollführt werden). Der Geraden $x_0 b_0 \vartheta$ entspricht die Gerade $x\vartheta$, in deren Durchschnitt b mit dem durch b_0 parallel zu xx_0 oder mm_0 geführten Affinitätsstrahle bb_0 die Verticalprojection b des gesuchten, dem Punkte b_0 entsprechenden, dem Ellipsoide angehörenden Punktes erhalten wird. Die Horizontalprojection b' desselben findet man unmittelbar auf der Horizontalprojection des entsprechenden Affinitätsstrahles, d. i. auf der zu $m'm'_0$ oder η_h durch b'_0 parallel gezogenen Geraden.

Die Ebene $T^b_v T^b_h$, welche durch (b, b') parallel zu $E_v E_h$ gelegt wird, ist sodann bereits eine der gesuchten Berührebenen, und der Punkt (b, b') selbst deren Berührungspunkt.

Der Berührungspunkt (a, a') der zweiten zu $E_v E_h$ parallelen Tangentialebene ist selbstverständlich der dem Punkte (a_0, a_0) affin entsprechende Punkt (a, a').

Der letztgenannte Punkt kann jedoch auch direct construiert werden, wenn man berücksichtigt, dass die beiden Berührungspunkte

zweier parallelen Berührebenen einer Fläche zweiten Grades stets Endpunkte eines Durchmessers sind. Es genügt daher, auf der Verbindungsgeraden $(bO, b'O')$ den dem Punkte (b, b') in Bezug auf den Mittelpunkt (O, O') symmetrisch gelegenen Punkt (a, a') durch Übertragung der Strecke $(bO, b'O')$ nach $(aO, a'O')$ unmittelbar zu bestimmen, um in (a, a') den Berührungspunkt der zweiten Ebene sofort zu erhalten.

§. 647.

270. Aufgabe. **Durch eine Gerade (g, g') sind an ein dreiachsiges Ellipsoid die möglichen Berührebenen zu legen und deren Berührungspunkte zu ermitteln.**

Bestimmen wir zunächst wieder die Affinkugel (S, S'_1) (Tafel XXXV, Fig. 233), die Affinitätsebene $C_v C_h$ und das Paar affiner Punkte m und m_0.

Den zu suchenden, durch die Gerade (g, g') zu legenden Berührebenen des Ellipsoides werden affin jene Tangentialebenen der Affinkugel entsprechen, welche durch die der Geraden (g, g') entsprechende Gerade gehen; ferner werden den Berührungspunkten der ersteren Ebenen die Berührungspunkte der letzteren entsprechen.

Die der Geraden (g, g') affin entsprechende Gerade (g_0, g'_0) ist leicht gefunden. Dieselbe geht offenbar durch den Schnittpunkt (δ, δ') von (g, g') mit der Affinitätsebene $C_v C_h$. Hienach benöthigen wir nur noch einen zweiten Punkt derselben. Nehmen wir zu diesem Zwecke einen beliebigen Punkt (x, x') auf (g, g') an, und ziehen die Gerade $m\alpha x$, welche die Affinitätsebene $C_v C_h$ im Punkte α trifft, so ist αm_0 die affin entsprechende Gerade; im Schnitte x_0 derselben mit dem durch x gehenden zu mm_0 parallelen Affinitätsstrahle xx_0 erhält man die Verticalprojection x_0 des transformierten Punktes. Die Horizontalprojection x'_0 liegt auf der Horizontalprojection des betreffenden Affinitätsstrahles, d. i. auf der durch x' parallel zu $m'_0 m'$ oder η_h gezogenen Geraden.

Die der Geraden (g, g') entsprechende Gerade (g_0, g'_0) ergibt sich nunmehr als die Verbindungsgerade der beiden Punkte (δ, δ') und (x_0, x'_0).

Ermitteln wir weiters die Berührungspunkte der Affinkugel mit den durch (g_0, g'_0) gehenden Berührebenen derselben. — Dies geschieht (nach Aufgabe 54), folgendermaßen. Wir führen die zur Geraden (g_0, g'_0) senkrechte Durchmesserebene $D_v D_h$ der Kugel, bestimmen sodann deren Schnittpunkt (s_0, s'_0) mit der Geraden (g_0, g'_0) und legen den letzteren, sowie den größten Kreis K, in welchem die Ebene $D_v D_h$ die Kugel schneidet, um die Horizontaltrace D_h in die

horizontale Projectionsebene beziehungsweise nach (s_0) und (K_0) um. Ziehen wir ferner von (s_0) die Tangenten an (K_0), und führen deren Berührungspunkte (a_0) und (b_0) in die Projection nach (a_0, a'_0) und (b_0, b'_0) zurück, so stellen die beiden letzterhaltenen Punkte die Berührungspunkte der durch (g_0, g'_0) gehenden Tangentialebenen der Affinkugel dar. Die diesen Punkten affin entsprechenden Punkte sind die Berührungspunkte der zu bestimmenden, durch (g, g') gehenden Tangentialebenen an das Ellipsoid.

Bestimmen wir beispielsweise den Punkt (b, b'), welcher dem Punkte (b_0, b'_0) affin entspricht. Die Gerade $m_0 b_0$ trifft diesbezüglich die Affinitätsebene $C_v C_h$ im Punkte β; es entspricht sodann der Geraden $m_0 b_0 \beta$ die Gerade $m b \beta$. Im Schnitte derselben mit dem zu $m m_0$ parallelen Strahle $b b_0$ erhalten wir die Verticalprojection b des gesuchten Punktes. Die Horizontalprojection b' ergibt sich auf der horizontalen Projection des zu $m' m'_0$ oder η_h parallelen Affinitätsstrahles $b'_0 b'$. Die durch (g, g') und (b, b') gelegte Ebene $T_v^b T_h^b$ hat mit dem Ellipsoide den Punkt (b, b') gemein, ist somit eine der verlangten Berührungsebenen.

In ganz gleicher Weise kann nun auch die z w e i t e der g e f o r d e r t e n Berührebenen $T_v^a T_h^a$ vermittelst des dem Punkte (a_0, a'_0) affin entsprechenden Berührungspunktes (a, a') bestimmt und dargestellt werden.

§. 648.

271. Aufgabe. **Es sind drei conjugierte Durchmesser eines Ellipsoides, welches durch seine Achsen gegeben ist, zu bestimmen.**

Mit Zuhilfenahme der Affinkugel kann vorstehende Aufgabe anstandslos gelöst und durchgeführt werden.

Es ist nämlich unschwer nachzuweisen, dass irgend drei conjugierten Durchmessern eines dreiachsigen Ellipsoides stets drei auf einander senkrecht stehende Durchmesser der Affinkugel entsprechen.

Setzen wir diesbezüglich voraus, es seien d_1, d_2 und d_3 drei conjugierte Durchmesser des Ellipsoides, so werden denselben offenbar drei Durchmesser d^0_1, d^0_2 und d^0_3 der Affinkugel entsprechen, da der Mittelpunkt O beider Flächen, als ein Punkt der Affinitätsebene (Kreisebene des Ellipsoides) sich selbst entspricht.

Die Tangentialebenen des Ellipsoides in den Endpunkten des Durchmessers d_1 sind, wie bekannt, sowohl unter einander, als auch zu der conjugierten, durch d_2 und d_3 bestimmten Durchmesserebene, parallel. Es werden daher, weil parallele Ebenen durch affine Transformation stets wieder in parallele Ebenen übergehen, die Tangential-

ebenen der Kugel in den Endpunkten des Durchmessers d^0_1 wieder unter einander, als auch parallel zu der durch d^0_2 und d^0_3 bestimmten Durchmesserebene der Kugel sein.

Nachdem aber die Tangentialebenen einer Kugel in den Endpunkten eines Durchmessers zu dem letzteren senkrecht stehen, so folgt, dass auch die Ebene (d^0_2, d^0_3) zum Durchmesser d^0_1 senkrecht stehen müsse.

In gleicher Weise kann nachgewiesen werden, dass die Ebene (d^0_3, d^0_1) zum Durchmesser d^0_2 und ebenso die Ebene (d^0_1, d^0_2) zum Durchmesser d^0_3 senkrecht stehen.

Das Gesagte ist aber offenbar nur dann möglich, wenn die drei Durchmesser d^0_1, d^0_2 und d^0_3 wechselseitig auf einander senkrecht stehen.

Um demnach die vorher gestellte Aufgabe zu lösen, hat man nichts anderes zu thun, als drei beliebige, wechselseitig auf einander senkrecht stehende Durchmesser der Affinkugel zu bestimmen und dieselben sammt ihren Endpunkten affin zu transformieren.

§. 649.

In dem Nachstehenden wollen wir noch einige fundamentale Aufgaben, wie beispielsweise die Bestimmung der Durchschnittspunkte eines Ellipsoides mit einer Geraden; die Construction der Berührungsebene in einem gegebenen Punkte des Ellipsoides, unter der Voraussetzung durchführen, dass das Ellipsoid nicht durch seine drei Achsen, sondern durch irgend drei seiner conjugierten Durchmesser gegeben sei.

272. Aufgabe. **Ein dreiachsiges Ellipsoid ist durch drei seiner conjugierten Durchmesser bestimmt; es ist die Horizontalprojection eines Punktes (p, p') auf dem Ellipsoide zu finden, wenn dessen Verticalprojection p gegeben ist.**

Die horizontale Projectionsebene wählen wir diesfalls so, dass sie zu zweien der gegebenen drei conjugierten Durchmesser parallel sei, während die verticale Projectionsebene eine zu dem dritten Durchmesser parallele Lage besitze. Unter dieser Voraussetzung stellen sich die beiden ersteren Durchmesser $(AB, A'B')$ und $(CD, C'D')$ (Taf. XXXIV, Fig. 234) als zwei zur horizontalen Projectionsebene parallele Gerade dar, während der dritte Durchmesser $(EF, E'F')$ durch eine zur verticalen Projectionsebene parallele Gerade repräsentiert erscheint.

Um die Horizontalprojection p' des Punktes auf dem Ellipsoide festzustellen, dürfte es am einfachsten sein, durch p eine zur horizontalen Projectionsebene parallele Ebene e zu legen. Die Verticaltrace e_v dieser Ebene ist selbstverständlich die durch die gegebene Projection p zur Grundlinie parallel geführte Gerade.

Die Ebene e wird nun, da sie zu der Durchmesserebene $(ABCD, A'B'C'D')$ parallel ist, das Ellipsoid (nach Satz 443*b*, Band II) in einer Ellipse schneiden, welche mit der Ellipse $(ABCD, A'B'C'D')$ ähnlich und ähnlich gelegen ist. Der Mittelpunkt derselben wird durch den Schnittpunkt (o, o') der Ebene e mit dem dritten, der Ebene e conjugierten Durchmesser $(EF, E'F')$ repräsentiert.

Infolge dieser Eigenschaft werden die beiden Geraden (x, x') und (y, y'), welche zu den conjugierten Durchmessern $(AB, A'B'), (CD, C'D')$ der Ellipse $ABCD$ — die wir der Kürze halber mit (Σ, Σ') bezeichnen wollen — parallel sind, gleichfalls conjugierte Durchmesser der Schnittellipse sein.

Die Verticalprojectionen c und d der Endpunkte des einen dieser Durchmesser (y, y'), werden sich offenbar als die Schnittpunkte von y oder (e_v) mit jener Ellipse ergeben, welche durch ihre conjugierten Durchmesser CD und EF bestimmt ist.

Diese Schnittpunkte können leicht mit Hilfe des über EF als Durchmesser beschriebenen Affinkreises K'_0 gefunden werden. Dem dem Durchmesser EF conjugierten Durchmesser CD entspricht affin der zu EF senkrechte Kreisdurchmesser C_0D_0; der Geraden y die zu C_0D_0 parallele, also ebenfalls zu EF senkrechte Gerade y_0, und den Punkten d_0 und c_0, in welchen y_0 den Kreis K'_0 trifft, entsprechen die vermittelst der zu CC_0 oder DD_0 parallelen Affinitätsstrahlen dd_0, cc_0 bestimmten Endpunkte d und c des Durchmessers (y, y'). Die horizontalen Projectionen d' und c' liegen auf y' und können daher aus d und c sofort abgeleitet werden.

Die Endpunkte a und b des Durchmessers (x, x') ergeben sich, infolge der Ähnlichkeit der Schnittellipse mit der Ellipse (Σ, Σ'), auf x' durch Vermittlung der beziehungsweise zu $A'C'$ und $B'C'$ parallelen Geraden $a'c'$ und $b'c'$. Die Verticalprojectionen a und b findet man unmittelbar durch Heraufprojicieren der Punkte a' und b' in die Gerade x oder (e_v) in a und b.

Die Schnittellipse der Ebene e_v mit dem Ellipsoide ist mithin durch zwei conjugierte Durchmesser $(ab, a'b')$ und $(cd, c'd')$ vollkommen bestimmt.

Nachdem auf dieser letztbezeichneten Ellipse der gesuchte Punkt liegt, so könnte man die Horizontalprojection p' desselben durch Zuhilfenahme eines über $a'b'$ oder $c'd'$ als Durchmesser beschriebenen affinen Kreises, als einen der beiden Schnittpunkte dieser Ellipse mit der durch p gehenden zur Grundlinie senkrechten Geraden α' bestimmen.

Man kann aber auch anderweitig verfahren. Da nämlich die Schnittellipse mit der Ellipse (Σ, Σ') ähnlich und ähnlich gelegen ist, so wird man offenbar beide als parallele Schnitte eines und desselben Kegels zweiten Grades betrachten können. Die Erzeugenden dieses Kegels sind jene Geraden, welche die ähnlich liegenden Punkte beider Ellipsen verbinden. Je nachdem man einem Punkte des einen Kegelschnittes einen gewissen Punkt ν oder aber dessen diametral entgegen liegenden Punkt ν_1 als ähnlich gelegen betrachtet, erhält man zwei verschiedene Kegel.

Da ferner die Mittelpunkte zweier parallelen Schnitte eines Kegels zweiten Grades stets auf einer durch den Kegelscheitel gehenden Geraden liegen, so muss auch im vorstehenden Falle der Scheitel des durch die beiden Ellipsen zu legenden Kegels auf der Verbindungsgeraden ihrer Mittelpunkte, d. i. auf dem Durchmesser $(E\,F,\ E'\,F')$ liegen.

Behufs Bestimmung des Kegelscheitels (S, S') genügt daher ein einziges Paar ähnlich liegender Punkte beider Ellipsen. Als solche kann man die Durchmesserendpunkte D und d betrachten. Die Verbindungsgerade Dd ist eine Kegelerzeugende; dieselbe schneidet EF in einem Punkte (S, S'), welcher somit bereits den einen der beiden Kegelscheitel darstellt.

Mittelst dieses Scheitels projicieren wir die Schnittellipse der Ebene e_v auf die Ellipse (Σ, Σ'); gleichzeitig aber auch die durch p gehende vertical-projicierende Gerade (α, α') nach $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}')$ auf die Ebene der Ellipse (Σ, Σ').

Bestimmen wir nun mit Hilfe des über dem Durchmesser $A'B'$ beschriebenen Kreises K^2_0 die Schnittpunkte π'_1 und π'_2 der Geraden $\mathfrak{a}'$ mit der Ellipse Σ' und projicieren dieselben aus dem Centrum S' auf die Gerade α', nach p'_1 und p'_2. Es ist einleuchtend, dass p'_1 und p'_2 die horizontalen Projectionen des Schnittpunktes der Ellipse in e_v mit der vertical-projicierenden Geraden (α, α'), mithin die gesuchten Horizontalprojectionen jener Punkte des Ellipsoides sind, deren Verticalprojectionen mit dem Punkte a zusammenfallen.

§. 650.

273. Aufgabe. In einem gegebenen Punkte (a, a') eines dreiachsigen, durch drei conjugierte Durchmesser gegebenen Ellipsoides ist an dasselbe die Berührungsebene zu legen.

Nehmen wir wieder zwei der Durchmesser $(AB, A'B')$ und $(CD, C'D')$ (Taf. XXXIV, Fig. 235) parallel zur horizontalen Projectionsebene und den dritten Durchmesser $(EF, E'F')$ parallel zur verticalen Projectionsebene an. Der gegebene Punkt (a, a') sei, indem wir eine seiner Projectionen, etwa a', als bereits vorliegend voraussetzen, auf eine der vorherbesprochenen Arten abgeleitet und bestimmt worden.

Die Tangentialebene in dem Punkt (a, a') wird bestimmt sein, sobald man zwei Tangenten des Ellipsoides im Punkte (a, a') kennt. Diese Tangenten lassen sich leicht bestimmen.

Führen wir zunächst durch (a, a') eine Ebene e_v parallel zu der Durchmesserebene $ABCD$. Der Pol dieser Ebene wird auf dem der Durchmesserebene conjugierten Durchmesser $(EF, E'F')$ liegen, und wird daselbst der vierte harmonische Punkt (π_1, π'_1) zu den Endpunkten (E, E') und (F, F') und dem Punkte (α, α') sein, in welchem die Ebene e_v diesen Durchmesser trifft. Die Verticalprojection π_1 bestimmt man als den vierten harmonischen Punkt zu E, F und α_1 dadurch, dass man über EF einen Kreis K_1 zeichnet, durch α_1 die zu EF senkrechte Sehne zieht und in einem ihrer Endpunkte ϱ_1 an K_1 die Tangente τ_1 legt. Die letztere wird EF bereits in dem gesuchten Punkte π_1 schneiden. Die Horizontalprojection π'_1 findet man unmittelbar in der Senkrechten zur Grundlinie auf $E'F'$.

Nachdem (π_1, π'_1) der Pol der Ebene e_v in Bezug auf das Ellipsoid ist, so stellt derselbe gleichzeitig auch den Scheitel des dem Ellipsoide längs des in der Ebene e_v liegenden Kegelschnittes umschriebenen Kegels dar; es ist daher die Gerade $(\pi_1 a, \pi'_1 a')$ oder (t_1, t'_1) eine Tangente des gegebenen Ellipsoides im Punkte (a, a').

Wiederholen wir ein Gleiches bezüglich einer anderen Durchmesserebene. Denken wir uns also beispielsweise durch den Punkt (a, a') eine Ebene ϑ parallel zur Durchmesserebene $ABEF$ gelegt und deren Schnittpunkt (α_2, α'_2) mit dem conjugierten Durchmesser $(CD, C'D')$ aufgesucht. Dies kann allenfalls in folgender Weise geschehen. Wir ziehen durch (a, a') die Gerade $(a\delta, a'\delta')$ parallel zum Durchmesser $(EF, E'F')$ und bestimmen den Durchstoßpunkt (δ, δ') derselben mit der Diametralebene $ABCD$. Führen wir durch δ' eine Gerade ϑ_h parallel zu $A'B'$, so repräsentiert diese offenbar die Hori-

zontalprojection der Trace der Ebene ϑ auf der Diametralebene $ABCD$, während deren Schnittpunkt α'_2 mit $C'D'$ die horizontale Projection des Durchstoßpunktes des Durchmessers $(CD, C'D')$ mit der Ebene ϑ darstellt. Die verticale Projection α_2 dieses Punktes finden wir auf CD.

Der Pol $(\pi_2 \pi'_2)$ der Ebene ϑ liegt auf dem conjugierten Durchmesser $(CD, C'D')$ und ist derselbe gleichfalls der vierte harmonische Punkt zu den drei Punkten (C, C'), (D, D') und (α_2, α'_2). Wir finden dessen Horizontalprojection π'_2 als den vierten harmonischen Punkt zu C', D', α'_2 vermittelst des über $C'D'$ beschriebenen Kreises K_2 in derselben Weise wie vorher den Punkt π_1. Die Verticalprojection π_2 ergibt sich sodann unmittelbar auf CD.

Der Punkt (π_2, π'_2) ist als Pol der Ebene ϑ wieder der Scheitel des Kegels, welcher dem Ellipsoide längs des in der Ebene ϑ liegenden Kegelschnittes umschrieben ist; es repräsentiert somit auch die Gerade $(\pi_2 a, \pi'_2 a')$ oder (t_2, t'_2) eine Tangente des Ellipsoides im Punkte (a, a').

Die Ebene $T_v T_h$, welche durch die beiden Geraden $(\pi_1 a, \pi'_1 a')$ und $(\pi_2 a, \pi'_2 a')$ gelegt werden kann, stellt mithin die gesuchte Tangentialebene des Ellipsoides im Punkte (a, a') dar.

In analoger Weise können mit Zuhilfenahme der polaren Eigenschaften nunmehr auch anderweitige Probleme, welche das durch conjugierte Durchmesser gegebene dreiachsige Ellipsoid betreffen, gelöst werden.

§. 651.

Construction des dreiachsigen Ellipsoides aus gegebenen Elementen.

An dieser Stelle mögen auch noch jene Aufgaben Erwähnung finden, welche die Construction eines dreiachsigen Ellipsoides aus gegebenen Elementen fordern. Vorderhand wollen wir jene besprechen, bei welchen theilweise Achsen (oder auch conjugierte Durchmesser), theilweise Punkte und Tangentialebenen als gegebene Stücke vorliegen.

274. Aufgabe. Ein dreiachsiges Ellipsoid ist durch zwei Achsen und einen Punkt der Oberfläche gegeben; es ist die dritte Achse zu ermitteln.

Die horizontale Projectionsebene nehmen wir parallel zu den zwei gegebenen Achsen $(CD, C'D')$ und $(EF, E'F')$ (Taf. XXXIV, Fig. 236), die verticale Projectionsebene dagegen senkrecht zu $(EF, E'F')$, also parallel zu der anderen Achse $(CD, C'D')$ an; der gegebene Punkt sei (a, a'). Eine nothwendige Bedingung für die Möglichkeit der Auf-

gabe ist die, dass die Horizontalprojection a' innerhalb der Ellipse $(C'D', E'F')$ fällt.

Die dritte Achse ist ihrer Lage nach durch die beiden gegebenen Achsen vollständig bestimmt. Besagte Achse ist, der getroffenen Annahme gemäß, im vorliegenden Falle horizontal-projicierend. Es erübrigt somit nur, die Länge derselben zu ermitteln.

Zu diesem Zwecke legen wir durch die ihrer Lage nach gegebene Achse und durch den gegebenen Punkt (a, a') die horizontal-projicierende Ebene $P_v P_h$. Diese wird das Ellipsoid in einer Ellipse schneiden, welche durch den gegebenen Punkt (a, a') geht und deren eine Achse mit der zu bestimmenden Achse des Ellipsoides übereinstimmt, während deren zweite Achse durch den Durchmesser der horizontalen Hauptellipse $(CDEF, C'D'E'F')$, welcher durch die Ebene $P_v P_h$ bestimmt ist, repräsentiert wird. Wir ermitteln daher den Durchmesser $(cd, c'd')$ der Hauptellipse, welcher durch die Ebene $P_v P_h$ bestimmt wird, durch Zuhilfenahme des über $C'D'$ beschriebenen Affinkreises K'_0.

Die in der Ebene $P_v P_h$ liegende Schnittellipse hat zur Verticalprojection eine Ellipse K, welche die Verticalprojection cd des eben gefundenen Durchmessers zu der einen Achse, die zu bestimmende Achse AB des Ellipsoides dagegen zur zweiten Achse hat, und durch den Punkt a geht. Aus den somit bekannten Stücken lässt sich die Achse AB leicht construieren.

Betrachten wir nämlich die Ellipse K als orthogonal-affin mit dem über cd als Durchmesser beschriebenen Kreise K_0. Dem Punkte a entspricht auf dem Kreise K_0 der Punkt a_0, und dem zu suchenden Achsenendpunkte B der Punkt B_0 auf dem Kreise K_0. Die Gerade $a_0 B_0$ trifft die Affinitätsachse cd im Punkte δ. Der Geraden $a_0 \delta$ entspricht aber die Gerade $a\delta$, und diese trifft die ihrer Lage nach bekannte Achse in dem gesuchten Endpunkte B. Der zweite Achsenendpunkt A derselben ist der mit B, in Bezug auf den Mittelpunkt O, symmetrisch gelegene Punkt. Hiermit ist die Aufgabe gelöst.

§. 652.

275. Aufgabe. **Ein dreiachsiges Ellipsoid ist durch zwei Achsen und eine Tangentialebene gegeben; es ist die dritte Achse zu bestimmen.**

Die beiden gegebenen Achsen $(CD, C'D')$ und $(EF, E'F')$ (Taf. XXXIV, Fig. 237) nehmen wir wieder beziehungsweise parallel zur Grundlinie und senkrecht zur verticalen Projectionsebene an. Die gegebene Tangentialebene sei $T_v T_h$. Die dritte Achse ist der Lage

nach die durch den Mittelpunkt (O, O') des Ellipsoides [und der Hauptellipse $(CDEF, C'D'E'F')$] gehende horizontal-projicierende Gerade (Z, Z'). Um deren Endpunkte zu finden, verfahren wir folgendermaßen.

In Gemäßheit des Satzes 379) ist bekannt, dass die orthogonale Projection des Berührungspunktes einer Tangentialebene auf eine Hauptebene einer Fläche zweiten Grades die Polare der Trace der Tangentialebene auf dieser Hauptebene in Bezug auf den in der letzteren liegenden Hauptkegelschnitt sei.

Bestimmen wir daher den Schnitt (σ, σ') der Tangentialebene $T_v T_h$ mit der Hauptebene ε_v der Ellipse $(CDEF, C'D'E'F')$ und construieren wir (vermittelst des über $C'D'$ beschriebenen Affinkreises) den Pol a' der Geraden σ' in Bezug auf die Ellipse $(C'D'E'F')$, so ist dieser, dem oben angeführten Satze entsprechend, die orthogonale Projection des Berührungspunktes der Ebene $T_v T_h$, bezogen auf die Hauptebene ε_v, oder, da letztere horizontal ist, gleichzeitig die horizontale Projection des Berührungspunktes der Ebene $T_v T_h$.

Nachdem der Berührungspunkt selbst in der Ebene $T_v T_h$ liegen muss, so lässt sich seine Verticalprojection a aus der Horizontalprojection a' auf bekannte Weise ableiten. Hiernach ist ein Punkt (a, a') des Ellipsoides bekannt, und somit auch die gestellte Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt.

§. 653.

276. Aufgabe. Ein dreiachsiges Ellipsoid ist durch zwei seiner Achsen und eine Tangente gegeben; es ist die dritte Achse zu bestimmen.

Seien wieder die in der horizontalen Hauptebene ε_v liegenden beiden Achsen $(CD, C'D')$ und $(EF, E'F')$ (Taf. XXXVI, Fig. 238) bestimmt. Ferner sei (t, t') die gegebene Tangente.

Diese Tangente (t, t') trifft die Hauptebene ε_v in einem Punkte (s, s'). Die Polarebene dieses Punktes ist, da derselbe in einer Hauptebene liegt, zu dieser Hauptebene senkrecht, im vorstehenden Falle also horizontal-projicierend. Besagte Polarebene stellt aber gleichzeitig auch die Ebene der Berührungscurve des Ellipsoides mit dem demselben aus dem Punkte (s, s') umschriebenen Kegel dar. Führt man daher von (s, s') (mittelst des affinen Kreises K'_0) an die Ellipse $(CDEF, C'D'E'F')$ die Tangenten, und bestimmt man deren Berührungspunkte (a, a') und (b, b'), so ist die horizontal-projicierende Ebene $P_v P_h$, welche durch diese beiden, der Berührungscurve angehörenden Punkte (a, a') und (b, b') geht, die Ebene der genannten Berührungscurve.

Nun ist aber die gegebene Tangente (t, t') gleichfalls eine Erzeugende des aus (s, s') dem Ellipsoide umschriebenen Kegels; deren Schnittpunkt (p, p') mit der Ebene $P_v P_h$ der Berührungscurve ist mithin der Berührungspunkt derselben mit dem Ellipsoide.

Nachdem wir somit einen Punkt (p, p') des Ellipsoides kennen, so ist auch diese Aufgabe wieder auf die Aufgabe 274) reduciert.

§. 654.

277. Aufgabe. **Ein dreiachsiges Ellipsoid ist durch eine Achse der Lage und Länge nach, durch die beiden anderen Achsen der Lage nach und durch zwei Punkte gegeben; es sind die Längen der beiden letztangeführten Achsen zu ermitteln.**

Die eine Achse $(AB, A'B')$ (Taf. XXXVI, Fig. 239), d. i. diejenige, deren Länge bekannt ist, nehmen wir horizontal-projicierend an. Die Achse (X, X') möge parallel zur Grundlinie und die Achse (Y, Y') vertical-projicierend sein. Ferner seien (a, a') und (b, b') die beiden gegebenen Punkte.

Legen wir durch die Achse $(AB, A'B')$ und durch den einen der gegebenen Punkte, allenfalls durch (a, a'), eine horizontal-projicierende Ebene $P'_v P'_h$, so wird diese Ebene das Ellipsoid in einer Ellipse (Σ, Σ') schneiden, welche durch den Punkt (a, a') geht und deren eine Achse $(AB, A'B')$ ist, während die zweite Achse derselben, jener der Ebene $P'_v P'_h$ angehörende Durchmesser ist, welcher der in der horizontalen Hauptebene liegenden (bisher noch unbekannten) Ellipse $(CDEF, C'D'E'F')$ zukömmt. Die Verticalprojection Σ dieser Ellipse ist gleichfalls eine durch den Punkt a gehende Ellipse, welche als die eine ihrer Achsen die Gerade AB besitzt.

Ein Endpunkt m der zweiten Achse dieser Ellipse kann leicht durch Vermittlung des über AB beschriebenen Affinkreises K_0 bestimmt werden. Die horizontale Projection m' dieses Punktes liegt in der Horizontaltrace P'_h; es ist somit durch (m, m') ein Endpunkt des vorher genannten Durchmessers der Ellipse $(CDEF, C'D'E'F')$ dargestellt. Vermittelst der durch den zweiten der gegebenen Punkte (b, b') und die Achse $(AB, A'B')$ gelegten horizontal-projicierenden Ebene P^2_h erhalten wir auf gleiche Weise einen zweiten Punkt (n, n') der Ellipse $(CDEF, C'D'E'F')$. Die horizontale Projection $(C'D'E'F')$ der zu suchenden Ellipse ist demnach durch die Lage der Achsen X' und Y' und durch zwei Punkte m' und n' gegeben. Hieraus kann man leicht die Endpunkte C', D', E' und F' der Achsen selbst finden.

Betrachten wir zu diesem Behufe die zu suchende Ellipse als orthogonal affin mit einem gewissen, bisher noch unbekannten Kreise

K'_0, welcher die Achse X' zum Durchmesser hat und mit der Ellipse concentrisch ist.

Die Ellipsensehne $m'n'$ trifft die Affinitätsachse X' im Punkte $\varDelta$. Dem Halbierungspunkte o dieser Sehne wird auf der zur Affinitätsachse senkrechten Geraden $o\alpha$ der Mittelpunkt o_0 der affinen Kreissehne $\varDelta o_0$ entsprechen. Nachdem aber diese Sehne $\varDelta o_0$ auf der Geraden $O' o_0$ senkrecht stehen muss, so liegt der Punkt o_0 nothwendig im Schnitte von $o\alpha$ mit dem über $O'\varDelta$ als Durchmesser beschriebenen Kreise γ. Dies zu Grunde gelegt, erhält man sofort die affine Kreissehne $\varDelta o_0$ und auf derselben die dem Kreise K'_0 angehörenden Punkte m_0 und n_0 durch die zu X' senkrechten Affinitätsstrahlen $m'm_0$ und $n'n_0$.

Der Kreis, welcher nun aus O' beschrieben, durch die Punkte m_0 und n_0 geht, ist der gesuchte Affinitätskreis K'_0. Derselbe trifft die Affinitätsachse X' bereits in den beiden Achsenendpunkten C' und D'. Die beiden Achsenendpunkte (E,E') und (F,F') der Achse (y,y') sind als die den Schnittpunkten E_0 und F_0 des Kreises K'_0 mit Y' affin entsprechenden Punkte E' und F' zu construieren.

Die verticalen Projectionen C, D, E und F der somit gefundenen vier Achsenendpunkte liegen sämmtlich in der Verticaltrace ε_v der Hauptebene ε des Ellipsoides. Hiemit ist die Aufgabe vollständig gelöst.

§. 655.

278. Aufgabe. **Ein dreiachsiges Ellipsoid ist durch die Achsen der Lage nach, durch eine Tangentialebene und ihren Berührungspunkt gegeben; die Endpunkte der drei Achsen sind zu bestimmen.**

Seien (Z,Z'); (Y,Y') und (X,X') (Taf. XXXVI, Fig. 240) die drei Achsenrichtungen, von welchen wir die erstere horizontal-projicierend, die zweite vertical-projicierend und die dritte parallel zur Grundlinie voraussetzen. Der Schnittpunkt derselben, d. i. der Mittelpunkt des Ellipsoides, heiße (O, O'). Endlich sei $T_v T_h$ die gegebene Berührebene und (p,p') ihr Berührungspunkt.

Es wird diesfalls genügen einen der Achsenendpunkte, beispielsweise jenen von (Z,Z') zu bestimmen, da die der beiden anderen Achsen auf gleiche Weise wie diese gefunden werden können.

Bestimmen wir zu diesem Behufe vorerst den Schnittpunkt (a,a') der Tangentialebene $T_v T_h$ mit der Achse (Z,Z'). Die Gerade $(ap, a'p')$ ist sodann eine Tangente des Ellipsoides im Punkte (a,a').

Denken wir uns weiters durch die Achse (Z,Z') und durch den Punkt (p,p') eine (horizontal-projicierende) Ebene $P_v P_h$ gelegt, so wird diese das Ellipsoid in einer Ellipse (Σ,Σ') schneiden, deren eine

Achse mit der zu bestimmenden Achse $(AB, A'B') = (Z, Z')$ identisch ist. Besagte Ellipse wird selbstverständlich durch den Punkt (p, p') gehen und in diesem Punkte von der Geraden $(ap, a'p')$ berührt werden. Die Verticalprojection Σ dieser Schnittellipse wird daher gleichfalls eine Ellipse sein, welche durch den Punkt p geht, in demselben von der Geraden ap berührt wird und deren eine Achse mit der Verticalprojection AB der zu suchenden Achse des Ellipsoides zusammenfällt. Der Punkt O wird offenbar auch der Mittelpunkt dieser Ellipse sein.

Um nun die letztgenannte Ellipse, respective deren Achse AB zu bestimmen, betrachten wir dieselbe als orthogonal affin mit einem bisher noch unbekannten Kreise K_0, welcher über der zu suchenden Achse AB als Durchmesser, beschrieben werden kann. Hiernach repräsentiert Z die Affinitätsachse.

Dem Punkte p wird affin ein Punkt p_0 des Kreises K_0 entsprechen, welcher auf der zur Achse Z senkrechten Geraden $p\pi$ liegen muss, während gleichzeitig der Ellipsentangente ap im Punkte p, die Kreistangente ap_0 im Punkte p_0 entspricht. Nachdem aber bekanntlich die Kreistangente ap_0 auf dem Berührungsradius Op_0 senkrecht steht, so ergibt sich p_0 unmittelbar im Schnitte der zu Z senkrechten Geraden pp_0 mit dem über Oa als Durchmesser beschriebenen Kreise γ.

Der vorgenannte affine Kreis K_0 ist demnach derjenige, dessen Mittelpunkt in O liegt und durch den Punkt p_0 geht. Derselbe schneidet die Affinitätsachse Z bereits in den gesuchten Achsenendpunkten A und B.

In vollkommen übereinstimmender Weise kann man nun auch die Endpunkte C und D, respective E und F der Achsen (X, X') und (Y, Y') construieren.

§. 656.

279. Aufgabe. **Ein dreiachsiges Ellipsoid ist durch die Lage der einen Achse, durch zwei Tangentialebenen und deren Berührungspunkte gegeben; die Länge dieser Achse, sowie die Lage und Länge der beiden anderen Achsen sind zu bestimmen.**

Die gegebene Achse, die wir als horizontal-projicierend voraussetzen, sei (Z, Z') (Taf. XXXVI, Fig. 241); ferner seien $T^1{}_v T'^1{}_h$ und $T^2{}_v T^2{}_h$ die beiden gegebenen Tangentialebenen und beziehungsweise (p_1, p'_1) und (p_2, p'_2) deren Berührungspunkte.

Bestimmen wir zunächst den Schnittpunkt a_1 der Tangentialebene $T^1{}_v T'^1{}_h$ mit der Achse (Z, Z'), so repräsentiert die Gerade $(a_1 p_1, a'_1 p'_1)$ eine Tangente τ_1 des Ellipsoides im Punkte (p_1, p'_1).

Der letztgenannte Punkt ist daher ein Punkt der Berührungscurve des von dem Punkte (a_1, a'_1) aus dem Ellipsoide umschriebenen Kegels. Nachdem aber der Punkt (a_1, a'_1) in der Achse (Z, Z') liegt, so ist die Ebene der Berührungscurve senkrecht zu dieser Achse. Wir erhalten dieselbe mithin als die durch (p_1, p'_1) zur horizontalen Projectionsebene parallel gelegte Ebene e'_v dargestellt.

Als Ebene der Berührungscurve ist dieselbe auch gleichzeitig die Polarebene des Punktes (a_1, a'_1) in Bezug auf das Ellipsoid. Besagte Ebene schneidet daher die Achse (Z, Z') in einem Punkte (α_1, α'_1), welcher mit dem Punkte (a_1, a'_1) und den zu suchenden Achsenendpunkten (A, A') und (B, B') auf (Z, Z') harmonisch liegt, oder, wenn man bloß auf die verticale Projection Rücksicht nimmt, kann die Behauptung aufgestellt werden, dass die beiden Achsenendpunkte A und B die Punkte a_1 und α_1 harmonisch trennen.

Bestimmen wir ferner den Schnittpunkt (a_2, a'_2) der Achse (Z, Z') mit der zweiten gegebenen Tangentialebene $T^2_v T^2_h$ und führen wir durch deren Berührungspunkt (p_2, p'_2) eine zur Achse (Z, Z') senkrechte Ebene e^2_v, welche diese Achse im Punkte (α_2, α'_2) trifft, so folgt aus gleichen Gründen, dass die zu suchenden Achsenendpunkte A und B auch das Paar $a_2 \alpha_2$ harmonisch trennen müssen.

Es handelt sich also bloß darum, auf Z zwei Punkte A und B zu finden, welche die beiden Punktepaare $a_1 \alpha_1$ und $a_2 \alpha_2$ gleichzeitig harmonisch trennen.

Wie wir bereits wissen, bilden die sämmtlichen Paare von Punkten, welche zu zwei Punkten a_1 und α_1 harmonisch sind, eine hyperbolische Involution, deren Doppelpunkte die beiden Punkte a_1 und α_1 sind.

Der Centralpunkt dieser Involution ist der Mittelpunkt o_1 der Strecke $a_1 \alpha_1$, während die Potenz (der Modul) der Involution gleich $\overline{a_1 o}^2_1 = \overline{\alpha_1 o}^2_1$ ist. Zwei conjugierte Punkte der Involution, beispielsweise x_1 und ξ_1, liegen bekanntlich auf einerlei Seite des Centralpunktes o_1 und genügen der Beziehung:

$$o_1 x_1 \,.\, o_1 \xi_1 = \overline{o_1 a}^2_1 = \overline{o_1 \alpha}^2_1.$$

Ebenso bilden sämmtliche Punktepaare, die zu den beiden Punkten a_2 und α_2 harmonisch sind, eine hyperbolische Involution, welche a_2 und α_2 zu Doppelpunkten und den Mittelpunkt o_2 der Strecke $a_2 \alpha_2$ zum Centralpunkte hat. Conjugierte Punkte x_2 und ξ_2 dieser Involution liegen gleichfalls auf einerlei Seite des Centralpunktes o_2 und genügen der Relation:

$$o_2 x_2 \,.\, o_2 \xi_2 = \overline{o_2 a}^2_2 = \overline{o_2 \alpha}^2_2.$$

Die gesuchten Achsenendpunkte A und B sind offenbar die gemeinschaftlichen conjugierten Punkte beider Involutionen und können etwa in folgender Weise construiert werden.

Man zeichnet über $a_1 \alpha_1$ und über $a_2 \alpha_2$ als Durchmessern, beziehungsweise die Kreise γ_1 und γ_2 und legt an dieselben eine gemeinschaftliche Tangente $r_1 r_2$. Über der Strecke $r_1 r_2$ dieser Tangente, welche von den beiden Berührungspunkten r_1 und r_2 begrenzt wird, beschreibt man, $r_1 r_2$ als Durchmesser betrachtet, einen Kreis K, welcher die Gerade Z bereits in den verlangten Punkten A und B trifft. Denn der Construction gemäß, ist $o_1 r_1$ und ebenso $o_2 r_2$ eine Tangente des Kreises K; es ist mithin:

$$o_1 A \,.\, o_1 B = \overline{o_1 r}^2{}_1 = \overline{o_1 a}^2{}_1 \text{ und}$$

$$o_2 A \,.\, o_2 B = \overline{o_2 r}^2{}_2 = \overline{a_2 a}^2{}_2.$$

Die Punkte A und B trennen also sowohl $a_1 \alpha_1$, als auch $a_2 \alpha_2$ harmonisch und sind folglich die gesuchten Achsenendpunkte.

Der Mittelpunkt der Strecke AB ist sodann der Mittelpunkt des Ellipsoides, und die durch denselben senkrecht zu (Z, Z') (also parallel zur horizontalen Projectionsebene) geführte Ebene ε_v, die Ebene der beiden anderen Achsen. Um die letzteren zu construieren, verfahren wir folgendermaßen.

Wir legen durch den Punkt (p_2, p'_2) und durch die Achse (Z, Z') eine Ebene $P^2{}_v P^2{}_h$; diese schneidet das Ellipsoid in einer Ellipse (Σ_2, Σ'_2), deren eine Achse mit jener $(AB, A'B')$ des Ellipsoides zusammenfällt und durch den Punkt (p_2, p'_2) geht. Die Verticalprojection Σ_2 dieser Ellipse wird daher ebenfalls eine Ellipse sein, welche $A\,B$ zur einen Achse hat und durch den Punkt p_2 führt.

Ermitteln wir nun durch Zuhilfenahme des über AB beschriebenen Affinkreises K_0 die Schnittpunkte c_2 und d_2 der Ellipse Σ_2 mit der Geraden ε_v und die Schnittpunkte π_1 und π_2 derselben Ellipse mit der Geraden e'_v, so repräsentieren offenbar c_2 und d_2 die Verticalprojectionen der Endpunkte der zweiten Achse der Ellipse (Σ_2, Σ'_2). Die Horizontalprojectionen c'_2 und d'_2 dieser Punkte ergeben sich unmittelbar in der Trace $P^2{}_h$. Gleichzeitig stellen (c_2, c'_2) und (d_2, d'_2) zwei einander diametral entgegengesetzte Punkte der in der Ebene ε_v liegenden, bisher noch unbekannten Hauptellipse $(CDEF, C'D'E'F')$ dar.

Die Punkte π_1 und π_2, in welchen die Ellipse Σ_2 die Trace e'_v trifft, sind die Verticalprojectionen zweier diametral entgegen liegender Punkte jener Ellipse, in welcher die Ebene e'_v das Ellipsoid schneidet. Die Horizontalprojectionen π'_1 und π'_2 dieser Punkte liegen in der Trace $P^2{}_h$.

Die eben bezeichnete Ellipse in der Ebene e'_v — nennen wir dieselbe (σ_1, σ'_1) — geht aber auch durch den Punkt (p_1, p'_1) und wird in diesem Punkte von der Schnittgeraden (t_1, t'_1) der Ebene e'_v mit der Tangentialebene $T^1_v T^1_h$ berührt. Der Mittelpunkt derselben ist der Schnittpunkt der Ebene e'_v mit der Achse (Z, Z').

Die Horizontalprojection σ'_1 dieser Ellipse ist mithin durch den Mittelpunkt m' oder o', durch zwei Punkte p'_1 und π'_1 und durch die Tangente t'_1 im Punkte p'_1 gegeben.

Aus diesen Bestimmungsstücken kann anstandslos ein Paar conjugierter Durchmesser $\zeta\eta$, $\xi\omega$ auf folgende Weise festgestellt werden.

Zeichnen wir den Durchmesser y, welcher durch den Mittelpunkt ϱ der Sehne $p'_1 \pi'_1$ geht; der ihm conjugierte Durchmesser x ist sodann zu der Sehne $p'_1 \pi'_1$ parallel.

Betrachten wir nun die Ellipse σ'_1 als affin mit dem Kreise σ_0, welcher über den bisher noch unbekannten Durchmesser $\eta\zeta$. . (x) beschrieben wird. Diesem conjugierten Durchmesser y entspricht der zur Affinitätsachse x senkrechte Kreisdurchmesser y_0; ferner entspricht der durch p'_1 parallel zu y gezogenen Geraden $p'_1 \delta$ die zu y_0 parallele, also zu x senkrechte Gerade $\delta p_1{}^0$. Da weiters der Geraden $m' p'_1$ die Gerade $m' p_1{}^0$, und der Tangente $t_1' = p'_1 \varDelta$ die Kreistangente $t_1{}^0 = \varDelta p_1{}^0$ entsprechen wird, und nebstbei $p_1{}^0 m'$ auf $\varDelta p_1{}^0$ senkrecht steht, so erhält man $p_1{}^0$ im Schnitte der Geraden $p_1{}^0 \delta$ mit dem über $m' \varDelta$ als Durchmesser beschriebenen Kreise (γ). Verzeichnet man aus dem Mittelpunkte m' einen durch $p_1{}^0$ gehenden Kreis, so ist dieser bereits der verlangte Affinitätskreis σ_0. Derselbe trifft die Affinitätsachse x in den Endpunkten ζ und η des mit ihr zusammenfallenden Ellipsendurchmessers, und den Kreisdurchmesser y_0 in den Punkten ξ_0 und ω_0, welchen affin die vermittelst der zu $p_1' p_1{}^0$ parallelen Affinitätsstrahlen $\xi\xi_0$, $\omega\omega_0$, bestimmten Endpunkte ξ und ω des dem Durchmesser x conjugierten Durchmessers y entsprechen.

Aus diesen beiden conjugierten Durchmessern $\zeta\eta$ und $\xi\omega$ lassen sich nun auf bekannte Weise die Achsen $c'd'$ und $e'f'$ der Ellipse σ'_1 leicht construieren. Die Ellipse σ'_1 ist die Horizontalprojection eines zur Hauptebene ε_v mit der Ebene e'_v resultierenden parallelen Ellipsenschnittes (σ_1, σ'_1).

Da diese Schnittellipse (σ_1, σ'_1), als Schnitt der Ebene e'_v mit dem Ellipsoide, ähnlich und ähnlich gelegen ist mit der in der Hauptebene ε_v liegenden Hauptellipse $(CDEF, C'D'E'F')$, und da der Mittelpunkt (m, m') von (σ_1, σ'_1) auf der Achse (Z, Z') liegt, so ist die Horizontalprojection $(C'D'E'F')$ concentrisch und ähnlich gelegen

mit der Horizontalprojection $\sigma'_1 = (c'd'e'f')$ der genannten Schnittellipse (σ_1, σ'_1). Hieraus folgt aber, dass die Achsen $C'D'$ und $E'F'$ der Horizontalprojection dieser Hauptellipse mit den Achsen $c'd'$ und $e'f'$ der Horizontalprojection σ'_1 zusammenfallen.

Nachdem endlich auf dem Durchmesser $P_h{}^2$ zwei ähnlich liegende Punkte π'_1 und c'_2 der beiden Horizontalprojectionen gefunden wurden, so ergeben sich unmittelbar die zwei Endpunkte C' und E' vermittelst der parallelen Geradenpaare $C'c'_2$ und $c'\pi'_1$; $E'c'_2$ und $e'\pi'_1$.

Die beiden anderen Endpunkte D' und F' liegen, in Bezug auf O', beziehungsweise symmetrisch zu C' und E'. Die Verticalprojectionen C, D, E, F der Achsenendpunkte ergeben sich direct durch Projection der Punkte C', D', E' und F' in der Verticaltrace ε_v. Hiermit sind die drei Achsen $(AB, A'B')$, $(CD, C'D')$ und $(EF, E'F')$ des Ellipsoides gefunden, und folglich die gestellte Aufgabe gelöst.

§. 657.

280. Aufgabe. Ein dreiachsiges Ellipsoid ist durch eine Achse der Lage und Länge nach, durch die beiden anderen Achsen der Lage nach, ferner durch eine Tangente und deren Berührungspunkt gegeben; die Längen der beiden Achsen sind zu bestimmen.

Sei $(AB, A'B')$ (Taf. XXXVI, Fig. 242) die gegebene und, wie wir annehmen wollen, horizontal-projicierende Achse; (t, t') die gegebene Tangente und (p, p') der Berührungspunkt derselben; die beiden anderen Achsen seien der Lage nach beziehungsweise durch die zur Grundlinie parallele Gerade (X, X') und die zur verticalen Projectionsebene senkrechte Gerade (Y, Y') dargestellt.

Legen wir durch die Achse $(AB, A'B')$ und durch den Punkt (p, p') eine Ebene $P_v P_h$, so schneidet diese das Ellipsoid in einer Ellipse (Σ, Σ'), welche $(AB, A'B')$ zur einen Achse hat, und durch den Punkt (p, p') geht. Die Verticalprojection Σ dieser Ellipse ist selbstverständlich wieder eine Ellipse, welche durch p geht, und deren Achse mit AB zusammenfällt.

Die Tangente (t_1, t'_1) dieser Ellipse (Σ, Σ') im Punkte (p, p') lässt sich leicht bestimmen. Legen wir nämlich durch (p, p') eine zur horizontalen Hauptebene ε_v parallele Ebene e_v, so schneidet diese die Achse $(AB, A'B')$ in einem Punkte α. Dieser Punkt ist mit den beiden Achsenendpunkten A und B und dem Punkte a, in welchem die gesuchte Tangente t_1 die Achse $(AB, A'B')$ schneidet, harmonisch. Der Punkt a wird sich demnach unmittelbar ergeben, wenn man in dem über AB beschriebenen Kreise K_0 die zu AB senkrechte Sehne

$\alpha\pi$, und in dem Endpunkte π derselben die Kreistangente $t_1{}^0$ zieht, welche AB in dem verlangten Punkte a trifft.

Die Gerade $(ap, a'p')$ ($a'p'$ fällt in die Horizontaltrace P_h) repräsentiert sonach die Tangente (t_1, t'_1) der Ellipse (Σ, Σ') im Punkte (p, p'), und jene Ebene, welche durch dieselbe und durch die gegebene Tangente (t, t') gelegt wird, bestimmt die Tangentialebene $T_v T_h$ des Ellipsoides im Punkte (p, p'). Hiermit ist das gestellte Problem auf die Aufgabe 278) zurückgeführt.

§. 658.

Alle bisher bezüglich der Bestimmung eines Ellipsoides — welch letzteres theilweise durch seine Achsen, theilweise durch Punkte, Tangenten oder Tangentialebenen gegeben erschien — durchgeführten Probleme können auch für den Fall gelöst werden, wenn statt der Achsen conjugierte Durchmesser der Lage nach gegeben sind.

Die Abänderung, welche hierdurch in der Construction herbeigeführt wird, besteht bloß darin, dass man dort, wo früher Hilfsebenen angewendet wurden, welche zu einer Achse senkrecht waren, hier von Ebenen Gebrauch gemacht werden muss, welche zu der dem einen gegebenen Durchmesser conjugierten Durchmesserebene parallel sind. Wir wollen dies an einem Beispiele zeigen, welches mit dem in der Aufgabe 276) zum Ausdruck gebrachten Probleme verwandt ist.

§. 659.

281. Aufgabe. **Ein dreiachsiges Ellipsoid ist durch zwei conjugierte Durchmesser der Lage und Länge nach und durch den dritten der Lage nach, ferner durch eine Tangente gegeben; es ist die Länge des dritten Durchmessers festzustellen.**

Die beiden gegebenen conjugierten Durchmesser seien $(CD, C'D')$ und $(EF, E'F')$ (Taf. XXXVI, Fig. 243), der dritte Durchmesser möge durch die Gerade (Z, Z') repräsentiert werden; ferner seien (t, t') die Projectionen der gegebenen Tangente. Die beiden Durchmesser $(CD, C'D')$ und $(EF, E'F')$ wählen wir parallel zur horizontalen Projectionsebene; den Durchmesser (Z, Z') hingegen parallel zur verticalen Projectionsebene, welche Annahme, unbeschadet der Allgemeinheit, getroffen werden kann.

Bestimmen wir vorerst den Schnittpunkt (s, s') der Durchmesserebene ε_v der beiden gegebenen Durchmesser $(CD, C'D')$ und $(EF, E'F')$ mit der gegebenen Tangente (t, t'); ziehen wir ferner von diesem Punkte

(s, s') aus an die in der Ebene ε_v liegende, durch das Paar conjugierter Durchmesser $(CD, C'D')$ und $(EF, E'F')$ gegebene Ellipse die Tangenten, und bestimmen wir deren Berührungspunkte (π_1, π'_1) und (π_2, π'_2), mit Hilfe des über einem der Durchmesser, etwa über $C'D'$, beschriebenen affinen Kreises K'_0.

Diese beiden Berührungspunkte (π_1, π'_1) und (π_2, π'_2) gehören der Berührungscurve des dem Ellipsoide aus dem Punkte (s, s') umschriebenen Kegels an. Nachdem die Ebene der Berührungscurve gleichzeitig die Polarebene des Punktes (s, s') in Bezug auf das Ellipsoid ist, und der Pol (s, s') in der Durchmesserebene ε_v liegt, so muss diese Polarebene zu dem der Durchmesserebene ε_v conjugierten Durchmesser (Z, Z') parallel sein; oder mit anderen Worten: wir erhalten die Ebene der Berührungscurve als jene Ebene $B_v B_h$, welche durch die Gerade $(\pi_1 \pi_2, \pi'_1 \pi'_2)$ parallel zum Durchmesser (Z, Z') gelegt wird.

Durch den Punkt (s, s') geht aber auch die gegebene Tangente (t, t'); ihr Berührungspunkt wird daher kein anderer als der Schnittpunkt (p, p') derselben mit der Ebene $B_v B_h$ sein.

Dieser Punkt (p, p') kann nun zur Construction der Endpunkte (A, A') und (B, B') des Durchmessers (Z, Z') in folgender Weise benützt werden. Wir legen durch (p, p') und durch (Z, Z') eine Ebene $P_v P_h$; dieselbe schneidet das Ellipsoid in einer Ellipse (Σ, Σ'), welche durch den Punkt (p, p') geht, und die Hauptebene ε_v in einer Geraden (y, y'), welche im Vereine mit (Z, Z') ein Paar conjugierter Durchmesser dieser Ellipse (Σ, Σ') darstellt.

Die Endpunkte (c, c') und (d, d') des Durchmessers (y, y') ergeben sich, vermittelst des Affinkreises K'_0, als dessen Schnittpunkte mit der Diametralellipse $(CD, EF; C'D', E'F')$. Die Verticalprojection Σ ist demgemäß eine Ellipse, welche durch p geht, und von welcher der eine Durchmesser cd der Lage und Länge, der ihr conjugierte Durchmesser Z aber bloß der Lage nach bekannt ist. Es unterliegt nunmehr auch keiner Schwierigkeit, vermittelst des über cd beschriebenen affinen Kreises K_0 die Endpunkte A und B des zweiten Durchmessers Z zu bestimmen. Besagte Punkte A und B repräsentieren diesfalls gleichzeitig die verticalen Projectionen der Endpunkte des dem Ellipsoide angehörenden Durchmessers (Z, Z'). Die Horizontalprojectionen A' und B' ergeben sich unmittelbar in Z'.

Aus diesem Beispiele ist bereits zu ersehen, welche Änderungen in den Constructionen eintreten, wenn statt der Achsen conjugierte Durchmesser als gegeben vorliegen.

Alle Hilfskegelschnitte erscheinen unter der letzteren Voraussetzung ebenfalls durch conjugierte Durchmesser gegeben. Statt der

Ebenen, welche zu den einer Achse conjugierten Hauptebenen parallel sind, hat man, den vorliegenden Fall betreffend, solche Ebenen zu verwenden, welche zu der einem Durchmesser conjugierten Durchmesserebene parallel sind.

§. 660.

282. Aufgabe. Es ist in centraler Projection der Umrisskegelschnitt eines dreiachsigen Ellipsoides und ein Punkt der Fläche gegeben; der Mittelpunkt des Ellipsoides ist zu bestimmen.

Das Projectionscentrum ist durch den Hauptpunkt A und die Distanz AC' (Taf. XXXVII, Fig. 244) bestimmt. Der Umrisskegelschnitt, d. i. die Ellipse, längs welcher das Ellipsoid von dem aus dem Projectionscentrum C umschriebenen Kegel berührt wird, sei in der Ebene $B_b B_v$ gegeben. Die centrale Projection (K) dieser Ellipse ist offenbar gleichzeitig die Contour des Ellipsoides auf der Bildebene. Endlich sei der gegebene, dem Ellipsoide angehörende Punkt p durch einen Träger dv festgestellt.

Um den Mittelpunkt des Ellipsoides zu finden, schlagen wir folgenden Weg ein.

Auf Grund vorausgeschickter Erörterungen wissen wir (Satz 446, Band II, und die folgende Bemerkung), dass der Mittelpunkt des Ellipsoides, der Mittelpunkt eines beliebigen Berührungskegelschnittes und der dem letzteren entsprechende Kegelscheitel in einer und derselben Geraden liegen. Im vorliegenden Falle werden sich daher der Mittelpunkt des Ellipsoides und der Mittelpunkt der Umrissellipse K auf einem und demselben Projectionsstrahle vorfinden oder mit anderen Worten, die Centralprojection des Mittelpunktes von K wird gleichzeitig auch die Centralprojection des Mittelpunktes des Ellipsoides sein.

Die Centralprojection des Mittelpunktes der Berührungsellipse K kann leicht bestimmt werden. Nachdem nämlich der besagte Mittelpunkt der Pol der unendlich fernen Geraden der Ebene dieses Kegelschnittes K ist, so wird dessen Centralprojection M der Pol der Fluchttrace B_v dieser Ebene in Bezug auf die Contour (K) sein.

Ist auf diese Weise die Centralprojection M des Mittelpunktes von K und nach den vorstehenden Betrachtungen auch des Ellipsoides gefunden, so wird es sich nur noch darum handeln, den Mittelpunkt des letzteren im Raume zu bestimmen, denselben also durch einen Träger zu fixieren.

Verbinden wir den Punkt M mit dem gegebenen Punkte p durch eine Gerade $P_b (P_v)$, so repräsentiert diese Gerade die Trace jener

central-projicierenden Ebene, welche den Punkt P und den Mittelpunkt des Ellipsoides enthält. Die besagte Ebene schneidet das Ellipsoid in einer Diametralellipse c, die durch den Punkt p geht und den Umrisskegel in zwei Erzeugenden, welche diese Ellipse c in den beiden Punkten a und b berühren, schneidet. Selbstverständlich werden diese Punkte a und b dem Kegelschnitte K, also auch der Ebene $B_v B_b$ angehören.

Denken wir uns diese Stücke um P_b in die Bildebene umgelegt, so ist die umgelegte Diametralellipse c_0 durch zwei, durch das umgelegte Centrum C_0 gehende Tangenten t_1, t_2, deren Berührungspunkte a_0 und b_0 sind, und durch den Punkt p_0 bestimmt. Der Mittelpunkt M_0 der umgelegten Ellipse liegt auf dem umgelegten Projectionsstrahle $C_0 M$. Derselbe kann mittelst eines collinearen Kreises γ_0 der t_1 und t_2 in α_0 und β_0 berührt, leicht festgestellt werden, indem man die den Schnittpunkten μ_0 und ν_0 dieses Kreises γ_0 mit $C_0 M$ entsprechenden Punkte m_0 und n_0 ermittelt, und die Strecke $m_0 n_0$, welche einen Durchmesser von c_0 repräsentiert, in M_0 halbiert.

Ziehen wir nun durch M_0 eine beliebige Gerade $M_0 D$, so ist deren Centralprojection $D V$, d. i. der verlangte Träger leicht zu bestimmen, da $D V$ in P_b fällt und V durch den zu $M_0 D$ parallelen Fluchtstrahl $C_0 V$ direct erhalten wird. Hiemit ist die Aufgabe vollständig gelöst.

XXVIII. Capitel.

Constructionen und Aufgaben das dreiachsige zweitheilige Hyperboloid betreffend.

§. 661.

Hierbei wollen wir, wenn anderes nicht ausdrücklich bemerkt ist oder gefordert wird, stets voraussetzen, dass die reelle Achse des zweimanteligen Hyperboloides auf der horizontalen Projectionsebene senkrecht stehe. Die beiden anderen Achsen mögen gleichfalls specielle Lage gegen die Projectionsebenen erhalten und zwar sei die große imaginäre Achse zur Grundlinie parallel, während die kleine imaginäre Achse zur verticalen Projectionsebene senkrecht stehe.

Als Bestimmungsmittel für das Hyperboloid wählen wir durchwegs die beiden Scheitel (A, A') und (B, B') (Taf. XXXVII, Fig. 245), wo-

durch auch der Mittelpunkt (O, O') gegeben ist, und den Asymptotenkegel, welcher durch seinen Schnitt mit der horizontalen Projectionsebene, d. i. durch eine Ellipse $(abcd, a'b'c'd')$, welche ihren Mittelpunkt in O' hat, deren große Achse $(ab, a'b')$ parallel zur Grundlinie und deren kleine Achse $(c\,d, c'\,d')$ senkrecht zur Grundlinie liegt, dargestellt wird.

Die durch $(a\,b, a'\,b')$ gehende zur verticalen Projectionsebene parallele Ebene η ist sowohl eine Hauptebene des Asymptotenkegels als auch des Hyperboloides. Besagte Ebene schneidet den Asymptotenkegel in zwei Erzeugenden (Y_1, Y'_1) und (Y_2, Y'_2), welche gleichzeitig die Asymptoten der in der Hauptebene η liegenden Haupthyperbel des Hyperboloides repräsentieren. Die Scheitel (A, A') und (B, B') des Hyperboloides sind zugleich auch die Scheitel der eben genannten Haupthyperbel.

Die zweite Hauptebene $\pi_v\pi_h$ ist die durch den Mittelpunkt (O, O') gehende horizontal- und vertical-projicierende, d. i. zur Grundlinie senkrechte Ebene und die dritte Hauptebene, welche weder das Hyperboloid noch dessen Asymptotenkegel in einem reellen Kegelschnitte schneidet, ist die durch den Mittelpunkt (O, O') gehende zur horizontalen Projectionsebene parallele Ebene ε.

§. 662.

283. Aufgabe. Die Verticalprojection eines auf dem Hyperboloide gelegenen Punktes ist gegeben; die Horizontalprojection dieses Punktes ist constructiv zu bestimmen.

Erste Methode.

Die gegebene Verticalprojection des Punktes (p, p') auf dem Hyperboloide sei p (Taf. XXXVII, Fig. 245).

Um die horizontale Projection dieses Punktes zu bestimmen, denken wir durch denselben eine zur horizontalen Projectionsebene parallele Ebene e gelegt. Die Verticaltrace dieser Ebene ist die durch p gehende zur Grundlinie parallele Gerade e_v.

Die Ebene e schneidet das Hyperboloid in einer Ellipse (Σ, Σ'), den Asymptotenkegel dagegen in einer Ellipse (σ, σ'). Diese beiden Ellipsen sind (nach Satz 372), concentrisch und ähnlich gelegen. Nachdem aber die dem Asymptotenkegel angehörende Ellipse (σ, σ') mit der Horizontalspur $(abcd, a'b'c'd')$ des Asymptotenkegels ähnlich gelegen ist, so folgt, dass auch die Ellipse (Σ, Σ') mit dieser Horizontalspur $(abcd, a'b'c'd')$ ähnlich gelegen sei. Da ferner der Mittelpunkt (m, m') der Ellipse (Σ, Σ') auf der horizontal-projicierenden Achse

$(A\,B, A'\,B')$ liegt, so ist die horizontale Projection Σ' derselben eine mit der Ellipse $(a'\,b'c'd')$ concentrische und ähnlich gelegene Ellipse.

Die Achsen der Ellipse (Σ, Σ') können folgendermaßen bestimmt werden. Die große Achse derselben ist die Schnittgerade der Ebene e mit der Hauptebene η; deren Endpunkte (α, α') und (β, β') sind mithin die Schnittpunkte derselben mit der in der Ebene η liegenden Haupthyperbel. Die verticalen Projectionen α und β dieser Achsenendpunkte sind demnach die Schnittpunkte der Geraden e_v mit der durch die Scheitel A und B und die Asymptoten Y_1 und Y_2 gegebenen Verticalprojection der genannten Haupthyperbel.

Wir construieren diesfalls die erwähnten Punkte α und β vermittelst des die Hyperbel in A und die Asymptoten Y_1 und Y_2 berührenden Collinearkreises K_0. (Man vergleiche die Construction in Aufgabe 177.) Die horizontalen Projectionen α' und β' dieser Achsenendpunkte befinden sich in der Trace η_h.

Da die Horizontalprojection $\Sigma' = (\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,\delta')$ concentrisch und ähnlich gelegen mit der Ellipse $(a'b'c'd')$ ist, so findet man einfach die Endpunkte γ' und δ' der zweiten Achse auf $c'd'$ vermittelst der Parallelen $\alpha'\,\gamma'$ und $a'\,c'$; $\alpha'\delta'$ und $a'd'$. Die verticalen Projectionen γ und δ dieser Achsenendpunkte fallen mit der Verticalprojection m des Mittelpunktes von (Σ, Σ') zusammen.

Die Ellipse (Σ, Σ'), in welcher das Hyperboloid von der Ebene e geschnitten wird, ist somit durch ihre Achsen $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ und $(\gamma\delta, \gamma'\delta')$ vollständig bestimmt. Auf dieser Ellipse muss der gesuchte Punkt (p, p') liegen. Die Horizontalprojection desselben liegt einerseits in der Geraden π, welche durch die Verticalprojection p senkrecht zur Grundlinie gezogen wird, andererseits in der Horizontalprojection Σ' der Schnittellipse und wird sich daher im Schnitte beider ergeben.

Ermittelt man somit auf Grundlage der bekannten elementaren Construction, vermittelst der beiden über $\alpha'\,\beta'$ und $\gamma'\delta'$ beschriebenen Kreise K'_1 und K'_2, die Schnittpunkte p' und p'_1 der Ellipse $(\alpha'\,\beta'\,\gamma'\delta') = \Sigma'$ mit der Geraden π, so repräsentiert jeder dieser beiden Punkte die Horizontalprojection eines Punktes auf dem Hyperboloide, dessen Verticalprojection p ist.

Die beiden Punkte (p, p') und (p_1, p'_1) liegen selbstverständlich symmetrisch gegen die Hauptebene η.

§. 663.

Zweite Methode.

Sei p (Taf. XXXVII, Fig. 246) wieder die gegebene Verticalprojection des auf dem Hyperboloide festzustellenden Punktes (p, p').

Denken wir uns durch die Achse $(AB, A'B')$ und durch den Punkt p auf dem Hyperboloide eine Ebene $P_v P_h$ gelegt. Da die Achse $(AB, A'B')$ horizontal-projicierend ist, so muss es auch diese Ebene sein. Es ist daher einleuchtend, dass, sobald man die Horizontaltrace P_h anzugeben vermag, in derselben auch die zu bestimmende Horizontalprojection p' leicht gefunden sein wird.

Die zu suchende Ebene $P_v P_h$ wird das Hyperboloid offenbar in einer durch den Punkt (p, p') gehenden Hyperbel schneiden, deren reelle Achse mit der reellen Achse $(AB, A'B')$ des Hyperboloides identisch ist. Die Asymptoten dieses Hyperbelschnittes werden jene Erzeugenden des Asymptotenkegels sein, in welcher dieser von der Ebene $P_v P_h$ geschnitten wird. Die Verticalprojection Σ dieser Hyperbel wird selbst wieder eine Hyperbel sein, die durch den Punkt p geht und deren reelle Achse mit AB übereinstimmt.

Aus diesen Bestimmungsstücken lassen sich nunmehr die Asymptoten von Σ unschwer finden.

Denken wir uns die Punkte p und A durch die Gerade l verbunden. Diese Gerade l wird von der durch O parallel zur Grundlinie, also senkrecht zu AB gezogenen Geraden σ im Punkte F geschnitten, während die erst zu findenden Asymptoten g_1 und g_2 die Gerade l in μ und ν schneiden mögen. Besagte Punkte μ und ν müssen nun vor allem die Eigenschaft besitzen, dass, nach einer bekannten Eigenthümlichkeit der Hyperbel $\mu p = \nu A$, oder, dass, wenn man die Strecke Ap in o halbiert, $\mu o = \nu o$ sei.

Denkt man sich demnach den Hyperbeldurchmesser Oo gezogen, so ist der demselben conjugierte Durchmesser parallel zu l. Die sämmtlichen Paare conjugierter Durchmesser der Hyperbel bilden eine Involution, deren Doppelstrahlen bekanntlich die Asymptoten der Hyperbel selbst sind. Diese Strahleninvolution schneidet die Gerade l in einer Punktinvolution. Der Centralpunkt der letzteren ist offenbar o, da der ihm conjugierte Punkt (Schnittpunkt von l mit dem zu l parallelen, d. i. zu Oo conjugierten Durchmesser) in unendliche Entfernung fällt. Ein Paar conjugierter Punkte erhält man im Schnitte A und F der Geraden l mit den Hyperbelachsen OA und $O\sigma$. Hiedurch ist die Involution vollständig bestimmt.

Zieht man von dem Centralpunkte o aus, an den über AF als Durchmesser beschriebenen Kreis γ die Tangente or, so stellt die Länge or, wie bekannt, die Wurzel aus dem Involutionsmodul dar, während die Punkte μ und ν, welche von o um die Strecke $o\mu = o\nu = or$ entfernt sind, die beiden Doppelpunkte der Involution repräsentieren.

Verbindet man die Punkte μ und ν mit O durch die Geraden g_1 und g_2, so stellen diese letztgenannten Geraden die Asymptoten der Verticalprojection derjenigen Hyperbel (Σ, Σ') dar, in welcher die Ebene $P_v P_h$ das Hyperboloid schneidet. In dieser Eigenschaft sind aber g_1 und g_2 gleichzeitig auch die Verticalprojectionen der in der Ebene $P_v P_h$ liegenden Erzeugenden des Asymptotenkegels.

Die eine dieser Geraden, beispielsweise g_1, trifft die Grundlinie X in einem Punkte α, welcher nichts anderes als den Horizontaldurchstoßpunkt der entsprechenden Kegelerzeugenden (g_1, g'_1) darstellt. Die horizontale Projection α' dieses Punktes muss somit auf der Ellipse $(a'b'c'd')$ liegen.

Bestimmt man daher die beiden Punkte α' und α'_1, in welchen die Ellipse $(a'b'c'd')$ von der durch α senkrecht zur Grundlinie gezogenen Geraden π getroffen wird, vermittelst der über den Achsen $a'b'$ und $c'd'$ als Durchmessern beschriebenen Hilfskreise K'_1 und K'_2, so kann jeder dieser Punkte als Horizontaldurchstoßpunkt der fraglichen Kegelerzeugenden (g_1, g'_1) betrachtet werden.

Wählen wir zu diesem Zwecke allenfalls den Punkt α, so ist die in der Ebene $P_v P_h$ liegende Kegelerzeugende durch die Projectionen g_1 und $g'_1 = O'\alpha'$ repräsentiert. Nachdem aber die Ebene $P_v P_h$ eine horizontal-projicierende ist, so stellt $g'_1 = O'\alpha'$ gleichzeitig die Horizontaltrace P_h derselben dar. Auf dieser letzteren muss nun auch die Horizontalprojection p' des gesuchten Flächenpunktes (p, p'), welcher somit vollkommen bestimmt ist, liegen.

Der zweite Punkt (p, p'_1), welcher der gegebenen Verticalprojection p entspricht, liegt, wie schon vorher sichergestellt wurde, symmetrisch mit (p, p') gegen die Hauptebene η; seine Horizontalprojection p'_1, daher symmetrisch mit p' in Bezug auf η_h. Selbstverständlich würde sich diese Projection direct ergeben haben, wenn man statt α' den Punkt α'_1, also die Gerade $\alpha'_1 O' = P'_h$ benützt hätte.

§. 664.

284. Aufgabe. Es ist der Schnitt eines zweitheiligen, dreiachsigen Hyperboloides mit einer zur verticalen Projectionsebene parallelen Ebene zu ermitteln.

Die Horizontaltrace der gegebenen Ebene e sei e_h (Taf. XXXVII, Fig. 247). Da diese Schnittebene zur verticalen Projectionsebene, also auch zur Hauptebene η des Hyperboloides parallel ist, so schneidet sie das letztere in einer Hyperbel, welche mit der in der Ebene η liegenden Haupthyperbel ähnlich und ähnlich gelegen ist.

Die Asymptoten (y_1, y'_1) und (y_2, y'_2) der Schnitthyperbel werden mithin zu den Asymptoten (Y_1, Y'_1) und (Y_2, Y'_2) der genannten Haupthyperbel parallel sein.

Da ferner der Mittelpunkt (o, o') der Schnitthyperbel auf der zu ihrer Ebene e_h senkrechten Achse des Hyperboloides, d. i. auf der durch den Flächenmittelpunkt $(O\,O')$ gehenden vertical-projicierenden Geraden liegt, so folgt, dass die Verticalprojection der Schnitthyperbel mit der Verticalprojection der Haupthyperbel in η concentrisch ist, und dass mithin die Asymptoten y_1, y_2 und Y_1, Y_2 dieser Verticalprojectionen, oder was dasselbe ist, die Verticalprojectionen der Asymptoten beider Hyperbeln, zusammenfallen.

Die reelle Achse der Schnitthyperbel ist parallel zur Achse $(AB, A'B')$ der ihr parallelen Haupthyperbel; dieselbe wird daher durch die durch (o, o') gehende horizontal-projicierende Gerade (z, z') dargestellt erscheinen.

Es erübrigt schließlich noch, die Scheitel der Schnitthyperbel, d. i. die Schnittpunkte des Hyperboloides mit der horizontal-projicierenden Geraden (z, z') zu bestimmen.

Die Horizontalprojectionen A'_1 und B'_1 dieser Punkte fallen mit o' oder z' zusammen. Denken wir uns durch einen der zu bestimmenden Scheitel, beispielsweise durch (A_1, A'_1) eine zur horizontalen Projectionsebene parallele Ebene e' gelegt.

Sind wir im Stande, die Lage der Verticaltrace e'_v dieser Ebene e' zu fixieren, so ist auch die Verticalprojection A_1 des gesuchten Scheitels bestimmt, da diese offenbar im Schnitte von e'_v und z erhalten wird.

Die durch (A_1, A'_1) gehende Ebene e' schneidet das Hyperboloid in einer Ellipse, deren Horizontalprojection unmittelbar durch ihre Achsen $\alpha'\beta', \gamma'\delta'$ dargestellt werden kann. Da nämlich die Horizontalprojection dieser Ellipse concentrisch und ähnlich gelegen ist mit der Ellipse $(a'b'c'd')$, so repräsentiert der in $c'd'$ liegende, der Ellipse angehörende Punkt A'_1 bereits den einen Achsenendpunkt γ'. Den Endpunkt α' der zweiten zur Grundlinie parallelen Achse erhält man vermittelst der zu $c'a'$ parallelen Geraden $\gamma'\alpha'$.

Nachdem α' in der Trace η_h der Hauptebene η liegt, so stellt dieser Punkt die Horizontalprojection eines auf der Haupthyperbel in η liegenden Punktes (α, α') dar, dessen Verticalprojection α sich im Schnitte der durch die Horizontalprojection α' senkrecht zur Grundlinie gezogenen Geraden λ mit der Verticalprojection der Haupthyperbel ergeben wird.

Unsere weitere Aufgabe besteht sonach nur darin, „die Schnittpunkte einer Hyperbel, welche durch die reelle Achse AB und durch die Asymptoten Y_1, Y_2 gegeben ist, mit einer zur reellen Achse parallelen Geraden λ zu construieren“.

Betrachten wir zu diesem Behufe vorübergehend die Hyperbel (AB, $Y_1 Y_2$), als die Hauptmeridianhyperbel eines windschiefen Rotationshyperboloides, für welchen Fall wir jedoch die Grundlinie oder Projectionsachse mit der reellen Achse AB zusammenfallend voraussetzen wollen.

Unter dieser Annahme stellt der über der reellen Achse AB als Durchmesser beschriebene Kreis K die horizontale Projection des Kehlkreises, und die zur Achse AB parallele Tangente η'_1 dieses Kreises die Horizontalprojection einer Erzeugenden des Rotationshyperboloides dar, als dessen Verticalprojection die eine oder die andere Asymptote, etwa Y_2, angenommen werden kann. Gleichzeitig repräsentiert sodann die Gerade λ die Verticaltrace einer Parallelkreisebene. Der Punkt (σ, σ'), in welchem die Erzeugende (Y_2, η'_1) die Parallelkreisebene λ trifft, ist ein Punkt des Parallelkreises, welcher sonach vollkommen bestimmt erscheint. Die Endpunkte α und α_1 der Verticalprojection dieses Parallelkreises sind bereits die gesuchten Schnittpunkte der Geraden λ mit der Hyperbel (AB, $Y_1 Y_2$).

Kehren wir nach dieser Abschweifung zu der eigentlich gestellten Aufgabe zurück, so kennen wir nunmehr einen Punkt (α, α') der zur horizontalen Projectionsebene parallelen Ebene e', welche das Hyperboloid in jener Ellipse schneidet, deren Achsen in der horizontalen Projection durch $\alpha'\beta'$ und $\gamma'\delta'$ dargestellt sind. Die Verticaltrace e'_v dieser Ebene e' ist die durch α zur Grundlinie parallel gezogene Gerade. Im Durchschnitte der letzteren mit Z erhalten wir, wie bereits im Beginne unserer diesfälligen Betrachtung nachgewiesen wurde, die Verticalprojection A_1 des einen Scheitels der zu bestimmenden Schnitthyperbel.

Die Verticalprojection B_1 des zweiten Scheitels liegt mit A_1, in Bezug auf den Mittelpunkt O (oder o), symmetrisch, und könnte, wie man sich leicht überzeugt, auch im Schnitte der Achse Z mit der durch den zweiten Schnittpunkt α_1 von λ und der Haupthyperbel (AB, $Y_1 Y_2$) parallel zur Grundlinie gezogenen Geraden e^2_v erhalten werden.

Die S c h n i t t h y p e r b e l ist somit durch ihre Asymptoten (y_1, y'_1) und (y_2, y'_2) und durch ihre Scheitel (A_1, A'_1) und (B_1, B'_1) dargestellt, und folglich die gestellte Aufgabe gelöst.

§. 665.

285. Aufgabe. Es sind die Schnittpunkte eines dreiachsigen, zweitheiligen Hyperboloides mit einer zur verticalen Projectionsebene parallelen Geraden (g, g') zu construieren.

Entsprechend der gemachten Voraussetzung, dass die Gerade (g, g') (Taf. XXXVII, Fig. 248) zur verticalen Projectionsebene parallel sei, kann man durch dieselbe eine zur verticalen Projectionsebene parallele Ebene e_h legen. Diese Ebene e schneidet das Hyperboloid nach einer Hyperbel, deren Scheitel (A_1, A'_1) und (B_1, B'_1) so wie in der vorhergehenden Aufgabe ermittelt werden.

Die Verticalprojection dieser Hyperbel, welcher auf Grund vorausgeschickter Erörterungen gleichfalls die Asymptoten Y_1, Y_2 zukommen, schneidet die Verticalprojection g der gegebenen Geraden in zwei Punkten, welche offenbar die Verticalprojectionen der gesuchten Schnittpunkte darstellen werden.

Die besagten Schnittpunkte p_1 und p_2 der Hyperbel $(A_1 B_1, Y_1 Y_2)$ mit der Geraden g erhält man einfach vermittelst des den Asymptoten eingeschriebenen und durch A_1 gehenden Collinearkreises K_0. Sind dieselben construiert, so findet man unmittelbar die Horizontalprojectionen p'_1 und p'_2 dieser Schnittpunkte in der Horizontalprojection g' der gegebenen Geraden.

Eine zweite Methode behufs Bestimmung der Schnittpunkte (p_1, p'_1) und (p_2, p'_2) werden wir an späterer Stelle kennen lernen.

§. 666.

286. Aufgabe. Es ist der Schnitt eines dreiachsigen, zweitheiligen Hyperboloides mit einer vertical-projicierenden Ebene zu construieren.

a) Die schneidende Ebene ist zu keiner Erzeugenden des Asymptotenkegels parallel; deren Schnitt mit dem Hyperboloide ist somit eine Ellipse.

Die schneidende Ebene sei durch ihre Tracen $E_v E_h$ (Taf. XXXVII, Fig. 249) gegeben. Der Voraussetzung gemäß wird diese Ebene, parallel zu sich selbst so weit verschoben bis sie durch den Mittelpunkt (O, O') des Hyperboloides geht, den Asymptotenkegel nicht in reellen Erzeugenden schneiden; ihre Horizontaltrace wird also nach der Verschiebung die Gerade $a'b'$ außerhalb der Strecke $a'b'$ treffen müssen.

Die schneidende Ebene ist eine vertical-projicierende und mithin eine auf der Haupt- und Symmetrieebene η des Hyperboloides senk-

rechte Ebene. Es wird folglich auch die Schnittellipse durch die Hauptebene η symmetrisch getheilt werden, oder, was dasselbe ist, die Schnittgerade (σ, σ') der Hauptebene η mit der schneidenden Ebene $E_v E_h$ wird eine Achse der Schnittellipse repräsentieren.

Die Endpunkte dieser Achse sind die Schnittpunkte derselben mit der in der Ebene η liegenden Haupthyperbel. Die Verticalprojectionen m und n derselben ergeben sich als Schnittpunkte der Trace $E_v = \sigma$ mit der Hyperbel $(AB, Y_1 Y_2)$ vermittelst des Collinearkreises K_0. Aus den verticalen Projectionen m und n können die Horizontalprojectionen m' und n' dieser Schnittpunkte, die sich in $\eta_h = \sigma'$ ergeben, unmittelbar abgeleitet werden.

Halbieren wir die Achse $(mn, m'n')$ im Punkte (o, o'), so stellt der letztbezeichnete Punkt den Mittelpunkt der Schnittellipse und die durch denselben in der Ebene $E_v E_h$ zu (σ, σ') senkrecht gezogene, vertical-projicierende Gerade (π, π') die zweite Achse der Schnittellipse dar. Die Endpunkte (r, r') und (s, s') dieser Achse sind jene Punkte des Hyperboloides, deren Verticalprojectionen in $o = \pi$ zu suchen sind. Die Horizontalprojectionen r' und s' wird man, da bereits vorbereitende Constructionen bezüglich des Collinearkreises K_0 vorliegen, nach der ersten Methode der Aufgabe 283) anstandslos bestimmen können.

Die gesuchte Schnittellipse ist somit durch ihre Achsen $(mn, m'n')$ und $(rs, r's')$ festgestellt.

§. 667.

b) Die schneidende Ebene $E_v E_h$ ist parallel zu zwei Erzeugenden des Asymptotenkegels; die Schnittcurve mithin eine Hyperbel.

Wie im vorhergehenden Falle, so wird auch hier die Schnittgerade (s, s') (Taf. XXXVIII, Fig. 250) der schneidenden Ebene $E_v E_h$ mit der Hauptebene η eine Achse, und zwar die reelle Achse der Schnitthyperbel darstellen. Die Endpunkte dieser Achse sind die Schnittpunkte derselben mit der in der Ebene η liegenden Haupthyperbel; ihre Verticalprojectionen m und n ergeben sich auf bekannte Weise (mittelst des Collinearkreises K_0) als die Schnittpunkte von s mit der Hyperbel $(AB, Y_1 Y_2)$. Aus m und n leitet man direct die Horizontalprojectionen m' und n', die sich in η_h vorfinden, ab.

Da im vorliegenden Falle die Endpunkte der zweiten zu (s, s') senkrechten Achse der Schnitthyperbel imaginär sind, so werden wir für die Fixierung der letzteren andere Bestimmungsstücke, und zwar die Asymptoten, wählen.

Der Mittelpunkt der Schnitthyperbel ist der Halbierungspunkt (o, o') der eben gefundenen Achse $(mn, m'n')$. Durch diesen Punkt (o, o') gehen die Asymptoten der zu bestimmenden Schnitthyperbel, und sind dieselben zu jenen Erzeugenden des Asymptotenkegels parallel, welche eine zur schneidenden Ebene $E_v E_h$ parallele Lage besitzen.

Legen wir daher durch den Mittelpunkt (O, O') des Hyperboloides, parallel zu der gegebenen Ebene $E_v E_h$, eine Ebene $e_v e_h$, so schneidet dieselbe den Asymptotenkegel in zwei Erzeugenden (g_1, g'_1) und (g_2, g'_2), deren Verticalprojectionen g_1 und g_2 in die Trace e_v fallen. Die horizontalen Projectionen g'_1 und g'_2 ergeben sich als die Verbindungsgeraden von O' mit den beiden Punkten α'_1 und α'_2, in welchen die Ellipse $(a'b'c'd')$ von der Horizontaltrace e_h getroffen wird.

Die Punkte α'_1 und α'_2 können vermittelst der über den Achsen $a'b'$ und $c'd'$ als Durchmessern beschriebenen Hilfskreise K'_1 und K'_2 bequem gefunden werden. Die Kegelerzeugenden (g_1, g'_1) und (g_2, g'_2) sind nun diejenigen, welche zur schneidenden Ebene $E_v E_h$ parallel sind. Zieht man zu denselben durch (o, o') die Geraden (σ_1, σ'_1) und (σ_2, σ'_2) parallel, so repräsentieren diese letzteren die Asymptoten der Schnitthyperbel, welche somit vollständig bestimmt ist.

§. 668.

287. Aufgabe. **Es ist der Schnitt eines dreiachsigen, zweitheiligen Hyperboloides mit einer beliebigen Geraden zu construieren.**

Dieses Problem kann leicht auf die vorige Aufgabe und auf die bereits erörterte Construction der Schnittpunkte einer Geraden mit einer Ellipse oder einer Hyperbel zurückgeführt werden.

Man legt nämlich durch die gegebene Gerade eine vertical-projicierende Ebene E, und bestimmt den Schnitt derselben ebenso, wie in der vorhergehenden Aufgabe besprochen wurde. Die Horizontalprojection des Schnittes ist, im Falle dieser eine Ellipse ist, wie wir vorher fanden, durch beide Achsen $m'n'$ und $r's'$ (Taf. XXXVII, Fig. 249) oder, im Falle einer Hyperbel, durch die reelle Achse und durch die Asymptoten $m'n'$, resp. σ'_1, σ'_2, (Taf. XXXVIII, Fig. 250) bestimmt.

In den beiden eben angeführten Fällen kann man ohne jedwede Schwierigkeit die Schnittpunkte dieser Kegelschnitte mit der Horizontalprojection der gegebenen Geraden (durch Affinität, resp. Collineation mit einem Kreise) erhalten. Die letzteren werden sodann bereits die Horizontalprojectionen der gesuchten Schnittpunkte repräsentieren.

§. 669.

288. Aufgabe. Es sind die Schnittpunkte eines dreiachsigen, zweitheiligen Hyperboloides mit einer horizontal-projicierenden Geraden zu construieren.

Würde man diesfalls, sowie bei den vorhergegangenen Problemen durch die gegebene Gerade eine vertical-projicierende Ebene legen, so würde diese gleichzeitig auch horizontal-projicierend sein und man könnte deren Schnitt mit dem Hyperboloide, ohne vorher eine Drehung auszuführen, zur Construction der verlangten Schnittpunkte nicht benützen. Einfacher wird der nachstehend eingeschlagene Weg zum Ziele führen.

Führen wir nämlich durch die gegebene horizontal-projicierende Gerade (g, g') (Taf. XXXVIII, Fig. 251) und durch die Achse $(AB, A'B')$ des Hyperboloides die horizontal-projicierende Ebene $P_v P_h$, so schneidet diese Ebene das Hyperboloid in einer Hyperbel, deren reelle Achse mit der reellen Achse $(AB, A'B')$ des Hyperboloides zusammenfällt, und deren Asymptoten diejenigen Erzeugenden des Asymptotenkegels sind, in welchen derselbe von der Ebene $P_v P_h$ geschnitten wird. Die Horizontal-Durchstoßpunkte α'_1 und α'_2 dieser Kegelerzeugenden erhält man als die Schnittpunkte der Trace P_h mit der Ellipse $(a'b'c'd')$ vermittelst des über $a'b'$ als Durchmesser beschriebenen Affinkreises K_0. Die verticalen Projectionen α_1 und α_2 liegen in der Grundlinie.

Die Geraden $\sigma_1 = \alpha_1 O$ und $\sigma_2 = \alpha_2 O$ sind die Verticalprojectionen der in der Ebene $P_v P_h$ liegenden Erzeugenden des Asymptotenkegels, also auch die Asymptoten jener Hyperbel, welche die Verticalprojection des Schnittes der Ebene $P_v P_h$ mit dem Hyperboloide darstellt.

Die Schnittpunkte dieser Hyperbel $(AB, \sigma_1 \sigma_2)$ mit der Verticalprojection g der gegebenen Geraden sind sodann, wie an und für sich klar, die Verticalprojectionen der gesuchten Schnittpunkte. Dieselben können entweder mit Hilfe des den Asymptoten σ_1 und σ_2 eingeschriebenen, durch A gehenden Collinearkreises gefunden werden, oder auch dadurch, dass man in gleicher Weise, wie in Aufgabe 284) die Hyperbel $(AB, \sigma_1 \sigma_2)$ als Hauptmeridianhyperbel eines windschiefen Rotationshyperboloides betrachtet, und die zu suchenden Schnittpunkte p_1 und p_2, als die Projectionen der Endpunkte des in g sich projicierenden Parallelkreises auffasst.

§. 670.

289. Aufgabe. Der Schnitt eines zweitheiligen, dreiachsigen Hyperboloides ist mit irgend einer beliebig gegebenen Ebene $E_v E_h$ zu construieren.

a) Die parallel zur schneidenden Ebene $E_v E_h$ (Taf. XXXVIII, Fig. 252) durch den Mittelpunkt (O, O') gelegte Ebene schneidet den Asymptotenkegel nicht in reellen Erzeugenden; der Schnitt mit der Ebene $E_v E_h$ ist sonach eine Ellipse (Σ, Σ').

Man kann ohne besondere Schwierigkeit direct ein Paar conjugierter Durchmesser dieser Schnittellipse (Σ, Σ') construieren.

Wir wissen nämlich (nach Satz 372), dass jede Ebene das Hyperboloid und dessen Asymptotenkegel in concentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten schneidet. Conjugierte Durchmesser des einen Kegelschnittes sind daher gleichzeitig auch conjugierte Durchmesser des zweiten Kegelschnittes.

Diese Eigenschaft führt zu der folgenden Lösung. Wir führen an die Horizontalspur $(a'b'c'd')$ des Asymptotenkegels die Tangenten τ_1 und τ_2 parallel zu der Horizontaltrace E_h und bestimmen deren Berührungspunkte δ'_1 und δ'_2, was anstandslos entweder mittelst der Brennpunkte f_1 und f_2 oder mit Hilfe des Affinkreises K_0 geschehen kann. Die Verticalprojectionen δ_1 und δ_2 dieser Berührungspunkte liegen in der Grundlinie.

Die Schnittpunkte (μ, μ') und (ν, ν') der durch die Punkte (δ_1, δ'_1) und (δ_2, δ'_2) gehenden Kegelerzeugenden $(O\delta_1, O'\delta'_1) = (g_1, g'_1)$ und $(O\delta_2, O'\delta'_2) = (g_2, g'_2)$ mit der Ebene $E_v E_h$ repräsentieren, wie wir aus Vorhergegangenem wissen, die Endpunkte eines Durchmessers des Kegelschnittes (Σ_1, Σ'_1), in welchem der Asymptotenkegel von der Ebene $E_v E_h$ getroffen wird. Ferner ist bereits bekannt, dass der diesem Durchmesser $(\mu\nu, \mu'\nu')$ conjugierte Durchmesser derjenige sei, welcher durch den Mittelpunkt (o, o') (Halbierungspunkt von $[\mu\nu, \mu'\nu']$) parallel zur Horizontaltrace E_h der schneidenden Ebene geführt wird. Die Endpunkte (ϱ, ϱ') und (σ, σ') desselben werden als Schnittpunkte mit dem Asymptotenkegel auf die schon mehrfach besprochene Weise festgestellt.

Hiernach erhalten wir die Ellipse (Σ_1, Σ'_1), in welcher die Ebene $E_v E_h$ den Asymptotenkegel schneidet, durch das Paar conjugierter Durchmesser $(\mu\nu, \mu'\nu')$, $(\varrho\sigma, \varrho'\sigma')$ dargestellt. Die Geraden $(\mu\nu, \mu'\nu')$ und $(\varrho\sigma, \varrho'\sigma')$ sind aber, was ihre Lage anbelangt, gleichzeitig auch conjugierte Durchmesser der mit der Ellipse (Σ_1, Σ'_1)

concentrisch und ähnlich gelegenen Schnittellipse (Σ, Σ') der Ebene $E_v E_h$ mit dem Hyperboloide; die Endpunkte dieser Durchmesser werden daher die Schnittpunkte der genannten Geraden $(\mu\nu, \mu'\nu')$ und $(\varrho\sigma, \varrho'\sigma')$ mit dem Hyperboloide sein.

Die Schnittpunkte dieser Geraden, etwa jene von $(\mu\nu, \mu'\nu')$, mit dem Hyperboloide lassen sich leicht construieren. Besagte Gerade liegt nämlich in der durch die Achse $(AB, A'B')$ gehenden, die Kegelerzeugenden (g_1, g'_1) und (g_2, g'_2) enthaltenden horizontal-projicierenden Ebene $P_v P_h$. Diese Ebene $P_v P_h$ schneidet das Hyperboloid in einer Hyperbel, deren reelle Achse die Flächenachse $(AB, A'B')$ ist und deren Asymptoten die vorgenannten Kegelerzeugenden $(g_1\, g'_1)$ und (g_2, g'_2) sind. Die Verticalprojection dieser Hyperbel ist mithin durch die reelle Achse AB und durch die Asymptoten g_1 und g_2 gegeben. Bestimmen wir die Schnittpunkte m und n derselben mit der Verticalprojection $\mu\nu = S$ des vorgenannten Durchmessers durch Zuhilfenahme des den Asymptoten g_1 und g_2 eingeschriebenen, durch A gehenden Collinearkreises K'_0, so repräsentieren die bezeichneten Punkte die Verticalprojectionen der Schnittpunkte von $(\mu\nu, \mu'\nu')$ mit dem Hyperboloide. Die Horizontalprojectionen m' und n' ergeben sich unmittelbar auf $\mu'\nu' = S'$.

Den einen Durchmesser der gesuchten Schnittellipse (Σ, Σ') erhalten wir somit durch $(mn, m'n')$ dargestellt. Der ihm conjugierte Durchmesser fällt der Lage nach mit $(\varrho\sigma, \varrho'\sigma')$ zusammen. Die Endpunkte (r, r') und (s, s') desselben ergeben sich, infolge der Ähnlichkeit und der ähnlichen Lage der beiden Ellipsen (Σ, Σ') und (Σ_1, Σ'_1), vermittelst der betreffenden parallelen Geraden mr, ns, $\mu\varrho$ und beziehungsweise $m'r'$, $n's'$ und $\mu'\varrho'$, womit die gestellte Aufgabe, den Bedingungen entsprechend gelöst erscheint.

§. 671.

b) Die Schnittcurve der Ebene E mit dem Hyperboloide sei eine Hyperbel. Unter dieser Voraussetzung muss die schneidende Ebene $E_v E_h$ (Taf. XXXVIII, Fig. 253) eine solche Lage annehmen, dass die parallel zu ihr durch den Mittelpunkt (O, O') des Hyperboloides gelegte Ebene $e_v e_h$ den Asymptotenkegel in zwei reellen Erzeugenden (g_1, g'_1), (g_2, g'_2) schneidet.

Die letztgenannten Erzeugenden können dadurch bestimmt werden, dass man mittelst des über $a'b'$ beschriebenen Affinkreises K_0 die Schnittpunkte (α_1, α'_1) und (α_2, α'_2) der Horizontaltrace e_h mit

der Ellipse $(a'b', c'd')$ ermittelt und diese Punkte mit dem Mittelpunkte (O, O') verbindet.

Bestimmen wir ferner die Tangentialebenen des Asymptotenkegels längs der Erzeugenden $(O\alpha_1, O'\alpha'_1)$ und $(O\alpha_2, O'\alpha_2')$. Die Horizontaltracen derselben sind die Tangenten τ_1 und τ_2 der Ellipse $(a'b'c'd')$ in den Punkten α'_1 und α'_2. Ermittelt man weiters die Schnittgeraden (σ_1, σ'_1) und (σ_2, σ'_2) dieser Tangentialebenen mit der gegebenen Ebene $E_v E_h$, so ist bekannt, dass die letztgenannten Geraden die Asymptoten jener Hyperbel (Σ_1, Σ_1') repräsentieren, in welcher die Ebene $E_v E_h$ den Asymptotenkegel schneidet, während deren Schnittpunkt (o, o') den Mittelpunkt dieser Hyperbel darstellt.

Nach Satz 372) schneidet aber die Ebene $E_v E_h$ das Hyperboloid gleichfalls in einer Hyperbel (Σ, Σ'), welche mit der vorgenannten Hyperbel (Σ_1, Σ'_1) concentrisch und ähnlich gelegen ist. Diese beiden Hyperbeln (Σ, Σ') und (Σ_1, Σ'_1) haben somit die vorbezeichneten Asymptoten gemein. Die Geraden (σ_1, σ'_1) und (σ_2, σ'_2) werden dem zufolge bereits die Asymptoten der gesuchten Schnitthyperbel repräsentieren. Die reelle Achse der Hyperbel (Σ, Σ') finden wir unmittelbar als die eine Winkelhalbierende der beiden Asymptoten.

Behufs deren Construction legen wir den Mittelpunkt (o, o') der Schnitthyperbel um die horizontale Trace E_h, in die horizontale Projectionsebene nach o_0 um. Verbinden wir diesen Punkt o_0 mit den Horizontal-Durchstoßpunkten δ'_1 und δ'_2, so ergeben sich die umgelegten Asymptoten in σ^1_0 und σ^2_0; halbieren wir ferner den Winkel (σ^1_0, σ^2_0) (man findet leicht, in welchem Winkelraume die reelle Achse liegt) und führen die Winkelhalbierende x_0 in die Projection nach (x, x') zurück, so erhalten wir durch die letztgenannte Gerade die reelle Achse der Schnitthyperbel (Σ, Σ') dargestellt.

Es erübrigt jetzt nur noch, die Endpunkte derselben zu bestimmen. Dieselben können, da sie die Schnittpunkte der Geraden (x, x') mit dem Hyperboloid repräsentieren, nach der in Aufgabe 289) gegebenen Methode gefunden werden, indem man zu deren Bestimmung eine durch (x, x') und die Achse $(AB, A'B')$ gelegte Hilfsebene verwendet und so verfährt, wie dort angegeben wurde.

§. 672.

290. Aufgabe. Der Schnitt eines dreiachsigen, zweitheiligen Hyperboloides ist mit einer durch den Mittelpunkt desselben gehenden Ebene zu construieren.

Die diesbezügliche Lösung wird der in der vorhergehenden Aufgabe zur Geltung gebrachten ähnlich sein; nur treten, infolge der besonderen Lage der schneidenden Ebene, einige Vereinfachungen in der Construction auf.

Zunächst folgt aus dem Satze 370), dass die Asymptoten der Schnitthyperbel (sobald der Diametralschnitt überhaupt ein reeller ist, kann derselbe bekanntlich nur ein Hyperbelschnitt sein) diejenigen Erzeugenden des Asymptotenkegels seien, welche der letztere mit der schneidenden Ebene gemein hat.

Halbiert man sodann den Winkel, den dieselben einschließen, was durch einfache Umlegung bewerkstelligt werden kann, so erhält man, ebenso wie im vorhergehenden Falle, die reelle Achse der Schnitthyperbel. Die Endpunkte (Scheitel) derselben ergeben sich im Schnitte der genannten Achse mit dem Hyperboloide, und kann man zu deren Ermittelung, da diese Achse ein Durchmesser des Hyperboloides ist, ebenso einfach eine vertical-projicierende Hilfsebene verwenden, als von einer durch die Achse (AB, $A'B'$) des Hyperboloides gehenden, horizontal-projicierenden Hilfsebene Gebrauch machen.

Den besonderen Fall, wenn die schneidende Ebene zu einer Tangentialebene des Asymptotenkegels parallel ist, und mithin das Hyperboloid (nach Satz 372) in einer Parabel schneidet, werden wir an anderer Stelle durchführen.

§. 673.

291. Aufgabe. **Durch einen gegebenen Punkt ist eine Ebene zu legen, welche ein dreiachsiges, zweitheiliges Hyperboloid in einem Kreise schneidet.**

Für diesen besonderen Fall wollen wir bezüglich der Disposition der Projectionsebenen insofern eine Ausnahme machen, als wir die reelle Achse (AB, $A'B'$) (Taf. XXXVIII, Fig. 254) des Hyperboloides wohl als horizontal-projicierende Gerade beibehalten, das Hyperboloid jedoch um diese Achse im Vergleich zu der bisher üblichen Annahme aus der gewöhnlichen Stellung um 90^0 derart gedreht denken, dass nunmehr die Ellipse ($a'b'$, $c'd'$), in welcher der Asymptotenkegel die horizontale Projectionsebene schneidet, eine solche Lage annimmt, dass deren große Achse $a'b'$ zur Grundlinie senkrecht, die kleine Achse $c'd'$ hingegen zur Grundlinie parallel wird. Selbstverständlich wird auch in diesem Falle die horizontal-projicierende Ebene η, welche durch die letztgenannte Achse $c'd'$ geht, wieder eine Hauptebene des Hyperboloides repräsentieren.

Der gegebene Punkt (p, p') sei durch seine beiden Projectionen p und p' dargestellt.

Dass es auf dem Hyperboloide thatsächlich Kreise gibt, oder dass Ebenen existieren, welche diese Fläche nach Kreisen schneiden, geht schon aus dem Umstande hervor, als wir nachgewiesen haben, dass der Asymptotenkegel, als ein Kegel zweiten Grades, von zwei Scharen paralleler Ebenen in Kreisen geschnitten wird. Nachdem aber (infolge des Satzes 372) die Schnitte von Ebenen mit einem Hyperboloide und mit dessen Asymptotenkegel immer zwei concentrische, ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte sind, so folgt unmittelbar, dass jede Ebene, welche den Asymptotenkegel in einem Kreise schneidet, auch das Hyperboloid in einem Kreise schneiden müsse, welcher mit dem ersteren concentrisch ist.

Um sonach die gestellte Aufgabe ihrer Lösung zuzuführen, hat man bloß die Stellung zweier Ebenen $C_v C_h$ und $C'_v C'_h$ zu ermitteln, welche den Asymptotenkegel nach Kreisen schneiden. Letzteres kann in voller Übereinstimmung mit den in Aufgabe 71, Band II) durchgeführten Constructionen geschehen, so dass wir hier direct auf die dortige Lösung verweisen können. Hat man sonach die Kreisschnittebenen C und C' festgestellt, so wird man bloß durch den gegebenen Punkt (p, p') zu einer dieser beiden Ebenen, C oder C', beispielsweise zu C, eine parallele Ebene $E_v E_h$ zu legen haben, um den Forderungen der Aufgabe zu genügen.

Die besagte Ebene E wird das Hyperboloid in einem Kreise schneiden, dessen Durchmesser um so leichter zu bestimmen ist, als die schneidende Ebene $E_v E_h$, infolge der getroffenen Annahmen, eine vertical-projicierende ist. Wie den Ausführungen in Aufgabe 286) zu entnehmen, ist das Sehnenstück mn, welches die verticale Trace E_v auf der zur verticalen Projectionsebene parallelen Haupthyperbel bestimmt, zugleich die wahre Größe des Kreisdurchmessers. Hiernach ist auch die horizontale Projection des Kreises durch die Achsen $m'n'$ und $r's'$ dargestellt.

§. 674.

292. Aufgabe. Ein zweitheiliges, dreiachsiges Hyperboloid ist durch eine zu bestimmende Ebene nach einer Ellipse zu schneiden, deren Horizontalprojection ein Kreis ist.

Da jede Ebene das Hyperboloid und dessen Asymptotenkegel in ähnlichen, ähnlich gelegenen und concentrischen Kegelschnitten schneidet, und nachdem die Parallelprojectionen ähnlicher und ähnlich

gelegener Kegelschnitte in einer und derselben Ebene oder in parallelen Ebenen wieder ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte sind, so wird es offenbar genügen, eine Ebene zu bestimmen, welche den Asymptotenkegel in einer Ellipse, deren Horizontalprojection ein Kreis ist, schneidet.

Stellen wir, behufs Vereinfachung der durchzuführenden Constructionen, das gegebene Hyperboloid wieder so dar, dass dessen reelle Achse $(AB, A'B')$ (Taf. XXXVIII, Fig. 255) horizontal-projicierend werde und die kleine Achse $c'd'$ der Ellipse $(a'b', c'd')$, in welcher der Asymptotenkegel die horizontale Projectionsebene schneidet, eine zur Grundlinie parallele Lage annehme.

Es wird sich nun bloß darum handeln, den Asymptotenkegel durch eine Ebene nach einer Ellipse zu schneiden, deren horizontale Projection ein Kreis ist.

Zu diesem Zwecke stellen wir folgende Betrachtung an.

Die Horizontalspur eines Kegels und die horizontale Projection eines beliebigen ebenen Schnittes ist, wie wir wissen, in Bezug auf die horizontale Projection des Kegelscheitels als Collineationscentrum und die horizontale Trace der schneidenden Ebene als Collineationsachse, stets perspectivisch collinear. Berührt diese Horizontaltrace die Horizontalspur des Kegels in einem Punkte, so wird die besagte Trace in dem nämlichen Punkte auch mit der horizontalen Projection der Schnittcurve eine Berührung eingehen. Ferner wissen wir, dass zwei Kegelschnitte, welche sich in einem Punkte berühren, immer in perspectivisch-collineare Beziehung gebracht werden können.

Die eben angeführten Eigenschaften können in nachstehender Weise Verwendung finden.

Zeichnen wir einen beliebigen Kreis, welcher die Ellipse $(a'b', c'd')$ in dem Endpunkte c' der kleinen Achse berührt, so ist derselbe mit dieser Ellipse immer in perspectivisch-collinearer Beziehung. Dabei repräsentiert die zu $a'b'$ parallele Tangente beider Curven, im Punkte c', die Collineationsachse C_a. Das Collineationscentrum liegt, infolge der Symmetrie beider Curven gegen die Achse $c'd'$, nothwendig auf der letzteren.

Es frägt sich nun, wie groß man den Kreisradius anzunehmen, oder mit anderen Worten, welchen Punkt auf $c'd'$ man als den Mittelpunkt des Kreises zu wählen habe, damit das Collineationscentrum mit dem Mittelpunkte O' der Ellipse $(a'b'c'd')$ zusammenfalle.

Die geforderte Bedingung ergibt sich ohne jedwede Schwierigkeit. Es sei beispielsweise γ' der gesuchte Kreis. Ist ferner O' das Collineationscentrum für den Kreis γ' und für die Ellipse $(a'b', c'd')$,

so ist die Achse $a'b'$ gleichzeitig ein Collineationsstrahl, während der Achsenendpunkt a' der Ellipse dem einen der Punkte a_0 (und zwar dem näher gelegenen), in welchem der Kreis γ' von $a'b'$ getroffen wird, collinear entspricht. Weiters müssen sich die Tangenten τ und τ_0 der Ellipse im Punkte a' und des Kreises γ' im Punkte a_0 als collinear entsprechende Geraden in einem und demselben Punkte δ der Collineationsachse C_a treffen und endlich auch die Strecken $\delta c'$ und δa_0 als Kreistangenten von demselben Punkte aus, gleich lang sein.

Man erhält demgemäß den Punkt a_0, wenn man die Tangente τ der Ellipse im Punkte a' parallel zu $c'd'$ zieht, und aus dem Schnittpunkte δ derselben mit der Tangente t der Ellipse im Punkte c' einen Kreis λ beschreibt, welcher durch den Punkt c' geht. Der Kreis λ schneidet bereits die Achse $a'b'$ in dem gesuchten Punkte a_0. Halbiert man den Winkel $c'\delta a_0$ und zieht man die Winkelhalbierende $\delta\mu$, welche die Achse $c'd'$ in einem Punkte m trifft, so ist dieser letztgenannte Punkt m der Mittelpunkt jenes Kreises γ', welcher durch c' und a_0 geht, und in dem ersteren Punkte von C_a, in dem letzteren aber von δa_0 berührt wird, d. i. also jenes Kreises, welcher mit der Ellipse $(a'b', c'd')$, in Bezug auf den Mittelpunkt O' der letzteren als Collineationscentrum, collinear ist.

Betrachten wir nun den Kreis γ' als horizontale Projection eines ebenen Schnittes des Asymptotenkegels.

Den früheren Erörterungen gemäß repräsentiert die Collineationsachse C_a gleichzeitig die horizontale Trace Γ_h der schneidenden Ebene. Die letztere ist daher im vorliegenden Falle eine vertical-projicierende Ebene, zu deren vollständiger Bestimmung die Kenntnis eines Punktes derselben genügen wird. Wählen wir als solchen den Punkt f', in welchem die Achse $c'd'$ den Kreis γ' zum zweitenmale trifft. Dieser Punkt f' stellt aber die Horizontalprojection eines Punktes des zu bestimmenden Kegelschnittes (γ, γ') dar, welcher gleichzeitig auch der Erzeugenden $(Od, O'd')$ des Asymptotenkegels angehört. Die Verticalprojection f dieses Punktes wird sich somit unmittelbar in Od ergeben.

Die Gerade Γ_v, welche die Punkte c und f verbindet, ist sodann die Verticaltrace einer Ebene $\Gamma_v\Gamma_h$, welche den Asymtotenkegel in einem Kegelschnitte (γ, γ') trifft, dessen Horizontalprojection γ' ein Kreis ist.

Die besagte Ebene, so wie jede zu ihr parallele Ebene, wird daher mit dem Hyperboloide Kegelschnitte liefern, deren Horizontalprojectionen gleichfalls Kreise sind.

§. 675.

293. Aufgabe. In einem gegebenen Punkte eines dreiachsigen, zweitheiligen Hyperboloides ist die Berührebene desselben zu construieren.

Erste Methode.

Sei p (Taf. XXXVIII, Fig. 256) die Verticalprojection des auf dem Hyperboloide gegebenen Punktes. Die Horizontalprojection p' desselben, wurde diesfalls auf Grund der in Aufgabe 283) angegebenen zweiten Methode gefunden, indem wir die durch diesen Punkt gehende horizontal-projicierende Diametralebene $P_v P_h$ des Hyperboloides feststellten. Gelegentlich der Construction dieser Ebene ergibt sich auch die Verticalprojection Σ der in ihr liegenden durch den Punkt (p, p') gehenden Hyperbel (Σ, Σ'), welche durch die Scheitel A und B und die Asymptoten ϱ_1 und ϱ_2 dargestellt erscheint. Die letzteren repräsentieren gleichzeitig die Verticalprojectionen der in der Ebene $P_v P_h$ liegenden Erzeugenden des Asymptotenkegels.

Die Tangente t_2 der Verticalprojection Σ im Punkte p ergibt sich (wenn man bedenkt, dass das zwischen den Asymptoten ϱ_1 und ϱ_2 liegende Stück derselben durch den Berührungspunkt p halbiert wird) einfach dadurch, dass man $p\alpha$ parallel zu ϱ_2 zieht, und auf ϱ_1 die Strecke $\alpha\alpha_1 = \alpha O$ aufträgt. Die Verbindungsgerade $\alpha_1 p$ stellt sodann bereits die gesuchte Tangente t_2 dar. Dieselbe repräsentiert demnach die Verticalprojection der Tangente (t_2, t'_2) der Schnitthyperbel (Σ, Σ') im Punkte (p, p'), also die verticale Projection einer Tangente des Hyperboloides im Punkte (p, p'). Die Horizontalprojection t'_2 fällt mit der Horizontaltrace P_h zusammen.

Durch diese Tangente (t_2, t'_2) muss selbstverständlich die gesuchte Berührebene gehen.

Behufs Construction der letzteren benöthigen wir jedoch noch eine zweite Tangente des Hyperboloides im Punkte (p, p'). Dieselbe ergibt sich folgendermaßen.

Denken wir uns durch den Punkt (p, p') eine zur horizontalen Projectionsebene parallele Ebene e, deren Verticaltrace e_v sei, gelegt, so wird besagte Ebene das Hyperboloid in einer durch den Punkt (p, p') gehenden Ellipse schneiden. Die Horizontalprojection Σ_1 dieser Ellipse (Σ_1, Σ_1'), welche durch den Punkt p' geht, ist bekanntlich concentrisch und ähnlich gelegen mit der Ellipse $(a'b', c'd')$. Die Gerade $O'p' = P_h$ trifft die Ellipse $(a'b', c'd')$ in einem Punkte π'_1, welcher bereits zur Construction von P_h und p' verwendet wurde und den Horizontal-Durchstoßpunkt der Erzeugenden (ϱ_1, ϱ_1') des Asymptotenkegels repräsentiert.

Die Punkte π_1' und p' sind, da sie auf einer und derselben durch O' gehenden Geraden P_h liegen, ähnlich gelegene Punkte der beiden Ellipsen $(a'b', c'd')$ und Σ'_1. Construieren wir daher die Tangente τ' der Ellipse $(a'b', c'd')$ im Punkte π'_1, allenfalls mittelst des über $a'b'$ beschriebenen Affinkreises K_0, und ziehen wir zu τ' durch p' die Parallele t'_1, so wird durch diese letztgenannte Gerade, die Tangente der Ellipse Σ'_1 im Punkte p' dargestellt.

Hieraus folgt aber unmittelbar, dass t'_1 gleichzeitig auch die Horizontalprojection der Tangente (t_1, t'_1) jener Ellipse (Σ_1, Σ'_1) im Punkte (p, p') ist, in welcher die Ebene e das Hyperboloid schneidet. Die Verticalprojection t_1 dieser Tangente fällt selbstverständlich in die Verticaltrace e_v der schneidenden Ebene e.

Legen wir nun durch die beiden Tangenten (t_1, t'_1) und (t_2, t'_2) des Hyperboloides im Punkte (p, p') eine Ebene $T_v T_h$, so repräsentiert diese die gesuchte Berührungsebene des Hyperboloides im gegebenen Punkte (p, p').

§. 676.

Zweite Methode.

Der auf dem Hyperboloide gegebene Punkt sei (p, p') (Taf. XXXIX, Fig. 257). Ist eine der Projectionen dieses Punktes bestimmt, so kann die andere anstandslos aus der gegebenen Projection nach einer der vorher besprochenen Methoden abgeleitet werden.

Behufs Construction der Tangentialebene des Hyperboloides in dem Punkte (p, p') machen wir diesfalls von dem Satze 374) Gebrauch, auf Grund dessen der Berührungspunkt (p, p) der Mittelpunkt jenes Kegelschnittes ist, in welchem die Tangentialebene den Asymptotenkegel schneidet.

Legen wir demgemäß durch den Punkt (p, p') eine Ebene derart, dass dieselbe den Asymptotenkegel in einem Kegelschnitte trifft, dessen Mittelpunkt (p, p') selbst ist, so wird diese Ebene schon die gesuchte Tangentialebene repräsentieren.

Wir construieren die besagte Ebene auf nachstehende Weise.

Zunächst ziehen wir den durch den gegebenen Punkt (p, p') gehenden Durchmesser $(Op, O'p')$ des Asymptotenkegels, welcher die horizontale Projectionsebene in dem Punkte (δ, δ') schneidet.

Weiters construieren wir die Polare R_h des Punktes δ' in Bezug auf die Ellipse $(a'b', c'd')$ durch Zuhilfenahme des über $a'b'$ als Durchmesser beschriebenen Affinkreises K_0, indem wir vorerst die Polare R_0 des affinen Punktes δ_0 in Bezug auf den Kreis K_0 ermitteln.

Betrachten wir diese Polare R_h als die Horizontaltrace einer durch den Scheitel (O, O') des Asymptotenkegels gehenden Ebene $R_v R_h$, so stellt diese letztere, wie bekannt, die dem Durchmesser $(O\delta, O'\delta')$ des Kegels conjugierte Durchmesserebene des letzteren dar. Jede zu dieser Ebene parallele Ebene schneidet, wie bereits nachgewiesen, den Asymptotenkegel nach einem Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt auf dem Durchmesser $(O\delta, O'\delta')$ liegt.

Führen wir daher durch den Punkt (p, p'), welcher gleichfalls diesem Durchmesser angehört, die Ebene $T_v T_h$ parallel zur Ebene $R_v R_h$, so wird diese den Asymptotenkegel in einem Kegelschnitte treffen, dessen Mittelpunkt (p, p') ist. Die Ebene $T_v T_h$ repräsentiert sonach die gesuchte Berührungsebene des Hyperboloides im Punkte (p, p').

Die vorstehende Construction lässt sich auch auf einem anderen, directeren Wege leicht rechtfertigen.

Wir haben nämlich die dem Kegeldurchmesser $(O\delta, O'\delta')$ conjugierte Durchmesserebene $R_v R_h$ des Asymptotenkegels construiert. Da aber (nach Satz 373) das Hyperboloid und dessen Asymptotenkegel das nämliche System conjugierter Durchmesser und conjugierter Durchmesserebenen besitzen, so ist die Ebene $R_v R_h$ auch die dem Durchmesser $(O\delta, O'\delta')$ conjugierte Durchmesserebene in Bezug auf das Hyperboloid. Der Punkt (p, p') ist demnach als dessen Schnittpunkt mit dem Hyperboloide der Endpunkt des Durchmessers $(O\delta, O'\delta')$.

Endlich ist (nach Satz 435, Band II) die Tangentialebene $T_v T_h$ in dem Endpunkte (p, p') eines Durchmessers einer Fläche zweiten Grades, stets parallel zu der diesem Durchmesser $(Op, O'p')$, in Bezug auf die besagte Fläche, conjugierte Durchmesserebene $R_v R_h$.

Hiemit ist die vorhin durchgeführte Construction für die Tangentialebene des Hyperboloides im Punkte (p, p') gerechtfertigt und sonach die Aufgabe vollständig gelöst.

Die in dem vorstehenden Probleme benützten Eigenschaften des Hyperboloides und des demselben entsprechenden Asymptotenkegels können mit Vortheil auch zur Lösung der folgenden Aufgabe benützt werden.

§. 677.

294. Aufgabe. An ein dreiachsiges, zweitheiliges Hyperboloid sind parallel zu einer Ebene die Berührebenen zu legen und deren Berührungspunkte zu construieren.

Ist $E_v E_h$ (Taf. XXXIX, Fig. 257) die gegebene Ebene, so wird man vor allem durch den Mittelpunkt (O, O') eine zu $E_v E_h$ parallele Durchmesserebene $R_v R_h$ führen. Die Tangentialebenen in den End-

punkten des der Ebene $R_v R_h$ in Bezug auf das Hyperboloid conjugierten Durchmessers, sind zur Ebene $R_v R_h$ und somit auch zur Ebene $E_v E_h$ parallel, stellen demnach unmittelbar die gesuchten Berührebenen dar.

Bestimmen wir vermittelst des Affinkreises K_0 den Pol δ' der Trace R_h in Bezug auf die Ellipse $(a'b', c'd')$, so ist die Gerade $(O\delta, O'\delta')$, welche den gefundenen Pol (δ, δ') mit dem Mittelpunkte (O, O') verbindet, der der Ebene $R_v R_h$, sowohl in Bezug auf den Asymptotenkegel, als auch in Bezug auf das Hyperboloid conjugierte Durchmesser. Bestimmt man dessen Endpunkte (p, p') und (p_1, p'_1), d. i. die Schnittpunkte von $(O\delta, O'\delta')$ mit dem Hyperboloide (nach den in den Aufgaben 286 oder 289 angeführten Methoden), so repräsentieren dieselben bereits die Berührungspunkte der gesuchten Tangentialebenen. Diese letzteren selbst erhält man als die beziehungsweise durch (p, p') und (p_1, p'_1) parallel zu $E_v E_h$ geführten Ebenen $T_v T_h$ und $T'_v T'_h$.

§. 678.

295. Aufgabe. Die Berührungscurve eines dreiachsigen, zweitheiligen Hyperboloides mit einem demselben umschriebenen Kegel ist unter der Voraussetzung zu construieren, dass der Kegelscheitel auf einer der Achsen des Hyperboloides liege.

Nehmen wir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, an, dass der Kegelscheitel (p, p') (Taf. XXXIX, Fig. 258) auf der reellen Achse $(AB, A'B')$ des Hyperboloides gegeben sei.

Soll der Berührungskegel, also auch die Berührungscurve reell sein, so ist es nothwendige Bedingung, dass der Punkt (p, p') außerhalb des Hyperboloides, also innerhalb der Strecke $(AB, A'B')$ liege.

Die Ebene der zu bestimmenden Berührungscurve ist gleichzeitig die Polarebene des Punktes (p, p') in Bezug auf das Hyperboloid. Nachdem aber der Punkt (p, p') auf der Achse $(AB, A'B')$ liegt, muss diese Polarebene zu der der Achse $(AB, A'B')$ conjugierten Hauptebene ε parallel, d. h. zur Achse $(AB, A'B')$ senkrecht sein. Zur Construction dieser Ebene wird mithin die Feststellung eines Punktes derselben hinreichen.

Um einen solchen Punkt zu erhalten, ziehen wir von p aus an die Verticalprojection $(AB, Y_1 Y_2)$, der in der Hauptebene η liegenden Hyperbel die Tangenten t_1 und t_2 und ermitteln (mit Hilfe des über AB als Durchmesser beschriebenen Kreises K und den beiden Brennpunkten f_1 und f_2, wie in Aufgabe 178) deren Berührungspunkte m und n.

Die letztgenannten Punkte m und n sind sodann die Verticalprojectionen der Berührungspunkte (m, m') und (n, n') der in der Hauptebene η liegenden Haupthyperbel $[(AB, Y_1 Y_2); (AB, Y'_1 Y'_2)]$ mit den von (p, p') ausgehenden Tangenten.

In natürlicher Folge hiervon sind (m, m') und (n, n') die beiden in der Hauptebene η liegenden Punkte der Berührungscurve; es wird demnach die durch diese Punkte senkrecht zur Achse $(AB, A'B')$, also parallel zur horizontalen Projectionsebene geführte Ebene B_v, die Ebene der Berührungscurve repräsentieren.

Diese Berührungscurve selbst kann sofort auch durch ihre Achsen dargestellt werden, indem an und für sich klar ist, dass $(mn, m'n')$ als Schnitt der Ebene B_v mit der Hauptebene η bereits die eine der Achsen bestimme, während sich die Horizontalprojection $r's'$ der zweiten Achse der besagten Curve, infolge der Ähnlichkeit derselben mit der Ellipse $(a'b', c'd')$, einfach vermittelst der Parallelen $m'r'$, $n's'$, $a'c'$ und $b'd'$ ergibt.

Würde es sich bloß um die Lage der Ebene B_v der Berührungscurve, ohne Rücksicht auf die letztere selbst, handeln, so kann man noch einfacher verfahren.

Da nämlich die Ebene B_v die Polarebene des Punktes (p, p') in Bezug auf das Hyperboloid ist, so wird sie die Achse $(AB, A'B')$ in einem Punkte (π, π') schneiden, welcher der vierte harmonische Punkt zu den drei Punkten (A, A'); (B, B') und (p, p') sein muss.

Die Verticalprojection π desselben finden wir als den vierten harmonischen Punkt zu A, B und p vermittelst des über AB als Durchmesser beschriebenen Kreises K, indem wir die zu AB senkrechte durch p gehende Sehne $\xi\eta$ ziehen. Die Tangente τ_1 an K im Punkte ξ oder auch jene τ_2 im Punkte η schneidet AB bereits in dem verlangten Punkte π. Die durch π parallel zur Grundlinie gezogene Gerade B_v repräsentiert sodann die Verticaltrace der gesuchten Polarebene.

In gleicher Weise würde man die Polarebene construieren, wenn der Punkt (p_1, p'_1) innerhalb des Hyperboloides, d. h. außerhalb der Strecke $(AB, A'B')$ liegen würde.

Der Punkt (π, π') in der Achse $(AB, A'B')$ wäre in diesem Falle derjenige, dessen verticale Projection π_1 den Schnittpunkt von AB mit der Berührungssehne $\xi\eta$ der von p_1 aus an den Kreis K gezogenen Tangenten repräsentiert. Die Berührungssehne $\xi\eta$ stellt sodann gleichzeitig schon die verticale Trace der zur horizontalen Projectionsebene parallelen Polarebene des Punktes (p_1, p'_1) dar. Die

sich diesfalls so einfach gestalteten Constructionen können zweckdienlich auch zur Lösung des folgenden Problemes verwertet werden.

§ 679.

296. Aufgabe. Es ist der Pol einer beliebig gegebenen Ebene $P_v P_h$ in Bezug auf ein dreiachsiges, zweitheiliges Hyperboloid zu construieren.

Der Pol dieser Ebene liegt auf jenem Durchmesser, welcher ihrer Stellung conjugiert ist.

Wir führen daher durch den Mittelpunkt (O, O') (Taf. XXXIX, Fig. 259) des Hyperboloides, parallel zu der gegebenen Ebene $P_v P_h$, die Durchmesserebene $R_v R_h$, und bestimmen den ihr conjugierten Durchmesser (D, D'). Dies geschieht, indem man den Pol π' der Horizontaltrace R_h in Bezug auf die Ellipse $(a'b', c'd')$ durch Zuhilfenahme des der genannten Ellipse entsprechenden Affinkreises K_0 construiert, und denselben mit dem Mittelpunkte (O, O') des Hyperboloides verbindet. Die Verbindungsgerade $(\pi\, O, \pi'\, O')$ repräsentiert sodann den der Ebene $R_v R_h$ conjugierten Durchmesser (D, D') in Bezug auf den Asymptotenkegel sowohl, als auch in Bezug auf das Hyperboloid.

Auf diesem Durchmesser (D, D') liegt der zu suchende Pol der Ebene $P_v P_h$.

Bestimmen wir ferner den Schnittpunkt der Ebene $P_v P_h$ mit einer der Achsen des Hyperboloides, allenfalls den Schnittpunkt (p_1, p'_1), mit der reellen Achse $(AB, A'B')$, und construieren wir, wie in der vorhergehenden Aufgabe auseinandergesetzt wurde, die Polarebene B'_v dieses Punktes in Bezug auf das Hyperboloid, so muss der gesuchte Pol auch in dieser Ebene liegen. Denn, da sich der Pol (p, p') der Ebene B'_v in der Ebene $P_v P_h$ vorfindet, so muss (nach Satz 406, Band II), der Pol der letzteren Ebene in der ersteren liegen.

Der besagte Pol ergibt sich daher als Schnittpunkt der Ebene B'_v mit dem Durchmesser (D, D').

Selbstverständlich hätte man auch den Schnittpunkt (p_2, p'_2) der Ebene $P_v P_h$ mit der zur Grundlinie parallelen Achse des Hyperboloides verwenden können. In diesem Falle ist die Polarebene $B^2_v B^2_h$ des Punktes (p_2, p'_2), welche den Punkt (p, p') als den zu bestimmenden Pol enthält, senkrecht zur Grundlinie.

§. 680.

297. Aufgabe. Es ist die Berührungscurve eines dreiachsigen zweitheiligen Hyperboloides mit einem demselben umschriebenen Kegel

unter der Voraussetzung zu construieren, dass der Kegelscheitel in einer Hauptebene liege.

a) Der gegebene Kegelscheitel (P, P') (Taf. XXXVIII, Fig. 260) liege in einer von jenen beiden Hauptebenen, welche das Hyperboloid reell (in Hyperbeln) schneiden, beispielsweise etwa in der zur Bildebene (verticalen Projectionsebene) parallelen Ebene η.

Nachdem die Ebene der zu suchenden Berührungscurve die Polarebene des Kegelscheitels (P, P') in Bezug auf das Hyperboloid repräsentiert, und nachdem ferner der Punkt (P, P') in der Hauptebene η liegt, so muss die Polarebene von (P, P') durch den Pol dieser Hauptebene gehen, oder mit anderen Worten: die Polarebene muss zu der der Ebene η conjugierten Achse parallel, mithin vertical-projicierend sein.

Da aber weiters die Berührungscurve der geometrische Ort der Berührungspunkte aller von (P, P') aus an das Hyperboloid gezogenen Tangenten ist, so werden wir von der Verticalprojection P aus an die Hyperbel $(AB, Y_1 Y_2)$ bloß die Tangenten t_1 und t_2 zu führen und deren Berührungspunkte m und n (nach Aufgabe 178) zu bestimmen haben, um durch diese letzteren die verticalen Projectionen der in der Hauptebene η liegenden zwei Punkte (m, m') und (n, n') der verlangten Berührungscurve dargestellt zu erhalten. Die Horizontalprojectionen derselben erhält man unmittelbar in der Horizontaltrace η_h.

Die Verbindungsgerade mn oder B_v repräsentiert sodann die Verticaltrace der durch die beiden Punkte (m, m') und (n, n') gehenden vertical-projicierenden Ebene, oder die Verticaltrace der Ebene $B_v B_h$ der gesuchten Berührungscurve.

Die Gerade $(mn, m'n')$ stellt demnach, wie man den bei der Lösung der Aufgabe 286) angestellten Betrachtungen entnehmen kann, bereits die eine in der Hauptebene η liegende Achse der Berührungscurve dar; die zweite Achse geht durch den Mittelpunkt (o, o') [Halbierungspunkt der Strecke $(mn, m'n')$] der Berührungscurve und ist vertical-projicierend. Die horizontalen Projectionen ihrer Endpunkte ergeben sich durch dasselbe Verfahren, welches in Aufgabe 283) zu gleichem Zwecke zur Verwendung gelangte.

Diese Aufgabe ist identisch mit der: „Die Polarebene eines in der Hauptebene η liegenden Punktes (P, P') zu finden, wenn sich derselbe außerhalb des Hyperboloides vorfindet."

Liegt hingegen der Punkt (P, P') innerhalb des Hyperboloides, also innerhalb der in der Ebene η liegenden Haupt-

hyperbel, so können von dem besagten Punkte aus keine reellen Tangenten an die bezeichnete Curve gezogen werden.

Unter diesen Umständen bestimmt man die Polare des Punktes P in Bezug auf diese Hyperbel folgendermaßen.

Verbinden wir diesfalls den Punkt P (Taf. XXXIX, Fig. 261) mit dem einen Scheitel A der Hyperbel, so trifft die Verbindungsgerade PA die beiden Asymptoten Y_1 und Y_2 in den Punkten α_1 und α_2, die Hyperbel aber in einem zweiten Punkte A_1, welcher, da $A\alpha_1 = A_1\alpha_2$, leicht zu bestimmen ist.

Ziehen wir ferner die Gerade PB und bestimmen in gleicher Weise den Schnittpunkt B_1 derselben mit der gegebenen Hyperbel.

Betrachtet man PAA_1 und PBB_1 als die Diagonalen des überschlagenen Viereckes ABA_1B_1, so ergeben die Schnittpunkte π_1 und π_2 der Gegenseitenpaare AB und A_1B_1; AB_1 und A_1B als Verbindungsgerade die Polare des Punktes P in Bezug auf die Hyperbel in der Hauptebene.

Berücksichtigt man weiters, dass einerseits, wie bereits nachgewiesen wurde, die Polarebene des Punktes (P, P') auf der Hauptebene η senkrecht stehe, und dass dieselbe andererseits (Satz 413, Band II) durch die eben gefundene Polare $\pi_1\pi_2$ gehen müsse, so folgt, dass die letztere gleichzeitig auch die Verticaltrace B_v der Polarebene darstelle.

§. 281.

b) Der gegebene Kegelscheitel liegt in der (zur horizontalen Projectionsebene parallelen) Hauptebene E, welche das Hyperboloid in keiner reellen Curve schneidet.

Aus denselben Gründen, wie solche in der vorigen Aufgabe angeführt wurden, folgt, dass diesfalls die Ebene der gesuchten Berührungscurve auf der Hauptebene E senkrecht stehen, also eine horizontal-projicierende Ebene sein müsse. Um dieselbe ihrer Lage nach angeben und construieren zu können, stellen wir folgende Betrachtungen an.

Ziehen wir jenen Durchmesser (D, D') (Taf. XXXIX, Fig. 262) des Hyperboloides, welcher durch den gegebenen Punkt (P, P') geht, und construieren wir die diesem Durchmesser (D, D') conjugierte Durchmesserebene.

Behufs Bestimmung der genannten Ebene ermitteln wir zunächst die Polare des Horizontal-Durchstoßpunktes des bezeichneten Durchmessers in Bezug auf die Ellipse $(a'b'c'd')$. Da aber dieser Horizontaldurchstoßpunkt der unendlich ferne Punkt der Horizontalprojection

D' ist, so ist dessen Polare der dem Durchmesser D' conjugierte Durchmesser R_h der Ellipse $(a'b'c'd')$. Dieser Durchmesser wird vermittelst des Affinkreises K'_0 auf die bisher viel besprochene Weise construiert. Gleichzeitig können bei dieser Gelegenheit auch die Endpunkte δ'_1 und δ'_2 des Ellipsendurchmessers bestimmt werden.

Die durch R_h gehende, horizontal-projicierende Ebene $R_v R_h$ ist sodann bekanntlich die dem Durchmesser (D, D') conjugierte Durchmesserebene in Bezug auf den Asymptotenkegel sowohl, als auch in Bezug auf das Hyperboloid.

Nach dem (mit Zugrundelegung der Sätze 414 und 431, Band II) die Polarebene eines jeden Punktes des Durchmessers (D, D'), also auch des gegebenen Punktes (P, P') zu der Durchmesserebene $R_v R_h$ parallel ist, so wird es genügen, irgend einen Punkt der zu bestimmenden Polarebene festzustellen.

Als einer dieser Punkte kann offenbar jeder Punkt der Berührungscurve, welche in dieser Ebene liegt, oder mit anderen Worten der Berührungspunkt einer jeden von (P, P') aus an das Hyperboloid gelegten Tangentialebene betrachtet werden.

Am einfachsten lässt sich die Construction vermittelst einer jener Tangentialebenen durchführen, welche durch den Punkt (P, P') senkrecht zur Hauptebene η (also senkrecht zur verticalen Projectionsebene) gelegt werden können. Der Berührungspunkt (p, p') derselben liegt in der Hauptebene η selbst, während sich dessen Verticalprojection p als Berührungspunkt der in η liegenden Haupthyperbel mit einer der beiden von der Verticalprojection P des gegebenen Kegelscheitels ausgehenden Tangenten t ergibt, da die letztere gleichzeitig die Verticaltrace der obgenannten projicierenden Tangentialebene repräsentiert. Die durch (p, p') parallel zu $R_v R_h$ gelegte Ebene $B_v B_h$ stellt sodann die Ebene der zu bestimmenden Berührungscurve dar.

Die Berührungscurve selbst kann als Schnitt des Hyperboloides mit der Ebene $B_v B_h$ ohne jede Schwierigkeit auf bereits besprochene Weise construiert werden.

§. 682.

298. Aufgabe. **Die Ebene der Berührungscurve eines einem dreiachsigen, zweitheiligen Hyperboloide umschriebenen Kegels ist unter der Voraussetzung zu construieren, dass der Kegelscheitel eine beliebige Lage im Raume besitze.**

Der gegebene Kegelscheitel sei (P, P') (Taf. XXXIX, Fig. 263).

. Die Tangentialebenen einer Fläche zweiten Grades in den Punkten eines Achsen- oder Hauptschnittes stehen, wie wir wissen, auf der betreffenden Hauptebene senkrecht.

Im vorliegenden Falle werden mithin die Tangentialebenen des Hyperboloides in allen Punkten der in der Hauptebene η liegenden Haupthyperbel vertical-projicierende Ebenen sein, während ihre Verticaltracen die Tangenten der Hyperbel (AB, $Y_1 Y_2$) darstellen.

Ziehen wir daher durch die Verticalprojection P des gegebenen Kegelscheitels die Tangenten t_1 und t_2 an die Hyperbel (AB, $Y_1 Y_2$), so stellen diese die Verticaltracen zweier durch den Punkt (P, P') gehenden, vertical-projicierenden Tangentialebenen des Hyperboloides dar. Die Berührungspunkte (p_1, p'_1) und (p_2, p'_2) dieser letztgenannten Ebenen, welche in der Ebene η liegen, repräsentieren mithin zwei Punkte der Berührungscurve des Hyperboloides mit dem demselben aus dem Scheitel (P, P') umschriebenen Kegel.

Verbinden wir ferner den Punkt (P, P') mit dem Mittelpunkte (O, O') des Hyperboloides durch den Durchmesser (D, D') und bestimmen wir (wie in Aufgabe 293, zweite Methode) die diesem Durchmesser conjugierte Durchmesserebene $R_v R_h$, so wird die Polarebene jedes Punktes von (D, D'), also auch die des gegebenen Punktes (P, P'), parallel zu der Ebene $R_v R_h$ sein.

Wir erhalten demnach die geforderte Ebene der Berührungscurve als jene Ebene $B_v B_h$, welche durch die Gerade ($p_1 p_2$, $p'_1 p'_2$) parallel zur Ebene $R_v R_h$ gelegt wird.

Die Berührungscurve selbst kann, als Schnitt der Ebene $B_v B_h$ mit dem Hyperboloide, auf Grund der in Aufgabe 289) exponierten Methoden construiert werden. Mit der weiteren Durchführung können wir somit getrost auf die angezogenen Probleme verweisen.

§. 683.

299. Aufgabe. Es ist die Ebene der Berührungscurve eines dreiachsigen, zweitheiligen Hyperboloides mit einem demselben, parallel zu einer Geraden, umschriebenen Cylinder zu construieren.

Die gegebene Gerade, zu welcher die Cylindererzeugenden parallel sein sollen, sei (g, g') (Taf. XXXIX, Fig. 264).

Nach Satz 428, Band II) ist die Berührungscurve einer Fläche zweiten Grades mit einem derselben umschriebenen Cylinder stets die Schnittcurve der Fläche mit jener Diametralebene, welche der Richtung der Cylindererzeugenden conjugiert ist.

Der gestellten Aufgabe gemäß haben wir sonach bloß die der Richtung der Geraden (g, g') conjugierte Durchmesserebene des Hyperboloides, oder mit anderen Worten, die dem zu (g, g') parallelen Durchmesser (D, D') conjugierte Durchmesserebene $B_v B_h$ des Hyperboloides zu construieren, um den diesfallsigen Bedingungen zu genügen.

Nachdem aber die besagte Ebene $B_v B_h$ auch die dem Durchmesser (D, D') conjugierte Durchmesserebene in Bezug auf den Asymptotenkegel ist, so hat man nichts anderes zu thun, als die Polare B_h des Horizontal-Durchstoßpunktes δ' des Durchmessers (D, D') in Bezug auf die Ellipse $(a'b', c'd')$, allenfalls mittelst des über $a'b'$ beschriebenen Affinkreises K_0, zu construieren, um in derselben bereits die Horizontaltrace der gesuchten Ebene dargestellt zu erhalten. Da die bezeichnete Ebene durch den Mittelpunkt (O, O') des Hyperboloides geht, ist auch deren Verticaltrace B_v leicht zu ermitteln.

Die Berührungscurve selbst erhält man wieder als den Schnitt der Ebene $B_v B_h$ mit dem Hyperboloide, dessen neuerliche Construction wir hier, um überflüssige Wiederholungen zu vermeiden, ebenso wie in dem vorhergehenden Probleme, unter Hinweis auf Aufgabe 290) übergehen.

§. 684.

300. Aufgabe. **Die Polare einer gegebenen Geraden in Bezug auf ein dreiachsiges, zweitheiliges Hyperboloid ist zu construieren.**

Behufs Construction der der gegebenen Geraden (g, g') (Taf. XXXIX, Fig. 265), in Bezug auf das Hyperboloid entsprechenden Polare (g_1, g'_1), werden wir diesfalls von der Definition §. 378, Band II) Gebrauch machen. Wenn wir, der angeführten Definition gemäß, auf der Geraden (g, g') zwei Punkte annehmen und die Polarebene jedes dieser Punkte in Bezug auf das Hyperboloid construieren, so werden sich diese beiden Polarebenen bereits in der gesuchten Polare (g_1, g'_1) schneiden.

Selbstverständlich kömmt es nun darauf an, die vorerwähnten Punkte auf der Geraden (g, g') derart zu wählen, dass sich deren Polarebenen mit möglichster Einfachheit construieren lassen.

In dieser Hinsicht bietet sich uns vor allem derjenige Punkt (p_1, p'_1) als geeignet dar, in welchem die Gerade (g, g') die zur verticalen Projectionsebene parallele Hauptebene η des Hyperboloides schneidet.

Die Polarebene $B'_v B'_h$ des Punktes (p, p') ist, wie wir der Aufgabe 297) entnehmen, jene vertical-projicierende Ebene, deren Verticaltrace B'_v die Berührungssehne der von P_1 aus in der Ebene η an die Haupthyperbel (beziehungsweise von p_1 an die verticale Projection derselben) geführten Tangenten t_1 und t_2 repräsentiert.

Als zweiten Punkt auf der Geraden (g, g') wählen wir deren unendlich fernen Punkt. Die Polarebene $R_v R_h$ dieses unendlich fernen Punktes ist bekanntlich diejenige Durchmesserebene des Hyperboloides, welche dem zu (g, g') parallelen Durchmesser (D, D') conjugiert ist. Besagte Ebene construieren wir in voller Übereinstimmung mit dem in den vorhergehenden analogen Fällen beobachteten Vorgange.

Der Schnitt der beiden Polarebenen $B'_v B'_h$ und $R_v R_h$ liefert sodann, den angestellten Betrachtungen zufolge, unmittelbar die verlangte Polare (g_1, g'_1) der gegebenen Geraden (g, g').

§. 685.

301. Aufgabe. Durch eine gegebene Gerade sind an ein dreiachsiges, zweitheiliges Hyperboloid Berührebenen zu legen, und deren Berührungspunkte zu construieren.

Die durch die gegebene Gerade (g, g') (Taf. XXXIX, Fig. 265) gelegten Tangentialebenen des Hyperboloides berühren das letztere, nach Satz 409, Band II), in den nämlichen Punkten, in welchen dasselbe von den Polaren (g_1, g'_1) der gegebenen Geraden getroffen wird.

Wir haben demnach bloß (nach Aufgabe 287) die Schnittpunkte (m, m') und (n, n') der Polare (g_1, g'_1) mit dem Hyperboloide zu ermitteln, um in denselben sogleich auch die gesuchten Berührungspunkte zu erhalten. Die durch die Gerade (g, g') und beziehungsweise durch die Punkte (m, m') und (n, n') gelegten Ebenen $T^1_v T^1_h$ und $T^2_v T^2_h$ bestimmen sodann die verlangten Tangentialebenen des Hyperboloides. In der Folge werden wir noch eine andere, einfachere und elegantere Lösung dieser Aufgabe kennen lernen.

§. 686.

302. Aufgabe. Es ist der Schnitt eines einem dreiachsigen, zweitheiligen Hyperboloide, parallel zu einer gegebenen Geraden, umschriebenen Cylinders mit der horizontalen Projectionsebene zu ermitteln, oder mit anderen Worten: Es ist der Schlagschatten eines dreiachsigen, zweitheiligen Hyperboloides, bei gegebener Parallelbeleuchtung, auf die horizontale Projectionsebene festzustellen, oder

auch: Es ist die Contour eines orthogonal dargestellten dreiachsigen, zweitheiligen Hyperboloides, für eine gegebene Richtung des schief projicierenden Strahles, auf einer Ebene zu bestimmen.

Die Gerade, zu welcher die Erzeugenden des dem Hyperboloide umschriebenen Cylinders parallel sein sollen, sei (g, g') (Taf. XL, Fig. 266).

Man könnte diesfalls (wie in Aufgabe 299), die Ebene der Berührungscurve construieren, den Schnitt derselben mit dem Hyperboloide bestimmen, denselben sodann als Leitcurve eines zur Geraden (g, g') parallelen Cylinders betrachten, und den Schnitt dieses Cylinders mit der horizontalen Projectionsebene aufsuchen, um die gestellte Aufgabe ihrer Lösung zuzuführen.

Einfacher jedoch gelangen wir zum Ziele, wenn wir direct den Schnitt des Cylinders mit der horizontalen Projectionsebene, als Enveloppe der horizontalen Tracen aller zur Geraden (g, g') parallelen Tangentialebenen und als Ort der Horizontal-Durchstoßpunkte aller zur Geraden (g, g') parallelen Tangenten des Hyperboloides betrachten.

Da die Achse des dem Hyperboloide parallel zur Geraden (g, g') umschriebenen Cylinders (wie aus Früherem bekannt) der zu der Geraden (g, g') parallele Durchmesser (D, D') des Hyperboloides ist, und weiters die Mittelpunkte sämmtlicher auf einem Cylinder zweiten Grades liegenden Kegelschnitte sich in der Achse des Cylinders vorfinden, so folgt, dass der Horizontal-Durchstoßpunkt o' des Durchmessers (D, D') der Mittelpunkt jenes Kegelschnittes Σ sei, in welchem der umschriebene Cylinder die horizontale Projectionsebene schneidet.

Ziehen wir von o' aus, durch Zuhilfenahme des Affinitätskreises K_0, die Tangenten ϱ_1 und ϱ_2 an die Ellipse $(a'b', c'd')$, so repräsentieren diese die Horizontaltracen der durch (D, D') gehenden, also zu (g, g') parallelen Tangentialebenen des Asymptotenkegels.

Jede Tangentialebene des Asymptotenkegels ist aber bekanntlich eine Berührungsebene des Hyperboloides, deren Berührungspunkt in unendlicher Entfernung liegt. Hieraus folgt, dass die Horizontaltracen ϱ_1 und ϱ_2 dieser Tangentialebenen, Tangenten des Kegelschnittes Σ sind, und, da dieselben durch den Mittelpunkt o' desselben gehen, speciell die Asymptoten von Σ darstellen. Besagter Kegelschnitt wird daher eine Hyperbel sein.

Um die letztgenannte Curve vollständig bestimmt zu erhalten, wird außer der Angabe der Asymptoten ϱ_1 und ϱ_2, die weitere Kenntnis eines einzigen Punktes derselben genügen.

Behufs Bestimmung des erforderlichen Hyperbelpunktes schneiden wir das gegebene Hyperboloid durch die horizontal-projicierende Ebene $P_v P_h$, welche durch die reelle Achse $(AB, A'B')$ und den Durchmesser (D, D') geht, durch eine Ebene also, die zu der Geraden (g, g') parallel gelegt wird.

Die Schnitthyperbel ist diesfalls durch die Achse (AB, AB') und die Asymptoten (σ_1, σ'_1) und (σ_2, σ'_2), welch letztere die der Ebene $P_v P_h$ angehörenden Erzeugenden des Asymtotenkegels sind, bestimmt. Die Verticalprojection dieser Hyperbel ist sonach durch die reelle Achse AB und die Asymptoten σ_1 und σ_2 festgestellt.

Ziehen wir, auf Grund der bereits mehrfach erörterten Methode, an diese Verticalprojectionen die Tangenten τ_1 und τ_2 parallel zur Verticalprojection g der gegebenen Geraden, so repräsentieren diese Tangenten τ_1 und τ_2 offenbar die Verticalprojectionen jener Tangenten, welche an die in der Ebene $P_v P_h$ liegende Hyperbel parallel zu der Geraden (g, g') geführt wurden, und welche somit auch Tangenten an das Hyperboloid selbst darstellen. Die horizontalen Projectionen τ'_1 und τ'_2 fallen mit der Trace P_h zusammen. Die horizontalen Durchstoßpunkte m' und n' derselben (in der Trace P_h liegend) sind mithin zwei Punkte der Hyperbel Σ.

Die verlangte Hyperbel Σ ist demnach durch die Asymptoten ϱ_1 und ϱ_2 und durch einen der beiden Punkte m' oder n' vollkommen bestimmt, und kann nun, mit Hilfe eines den Asymptoten eingeschriebenen Collinearkreises, die reelle Achse derselben u. s. w. anstandslos construiert werden.

Die eben erörterten Constructionen liefern eine elegante und ziemlich einfache Methode für die Durchführung eines im Vorhergegangenen auf einem anderen Wege gelösten Problemes, so dass wir uns veranlasst fühlen, die angedeutete Lösung hier zu besprechen.

§. 687.

303. Aufgabe. Durch eine gegebene Gerade sind an ein dreiachsiges, zweitheiliges Hyperboloid die möglichen Berührungsebenen zu legen und deren Berührungspunkte zu construieren.

Die gegebene Gerade sei (g, g') (Taf. XXXX, Fig. 266). Construieren wir vor allem den Kegelschnitt Σ, in welchem der dem Hyperboloide parallel zur Geraden (g, g') umschriebene Cylinder die horizontale Projectionsebene schneidet. Wählen wir diesbezüglich wieder als Bestimmungsstücke für die sich hierbei ergebende Hyperbel Σ deren Asymptoten ϱ_1 und ϱ_2 und einen Punkt m' der bezeichneten Curve.

Jede Berührebene des umschriebenen Cylinders ist gleichzeitig eine zu (g, g') parallele Berührebene des Hyperboloides. Legen wir daher durch die Gerade (g, g') an den umschriebenen Cylinder die Berührebenen, so werden diese auch die zu bestimmenden Tangentialebenen des Hyperboloides repräsentieren. Die Horizontaltracen dieser Ebenen gehen einerseits durch den Horizontal-Durchstoßpunkt h' der gegebenen Geraden (g, g'), während sie andererseits die Hyperbel Σ in je einem Punkte berühren.

Wir construieren die besagten Tracen in der Weise, dass wir den Asymptoten ϱ_1 und ϱ_2 einen Kreis Σ_0 eingeschrieben denken, und diesen als Collinearkreis der Hyperbel Σ betrachten. In diesem Falle ist der Mittelpunkt o' der Hyperbel das Collineationscentrum, und die Berührungssehne $\beta_1 \beta_2$ der Asymptoten ϱ_1 und ϱ_2 mit dem Kreise Σ_0 die Gegenachse G_a.

Dem Punkte m' der Hyperbel Σ entspricht der vermittelst des Collineationsstrahles $o'm'$ auf dem Kreise Σ_0 bestimmte Punkt m_0. Es ist offenbar gleichgiltig, welcher der beiden Schnittpunkte von Σ_0 mit $m'o'$ gewählt wird. Hiernach entsprechen sich die zur Asymptote ϱ_2 parallele Gerade $m'\varDelta$ und die Gerade $m_0 \varDelta \beta_2$, welche den collinearen Punkt m_0 mit dem der Gegenachse G_a angehörenden Punkte β_2 der Asymptote ϱ_2 verbindet. Der Schnittpunkt $\varDelta$ der beiden genannten Geraden ist daher ein Punkt der Collineationsachse, welche sich nurmehr als die durch $\varDelta$ parallel zu G_a gezogene Gerade C_a darstellt. Hiemit ist die collineare Beziehung vollkommen festgestellt.

Die durch h' gehenden Tangenten $T^1{}_h$ und $T^2{}_h$ der Hyperbel Σ erhält man nun als die Collineargeraden derjenigen Tangenten $T^0{}_1$ und $T^0{}_2$ des Kreises Σ_0, welche durch den, dem Punkte h' collinear entsprechenden Punkt gehen.

Ebenso einfach ergeben sich durch die collineare Beziehung auch die Berührungspunkte π'_1 und π'_2 der Tangenten $T^1{}_h$ und $T^2{}_h$ mit der Hyperbel Σ.

Den vorstehenden Betrachtungen gemäß sind nun $T^1{}_h$ und $T^2{}_h$ die Horizontaltracen der gesuchten Berührebenen. Die Verticaltracen $T^1{}_v$ und $T^2{}_v$ derselben können ohneweiters construiert werden, da der Vertical-Durchstoßpunkt v der Geraden (g, g') als bekannt vorliegt.

Nachdem somit die beiden Berührebenen construiert sind, erübrigt nur noch die Bestimmung von deren Berührungspunkten.

Der Punkt (π_1, π'_1), in welchem die Trace $T^1{}_h$ die Hyperbel Σ berührt, ist der Horizontal-Durchstoßpunkt jener Erzeugenden des umschriebenen Cylinders, längs welcher derselbe von der Ebene $T^1{}_v T^1{}_h$

berührt wird. Diese Erzeugende erhält man unmittelbar als die zu (g, g') durch (π_1, π'_1) parallel gezogene Gerade (g_1, g'_1).

Auf der genannten Geraden (g_1, g_1') muss offenbar auch der Berührungspunkt der Ebene $T'_v T'_h$ mit dem Hyperboloide liegen. Andererseits muss aber der besagte Punkt auch der Berührungscurve des Cylinders mit dem Hyperboloide angehören. Bestimmt man daher die Ebene der Berührungscurve des Cylinders, oder was dasselbe ist, die dem zu (g, g') parallelen Durchmesser (D, D') conjugierte Durchmesserebene $R_v R_h$, so repräsentiert ihr Durchstoßpunkt (p_1, p'_1) mit der vorgenannten Cylindererzeugenden (g_1, g'_1) bereits den gesuchten Berührungspunkt der Ebene $T^1_v T^1_h$.

Die erwähnte Durchmesserebene $R_v R_h$ ergab sich gelegenheitlich der Bestimmung der Asymptoten ϱ_1, ϱ_2 der Hyperbel Σ. Die Horizontaltrace R_h derselben erhält man direct als die Verbindungsgerade der Berührungspunkte μ und ν von ϱ_1 und ϱ_2 mit der Ellipse $(a'b', c'd')$ oder was dasselbe ist, als die Polare des Punktes o' in Bezug auf die Ellipse $(a'b', c'd')$.

In gleicher Weise wie (p_1, p'_1) findet man auch den Berührungspunkt (p_2, p'_2) des Hyperboloides mit der Tangentialebene $T^2_v T^2_h$.

Der Schnitt Σ des dem Hyperboloide parallel zu einer Geraden umschriebenen Cylinders mit der horizontalen Projectionsebene kann, auf dem bei der vorhergehenden Aufgabe zur Anwendung gebrachten Principe fußend, auch zur Lösung des nachstehenden, jedoch gleichfalls schon vorher durchgeführten Problemes benützt werden.

§. 688.

304. Aufgabe. Parallel zu einer gegebenen Ebene sind an ein dreiachsiges, zweitheiliges Hyperboloid Berührebenen zu legen, und deren Berührungspunkte zu construieren.

Behufs Durchführung der gestellten Aufgabe nehmen wir in der gegebenen Ebene E eine beliebige Gerade g an, und bestimmen den Schnitt des dem Hyperboloide, parallel zur Geraden g, umschriebenen Cylinders mit der horizontalen Projectionsebene. Führt man an den Schnitt (Hyperbel Σ), zur Horizontaltrace der Ebene E parallele Tangenten, so stellen diese die Horizontaltracen der zur Ebene E parallelen Berührebenen des Cylinders, also auch jene des Hyperboloides dar. Die Berührungspunkte der Ebene mit dem Hyperboloide ergeben sich in analoger Weise wie jene in dem vorausgeschickten Beispiele mittelst der Berührerzeugenden dieser Ebenen mit dem Cylinder.

Nachdem die Wahl der Geraden g in der gegebenen Ebene E freisteht, so wird man zweckmäßig als g jene zur Hauptebene η, d. i. zur verticalen Projectionsebene parallele Gerade in E annehmen. (Man vergleiche hierbei die analoge in Aufgabe 263) für das Ellipsoid durchgeführte Construction.

XXIX. Capitel.

Constructionen und Aufgaben, das elliptische Paraboloid betreffend.

§. 689.

Bevor wir auf die eigentliche Construction und die Durchführung hierhergehöriger Probleme übergehen, wollen wir, ebenso wie bei den bereits besprochenen Flächen, gewisse Annahmen bezüglich der Lage der Projectionsebenen gegen die Fläche feststellen.

Vor allem setzen wir wieder voraus, dass die Achse (Z, Z') (Taf. XXXX, Fig. 267) des Paraboloides eine horizontal-projicierende Gerade sei. Ferner mögen die beiden aufeinander senkrecht stehenden, durch diese Achse gehenden Hauptebenen gleichfalls besondere Lagen gegen die Projectionsebenen erhalten, und zwar wollen wir diesbezüglich annehmen, dass die eine parallel, die andere dagegen senkrecht zur verticalen Projectionsebene sei. Da diese beiden Hauptebenen horizontal-projicierend sind, so ist die zweitgenannte Ebene insbesondere senkrecht zur Grundlinie.

Endlich wollen wir uns noch eine weitere bestimmte Voraussetzung erlauben.

Jede zur Achse (Z, Z') senkrechte und somit, den getroffenen Annahmen zufolge, jede zur horizontalen Projectionsebene parallele Ebene schneidet, wie bereits bekannt, das Paraboloid in einer Ellipse, deren Achsen die Schnittgeraden der genannten Ebene mit den beiden Hauptebenen sind.

Wir wählen im allgemeinen stets jene Hauptebene η als zur verticalen Projectionsebene parallel, welche die „großen" Achsen aller zur Flächenachse (Z, Z') senkrechten Ellipsenschnitte enthält. Dieser Voraussetzung entsprechend wird der Schnitt des Paraboloides mit der horizontalen Projection eine Ellipse $(a'b', c'd')$ sein, deren große Achse $a'b'$ parallel, deren kleine Achse $c'd'$ aber senkrecht zur Grundlinie liegt.

Betrachten wir nun auch die beiden Parabeln, in welchen das Paraboloid von den Hauptebenen geschnitten wird.

Sei T_A die verticale Trace der zur horizontalen Projectionsebene nothwendigerweise parallelen Scheiteltangentialebene. Dieselbe wird somit gleichzeitig auch die verticale Projection jener Scheiteltangente repräsentieren, welche der in der zur verticalen Projectionsebene parallelen Hauptebene η liegenden Parabel angehört. Die verticale Projection des Brennpunktes dieser Parabel sei F_1. Der Brennpunkt derjenigen Parabel, welche in der zweiten zur Grundlinie senkrechten Hauptebene $\pi_v \pi_h$ liegt, sei F_2. Da, wie oben vorausgesetzt wurde, eine zur horizontalen Projectionsebene parallele Ebene auf der ersteren Parabel eine größere Sehne, als auf der zweiten bestimmt, so ist einleuchtend, dass auch der Brennpunkt F_2 dem Scheitel A des Paraboloides näher als der Brennpunkt F_1 liegen müsse. Umgekehrt sind diese Angaben auch hinreichend, wenn sich die großen Achsen der Horizontalellipsen in der zur verticalen Projectionsebene parallelen Hauptebene η vorfinden.

Wird das Paraboloid ausnahmsweise so gestellt, dass die kleinen Achsen der horizontalen Schnittellipse dieser Fläche zur verticalen Projectionsebene parallel sein sollen, so wird dies an der betreffenden Stelle ausdrücklich bemerkt werden.

Sehen wir weiters noch nach, welche Stücke zur vollständigen Bestimmung des elliptischen Paraboloides überhaupt nothwendig sind, und welche am bequemsten für die zu vollziehenden Constructionen verwertet werden können.

Vor allem ist klar, dass das Paraboloid bestimmt sein wird, wenn die Scheiteltangentialebene T_A und die Brennpunkte (F_1, F'_1) und (F_2, F'_2) der beiden Hauptparabeln als gegeben vorliegen. In diesem Falle sind eben die beiden Hauptparabeln vollkommen sichergestellt, und man kann sich das Paraboloid durch eine Ellipse, welche parallel zur horizontalen Projectionsebene fortschreitet und bei dieser Bewegung ihre Größe derart verändert, dass die vier Achsenendpunkte derselben stets durch die vier Schnittpunkte ihrer Ebene mit den beiden Hauptparabeln repräsentiert erscheinen, erzeugt denken.

Die eine der beiden Hauptparabeln liegt aber diesfalls in der zur Grundlinie senkrechten Hauptebene $\pi_v \pi_h$, daher deren beide Projectionen gerade Linien sind. Wollte man demnach mit oder an dieser Parabel Constructionen vornehmen, so wäre zuvor immer erst eine Drehung derselben in die zur verticalen Projectionsebene parallele Lage durchzuführen. Dieser Umweg wird selbstverständlich zu vermeiden

sein und daher getrachtet werden müssen, diese Hauptparabel durch irgend ein anderes Bestimmungsstück zu ersetzen.

Wir haben vorher das Paraboloid durch eine horizontal liegende Ellipse erzeugt gedacht, deren Achsenendpunkte in jeder Lage auf den beiden Hauptparabeln liegen. Nachdem aber alle parallelen Schnitte einer Fläche zweiten Grades stets ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte sind, so können wir die eine der Hauptparabeln, und zwar die in der Hauptebene $\pi_v \pi_h$ liegende, als Bestimmungsstück ausscheiden, dafür jedoch das Achsenverhältnis der horizontalen Schnittellipsen, als gegeben, substituieren.

Ist also die in der Hauptebene η liegende Parabel durch die Scheiteltangente und den Brennpunkt F_1 gegeben, und nimmt man für die horizontalen Schnittellipsen ein bestimmtes Achsenverhältnis an, so ist durch diese Stücke das Paraboloid offenbar gleichfalls vollkommen bestimmt. Denn man kann dasselbe wieder durch die Lagenveränderung einer variablen Ellipse erzeugt denken, deren Ebene e_v ununterbrochen zur horizontalen Projectionsebene parallel bleibt, deren große Achse $(a_1 b_1, a'_1 b'_1)$ die Sehne der gegebenen, durch die Ebene e_v bestimmten Parabel ist, und deren kleine Achse $(cd, c'd')$ aus $(ab, a'b')$ vermittelst des stattfindenden constanten Achsenverhältnisses abgeleitet werden kann.

Statt dieses Achsenverhältnis in beliebiger Weise anzugeben, denken wir uns dasselbe direct in jener Ellipse $(a'b'c'd')$ dargestellt, in welcher das Paraboloid die horizontale Projectionsebene schneidet. Die große Achse $a'b'$ dieser Ellipse ist die Verbindungsgerade der horizontalen Durchstoßpunkte a' und b' der zur verticalen Projectionsebene parallelen Hauptparabel, während als kleine Achse eine beliebige Strecke $c'd'$, welche jedoch kleiner als $a'b'$ ist, angenommen werden kann. Dies vorausgesetzt wird das Verhältnis $a'b' : c'd'$ das vorgenannte „constante Achsenverhältnis" repräsentieren.

In dieser letztangegebenen Weise wollen wir das elliptische Paraboloid bei den folgenden Constructionen dargestellt voraussetzen und übergehen somit zur Lösung der einzelnen fundamentalen Aufgaben.

§. 690.

305. Aufgabe. **Ein Punkt auf einem elliptischen Paraboloide ist durch seine Verticalprojection gegeben; die Horizontalprojection desselben ist zu construieren.**

Denken wir uns durch die gegebene Verticalprojection p (Taf. XXXXI, Fig. 268) eine zur Grundlinie parallele Gerade e_v gezogen. Dieselbe repräsentiere die Verticaltrace der durch den zu bestimmenden

Punkt (p, p'), parallel zur horizontalen Projectionsebene, gelegten Ebene e. Die besagte Ebene schneidet das Paraboloid in einer durch den Punkt (p, p') gehenden Ellipse, deren große Achse die Schnittgerade der Ebene e_v mit der Hauptebene η ist.

Die Endpunkte dieser Achse ergeben sich als die Schnittpunkte (a_1, a'_1) und (b_1, b'_1) der Ebene e_v mit der in der Hauptebene η liegenden Parabel. Die Verticalprojectionen a_1 und b_1 derselben erhält man, mit Zuhilfenahme der Directrix D, als die Schnittpunkte der Trace e_v mit der durch die Scheiteltangente T_A und den Brennpunkt F gegebenen Verticalprojection der obbezeichneten Parabel. Die Horizontalprojectionen a'_1 und b'_1, welche in der Horizontaltrace η_h liegen, können aus den Verticalprojectionen a_1 und b_1 unmittelbar abgeleitet werden. Da die Schnittellipse $(a_1 b_1 c_1 d_1, a'_1 b'_1 c'_1 d'_1)$ der Ebene e mit der Horizontalspur $(a' b' c' d')$ ähnlich gelegen ist, und ihr Mittelpunkt (o, o') auf der Achse (Z, Z') liegt, so ist deren Horizontalprojection $(a'_1 b'_1 c'_1 d'_1)$ concentrisch und ähnlich gelegen mit der Ellipse $(a' b' c' d')$. Es ergibt sich daher die kleine Achse $c'_1 d'_1$ derselben einfach vermittelst der Parallelen $a'_1 c'_1$ und $a' c'$; $b'_1 d'_1$ und $b' d'$.

Nachdem der zu bestimmende Punkt (p, p') auf der Schnittellipse der Ebene e mit dem Paraboloide liegen muss, so erhalten wir dessen Horizontalprojection im Schnitte der durch p senkrecht zur Grundlinie gezogenen Geraden λ mit der Horizontalprojection $(a'_1 b'_1 c'_1 d'_1)$ der genannten Ellipse. Da ferner die Gerade λ die Ellipse $(a' b' c' d')$ in zwei Punkten p' und p'_1 schneidet, welche gegen die Trace η_h symmetrisch liegen, so folgt, dass auch der gegebenen Verticalprojection p zwei Punkte (p, p') und (p, p'_1) des Paraboloides entsprechen, welche eine in Bezug auf die Hauptebene η symmetrische Lage haben.

§. 691.

306. Aufgabe. Es ist der Schnitt einer vertical-projicierenden Ebene mit einem elliptischen Paraboloide zu construieren.

Die schneidende, vertical-projicierende Ebene sei $E_v E_h$ (Taf. XXXX, Fig. 269). Da $E_v E_h$ auch auf der Hauptebene η senkrecht steht, so ist deren Schnitt mit dem Paraboloide gegen diese Hauptebene symmetrisch, oder mit anderen Worten: die Schnittgerade (s, s') der Ebene $E_v E_h$ mit der Hauptebene η ist eine Achse des Schnittes. Die Achsenendpunkte sind die Schnittpunkte (m, m') und (n, n') mit der in der Ebene η liegenden Hauptparabel.

Die Verticalprojectionen m und n dieser Schnittpunkte kann man als gemeinsame Punkte der Geraden s mit der durch den Scheitel A und den Brennpunkt F gegebenen Parabel (nach der in Aufgabe 206) auseinandergesetzten Methode) construieren. Die Horizontalprojectionen m' und n', welche sich in der Geraden s' vorfinden, können unmittelbar aus den Punkten m und n abgeleitet werden.

Halbiert man die Achse $(mn, m'n')$ im Punkte (o, o'), so erhält man den Mittelpunkt der Schnittellipse. Die durch (o, o') gehende, zu $(mn, m'n')$ in der Ebene $E_v E_h$ senkrecht gezogene, mithin verticalprojicierende Gerade stellt die zweite Achse der Schnittellipse dar. Die Endpunkte (p, p') und (r, r') derselben bestimmt man, ähnlich dem Vorgange in der vorausgeschickten Aufgabe, als jene Punkte des Paraboloides, deren Verticalprojectionen p und r mit o zusammenfallen.

Die letztere Construction ist übrigens entbehrlich und kann für die Folge umgangen werden, da wir sogleich nachweisen werden, dass die Horizontalprojection $(m'n', p'r')$ ähnlich und ähnlich gelegen der Ellipse $(a'b', c'd')$ sei.

Vorerst wollen wir jedoch noch nachstehende allgemeine Aufgabe behandeln.

§. 692.

307. Aufgabe. Es ist der Schnitt eines elliptischen Paraboloides mit einer beliebig gegebenen Ebene $E_v E_h$ zu construieren.

Nehmen wir die zur verticalen Projectionsebene parallele Hauptebene η des Paraboloides als Affinitätsebene an, und setzen wir weiters voraus, die Affinitätsstrahlen seien in Bezug auf diese Ebene senkrecht, also vertical-projicierend. Wählen wir ferner den Modul der Affinität derart, dass sich die Ellipse $(a'b', c'd')$ (Taf. XXXX, Fig. 270), welche die Horizontalspur des Paraboloides darstellt, affin in den über ihrer Achse $a'b'$ als Durchmesser beschriebenen Kreis K_0 transformiert.

Unter diesen Verhältnissen werden sich auch alle zur horizontalen Projectionsebene parallelen, sowie alle mit $(a'b', c'd')$ ähnlich gelegenen Ellipsenschnitte des Paraboloides in Kreise transformieren, oder mit anderen Worten: das elliptische Paraboloid wird durch diese affine Transformation in ein Rotationsparaboloid übergehen. Hierbei bleibt die Achse (Z, Z') auch Achse des Rotationsparaboloides, und die in der Hauptebene (Affinitätsebene) η liegende Parabel wird, da sie bei der Transformation unverändert bleibt, die Hauptmeridianparabel des Rotationsparaboloides darstellen.

Denken wir uns die schneidende Ebene $E_v E_h$ gleichzeitig mit transformiert, so übergeht dieselbe in eine Ebene $E^0_v E^0_h$, welche durch die Schnittgerade (l, l') der Ebene $E_v E_h$ mit der Affinitätsebene η geht, und das Rotationsparaboloid in einer Ellipse schneidet, welche affin jener Ellipse entsprechen wird, in welcher $E_v E_h$ das elliptische Paraboloid schneidet.

Auf Grund vorhergegangener Untersuchungen (Satz 343) wissen wir aber, dass die horizontale Projection eines beliebigen ebenen Schnittes eines Rotationsparaboloides, vorausgesetzt, dass die Achse des letzteren horizontal-projicierend ist, ein Kreis sei; es wird also auch im vorliegenden Falle die horizontale Projection der transformierten Schnittellipse, d. i. die Horizontalprojection jener Ellipse, in welcher das (transformierte) Rotationsellipsoid von der Ebene $E^0_v E^0_h$ geschnitten wird, ein Kreis K'_0 sein, dessen Radius und Mittelpunkt sich auf bereits bekannte Weise (Aufgabe 213) ergibt. — Die Verticalprojection dieser Schnittellipse sei K.

Um die zu bestimmende Schnittellipse zu erhalten, haben wir nichts anderes zu thun, als die eben construierte Ellipse (K, K'_0) affin zurückzutransformieren. Hierbei wird, da die Affinitätsstrahlen vertical-projicierend sind, die verticale Projection K der Ellipse (K, K'_0) unverändert bleiben.

Selbstverständlich würde man nunmehr das gewünschte Resultat erreichen, wenn man K als die Verticalprojection einer in der ursprünglichen Ebene $E_v E_h$ liegenden Ellipse betrachten, und dann ihre Horizontalprojection K' ableiten wollte. Wir ziehen es jedoch vor, um zu einem bestimmten, weiter verwendbaren Resultate zu gelangen, die Horizontalprojection K' der gesuchten Schnittcurve auf anderem Wege zu bestimmen.

Die besagte Horizontalprojection wird sich nämlich unmittelbar ergeben, wenn man den Kreis K'_0 affin zurücktransformiert. Da bei dieser Rücktransformation gleichzeitig der Kreis K_0 in die Ellipse $(a'b', c'd')$ übergeht, so wird auch der Kreis K'_0 in eine Ellipse K' überführt, welche der Ellipse $(a'b', c'd')$ ähnlich sein muss.

Letzteres ist leicht folgendermaßen nachzuweisen. Denken wir uns zu diesem Behufe zwei beliebige Kreise in irgend einer Ebene in Bezug auf die nämliche Affinitätsachse, dieselbe Richtung der Affinitätsstrahlen und denselben Affinitätsmodul transformiert, so ist einleuchtend, dass wenn man in dem einen Kreise irgend ein Paar rechtwinkliger Durchmesser und in dem zweiten Kreise die zu diesen Durchmessern parallelen Durchmesser annimmt, diese beiden Paare von rechtwinkligen Durchmessern sich affin in zwei Paare paral-

leler, conjugierter Durchmesser der beiden, den Kreisen affin entsprechenden Ellipsen transformieren werden.

Aus der beliebigen Wahl dieser Rechtwinkelpaare ist unschwer zu entnehmen, dass, wenn man in der einen Ellipse ein Paar conjugierter Durchmesser annimmt und zu denselben die beiden parallelen Durchmesser der zweiten Ellipse zieht, diese ebenfalls conjugierte Durchmesser der letzteren sein müssen.

Hieraus folgt aber eben dasjenige, was wir nachzuweisen hatten, dass nämlich die beiden, den Kreisen affin entsprechenden Ellipsen ähnlich und ähnlich liegend seien.

Berücksichtigen wir nun, dass in den vorher angestellten Betrachtungen bezüglich der Lage der das elliptische Paraboloid schneidenden Ebene, außer der Annahme, dass dieselbe zur Achse (Z, Z') des Paraboloides nicht parallel sei (in welchem Falle die horizontale Projection ihres Schnittes mit dem Paraboloide eine gerade Linie wäre), keine besondere Voraussetzung gemacht wurde, so gilt das eben Gefundene für jede beliebige Lage der schneidenden Ebene $E_v E_h$ und wir erhalten demnach den interessanten Satz:

388. „*Ist die Achse eines elliptischen Paraboloides horizontal-projicierend, so sind die Horizontalprojectionen aller ebenen Schnitte des Paraboloides ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen, deren Achsen zu den Horizontaltracen der beiden Hauptebenen parallel sind.*“

Auf Grund dieses Satzes werden vielfältige Constructionen beträchtliche Vereinfachungen erfahren.

§. 693.

308. Aufgabe. **Es sind die Schnittpunkte eines elliptischen Paraboloides mit einer beliebig gegebenen Geraden zu construieren.**

Legen wir durch die gegebene Gerade (g, g') (Taf. XXXX, Fig. 271) eine vertical-projicierende Ebene $E_v E_h$, so ist einleuchtend, dass diese Ebene das Paraboloid in einer Ellipse schneiden wird, welche die Gerade (g, g') in den gesuchten Punkten treffen muss.

Die eine Achse $(mn, m'n')$ dieser Schnittellipse kann (in Übereinstimmung mit Aufgabe 306), als die Sehne der in der Hauptebene η liegenden Hauptparabel bestimmt werden.

Da mit Zugrundelegung des letztaufgestellten Satzes die Horizontalprojection $(m'n', p'r')$ der besagten Ellipse mit der Ellipse $(a'b', c'd')$ ähnlich gelegen ist, so erhalten wir die kleine Achse $p'r'$ derselben vermittelst der beziehungsweise zu $a'd'$ und $b'c'$ parallelen Geraden $m'r'$ und $n'p'$.

Die Horizontalprojectionen P'_1 und P'_2 der zu bestimmenden Schnittpunkte ergeben sich nun offenbar als jene Punkte, welche der Ellipse $(m'n', p'r')$ und der Horizontalprojection g' der gegebenen Geraden gemeinschaftlich sind. Dieselben können mittelst des über der Achse $m'n'$ als Durchmesser beschriebenen Kreises K_0 direct construiert werden. Aus den somit festgestellten horizontalen Projectionen der Schnittpunkte lassen sich die Verticalprojectionen P_1 und P_2 auf g unmittelbar ableiten.

§. 694.

309. Aufgabe. **Die horizontale Projection eines Punktes auf dem elliptischen Paraboloide liegt als gegeben vor; die Verticalprojection desselben ist zu construieren.**

Oder was dasselbe ist:

Der Schnittpunkt des Paraboloides mit einer horizontal-projicierenden Geraden ist zu bestimmen.

Dass in diesem Falle wirklich nur ein Punkt existiert, welcher der Aufgabe entspricht, ist leicht einzusehen. Das Paraboloid wird jedoch als Fläche zweiten Grades von einer beliebigen Geraden in zwei Punkten geschnitten. Ist aber, wie im vorliegenden Falle, die Gerade zu der Achse der obgenannten Fläche parallel, so ist der eine Schnittpunkt der auf dieser Achse liegende unendlich ferne Punkt des Paraboloides; es kann mithin nur noch ein im endlichen liegender Schnittpunkt vorhanden sein.

Denken wir uns durch die gegebene Horizontalprojection P' (Taf. XXXX, Fig. 272) und durch die Horizontalprojection Z' der Achse (Z, Z'), eine Gerade P_h gezogen, so repräsentiert dieselbe die Horizontaltrace jener horizontal-projicierenden Ebene $P_v P_h$, welche durch den zu suchenden Punkt (P, P') und durch die Achse (Z, Z') des Paraboloides geht.

Diese Ebene $P_v P_h$ schneidet das elliptische Paraboloid in einer Parabel, deren Achse mit der des Paraboloides, d. i. mit (Z, Z') zusammenfällt, und deren Scheitel mit jenem (A, A') des Paraboloides identisch ist.

Bestimmen wir ferner die Schnittpunkte m' und n' der Horizontaltrace P_h mit der Ellipse $(a'b', c'd')$, so repräsentieren diese die Horizontalprojectionen zweier in der Grundebene liegenden Punkte (m, m') und (n, n') der der Ebene $P_v P_h$ angehörenden Schnittparabel. Diese Parabel (Σ, Σ') ist mithin durch ihre Achse (Z, Z'), ihren Scheitel (A, A') und einen Punkt (m, m') oder (n, n) bestimmt. Die-

selbe wird die durch die gegebene Horizontalprojection P' gehende horizontal-projicierende Gerade in dem gesuchten Punkte (P, P') treffen.

Um daher die Verticalprojection P des verlangten Punktes (P, P') zu finden, haben wir nichts anderes zu thun als den Schnittpunkt der durch P' senkrecht zur Grundlinie gezogenen Geraden mit der Verticalprojection Σ der Schnittparabel (Σ, Σ'), d. i. mit jener Parabel Σ aufzusuchen, welche durch die Achse Z, den Scheitel A und den Punkt m gegeben ist.

Behufs Durchführung dieser Construction ermitteln wir vorerst den Brennpunkt F_1 der Parabel Σ, indem wir von einer bekannten Eigenschaft der Parabel Gebrauch machen. Ist μ der Fußpunkt des von m auf die Achse Z gefällten Perpendikels, und schneidet die Tangente t der Parabel im Punkte m die Achse Z in α, und die Scheiteltangete T_A dagegen im Punkte ϱ, so ist bekanntlich $A\alpha = A\mu$, also auch $\varrho A = \frac{1}{2} m\mu$.

Wir erhalten demnach den Punkt ϱ als den Schnittpunkt der Scheiteltangente T_A mit dem durch den Mittelpunkt ω von $m\mu$ auf dieselbe gefällten Perpendikel. Es repräsentiert sodann ϱm die Tangente der Parabel Σ im Punkte m. Die Senkrechte aus dem Punkte ϱ auf ϱm trifft nun bekanntlich die Achse Z in dem Brennpunkte F_1 dieser Parabel.

Weiters ist nunmehr auch deren Directrix D_1 leicht zu construieren. Die letztere wird von der zur Grundlinie senkrechten, durch P' gehenden Geraden im Punkte π getroffen. Errichtet man im Punkte o, welcher die Strecke πF_1 halbiert (also im Schnittpunkte der Geraden πF_1 mit der Scheiteltangente T_A) eine Senkrechte auf $F_1\pi$, so trifft dieselbe die Gerade $P'\pi$ in einem Punkte P derart, dass $P\pi = PF_1$ wird.

Dieser Punkt P gehört sonach der Parabel Σ an, ist daher, den gepflogenen Erörterungen gemäß, die Verticalprojection des gesuchten Punktes, d. i. die Verticalprojection jenes Punktes, des Paraboloides, dessen Horizontalprojection mit dem gegebenen Punkte P' zusammenfällt.

§. 695.

Die Bestimmung des Brennpunktes F_1 und überhaupt die Bestimmung der Parabel (Σ, Σ') kann man übrigens gänzlich umgehen, indem man die letztere in eine zur Bildebene (verticale Projectionsebene) parallele Hauptparabel transformiert.

Zur Erreichung obigen Zweckes möge folgende Betrachtung dienen.

Führen wir durch P' und Z' (Taf. XXXX, Fig. 273) die Gerade P_h, so wird dieselbe die Horizontaltrace einer horizontal-projicierenden durch den zu suchenden Punkt (P, P') und die Achse (Z, Z') des Paraboloides gehenden Ebene $P_v P_h$ repräsentieren.

Die bezeichnete Ebene schneidet, wie wir im vorhergehenden gesehen haben, das Paraboloid in einer Parabel (Σ, Σ'), deren Achse (Z, Z'), deren Scheitel (A, A') ist, und welche durch jene beiden Punkte (m, m') und (n, n') geht, die sich als Schnittpunkte der Ebene $P_v P_h$ oder beziehungsweise ihrer Horizontaltrace P_h mit der Horizontalspur $(a'b', c'd')$ des Paraboloides ergeben.

Durch diese Parabel (Σ, Σ') und durch die in der zur verticalen Projectionsebene parallelen Hauptebene η befindlichen Hauptparabel, kann man (nach Satz 451, Band II), jederzeit zwei Kegelflächen zweiten Grades legen. Es lässt sich diesbezüglich unschwer nachweisen, dass die eine dieser Flächen, im vorliegenden Falle, insbesondere eine Cylinderfläche sei.

Denken wir uns nämlich das Paraboloid durch eine zur horizontalen Projectionsebene parallele Ebene e_v geschnitten, so ist die so entstandene Schnittfigur eine mit der Ellipse $(a'b', c'd')$ ähnlich gelegene Ellipse $(a_1 b_1, c_1 d_1; a'_1 b'_1, c'_1 d'_1)$, welche die Ebene $P_v P_h$, also auch die in derselben liegende Parabel (Σ, Σ') in den beiden Punkten (m_1, m'_1) und (n_1, n'_1) schneidet.

Die Horizontalprojection $(a'_1 b'_1, c'_1 d'_1)$ dieser Ellipse ist concentrisch und ähnlich gelegen mit der Ellipse $(a'b', c'd')$. Die Punkte m' und m'_1, ebenso n' und n'_1 sind, da sie auf einem durch den Ähnlichkeitspunkt (gemeinschaftlicher Mittelpunkt beider Ellipsen) gehenden Strahle P_h liegen, gleichfalls ähnlich gelegen. Die Geraden $m'a', n'b', m'_1 a'_1, n'_1 b'_1$ sind infolge dessen untereinander parallel und müssen somit auch die Geraden im Raume $(ma, m'a')$; $(nb, n'b')$; $(m_1 a_1, m'_1 a'_1)$ und $(n_1 b_1, n'_1 b'_1)$ eine untereinander parallele Lage besitzen. Ein Gleiches gilt, aus denselben Gründen, auch für jede andere zur horizontalen Projectionsebene parallelen Ebene e_v.

Diesen Erörterungen ist sofort zu entnehmen, dass die Parabel (Σ, Σ') und die zur verticalen Projectionsebene parallele Hauptparabel auf einem Cylinder liegen, dessen Erzeugenden jene horizontalen Geraden sind, welche zu den geradlinigen Verbindungslinien der Punkte (a, a') und (m, m') [oder (b, b') und (n, n')] parallel laufen.

Auf Grund dieses Ergebnisses und der daraus folgenden Eigenschaft lässt sich die frühere Aufgabe auch in nachstehender Weise lösen.

Man legt durch den zu suchenden Punkt (P, P') und durch die Achse (Z, Z') die Ebene $P_v P_h$. Die Horizontaltrace P_h (welche durch P' geht) dieser Ebene schneidet die Ellipse $(a'b', c'd')$ in den beiden, durch Zuhilfenahme des über $a'b'$ beschriebenen Affinkreises K_0, leicht zu construierenden Punkten (m, m') und (n, n').

Die horizontale Gerade $(ma, m'a')$ oder $(nb, n'b')$ bestimmt sodann die Richtung des schief-projicierenden Strahles, vermittelst dessen die Parabel (Σ, Σ'), in der die Ebene $P_v P_h$ das Paraboloid schneidet, in die zur verticalen Projectionsebene parallelen Hauptparabel projiciert wird. Hierbei projiciert sich der zu bestimmende Punkt (P, P') ebenfalls in einen Punkt (P_0, P'_0) der Hauptparabel, dessen Horizontalprojection P'_0 im Schnitte der Trace η_h mit der durch P' zu $m'a'$ parallel gezogenen Geraden $P'P'_0$ erhalten wird.

Die Verticalprojection P_0 dieses Punktes ergibt sich sofort, indem man von dem Brennpunkte F_1 und der Directrix D Gebrauch macht, als Schnittpunkt der Hauptparabel (eigentlich ihrer verticalen Projection) mit der durch P'_0 senkrecht zur Grundlinie gezogenen Geraden.

Projiciert man weiters den Punkt (P_0, P'_0) in die Ebene $P_v P_h$ nach (P, P') zurück, so erhält man unmittelbar den gesuchten Punkt. Von diesem Principe kann man häufig, wie auch aus nachfolgenden Aufgaben hervorgehen wird, mit Vortheil Gebrauch machen.

§. 696.

310. Aufgabe. **Es ist die Tangentialebene eines elliptischen Paraboloides in einem gegebenen Punkte der Fläche zu construieren.**

Die gegebene Verticalprojection des Punktes sei P (Taf. XXXX, Fig. 274). Indem wir diesfalls die Horizontalprojection P' des Punktes (P, P') (nach der in Aufgabe 305) besprochenen Methode) bestimmen, wollen wir gleichzeitig auch zur Construction der geforderten Tangentialebene das eben entwickelte Princip benützen.

Um überflüssige Wiederholungen zu vermeiden, sei vorausgesetzt, dass die Horizontalprojection P' des Punktes P bereits gefunden sei. Dieselbe liegt auf der Horizontalprojection $(a'_1 b'_1, c'_1 d'_1)$ jener Ellipse $(a_1 b_1, c_1 d_1; a'_1 b'_1, c'_1 d'_1)$, in welcher die durch (P, P') gehende Ebene e_v das Paraboloid schneidet.

Behufs Bestimmung der Tangentialebene des Paraboloides im Punkte (P, P') haben wir zwei Tangenten des Paraboloides in dem betreffenden Punkte (P, P') zu construieren.

Die eine (t_1, t'_1) derselben ergibt sich mit Leichtigkeit als die Tangente der Ellipse $(a_1 b_1, c_1 d_1; a'_1 b'_1, c'_1 d'_1)$ im Punkte (P, P').

Als zweite Tangente bestimmen wir jene Tangente (t_2, t'_2) der Parabel (Σ, Σ') im Punkte (P, P'), in welcher die durch (P, P') und (Z, Z') gehende Ebene $P_v P_h$ das Paraboloid schneidet. Da (Z, Z') die Achse und (A, A') der Scheitel dieser Parabel ist, so finden wir, nach einer bekannten Eigenschaft der Parabel, den Punkt (x, x'), in welchem die zu suchende Tangente (t_2, t'_2) die Achse schneidet, wenn wir vom Punkte A aus die Strecke $Ax = A\mu$ auftragen. Hierbei repräsentiert μ den Schnittpunkt der Ebene e_v mit der Achse (Z, Z'). Die verlangte Tangente (t_2, t'_2) ist sodann durch die Verbindungsgerade $(Px, P'x')$ dargestellt.

Legen wir schließlich durch die beiden Tangenten $(t_1, t'_1$ und (t_2, t'_2) die Ebene $T_v T_h$, so stellt diese bereits die gesuchte Tangentialebene T dar.

Nebenbei sei hier noch bemerkt, dass die Horizontaltrace T_h der Trace P_h in Bezug auf die Ellipse $(a'b', c'd')$ conjugiert sei.

§. 697.

311. Aufgabe. **Die Berührungscurve eines elliptischen Paraboloides mit einem demselben umschriebenen Kegel ist unter der Voraussetzung zu construieren, dass der Kegelscheitel ein Punkt der Achse des Paraboloides sei.**

Der auf der Achse (Z, Z') gegebene Kegelscheitel sei (P, P') (Taf. XXXX, Fig. 275). Da die Ebene der Berührungscurve gleichzeitig auch die Polarebene des Punktes (P, P') in Bezug auf das Paraboloid darstellt und dieser Punkt auf der Achse (Z, Z') liegt, so wird die besagte Ebene auf der Achse (Z, Z') senkrecht stehen und dieselbe in einem Punkte (n, n') schneiden, welcher zu dem Punkte (P, P') und den beiden Schnittpunkten der Achse mit dem Paraboloide harmonisch liegt.

Nachdem aber der eine dieser letztbezeichneten zwei Punkte der unendlich ferne Punkt der Achse und der zweite der Scheitel (A, A') des Paraboloides ist, so folgt, dass (A, A') in der Mitte zwischen (P, P') und (n, n') liegen müsse, dass also der Punkt (n, n'), als der zu (P, P') in Bezug auf (A, A') symmetrische Punkt auf der Achse (Z, Z') erhalten wird.

Legt man durch (n, n') die zur Achse (Z, Z') senkrechte, also zur horizontalen Projectionsebene parallele Ebene B_v, so repräsentiert diese letztere bereits die Ebene der zu bestimmenden Berührungscurve.

Die Berührungscurve selbst ergibt sich als der Schnitt des Paraboloides mit der Ebene B_v. Die horizontale Projection der genannten Curve ist eine mit der Spurellipse $(a'b', c'd')$ des Paraboloides concentrische und ähnlich gelegene Ellipse $(a'_1 b'_1, c'_1 d'_1)$.

Liegt der Punkt (P, P') innerhalb des Paraboloides auf der Achse (Z, Z'), so ist zwar die Berührungscurve imaginär, ihre Ebene aber, als Polarebene des Punktes (P, P') reell. Dieselbe steht selbstverständlich wieder auf der Achse (Z, Z') senkrecht und muss diese die letztere, infolge der harmonischen Theilung auf dem Strahle (Z, Z'), in einem außerhalb des Paraboloides liegenden Punkte (n, n') treffen, welcher mit dem Punkte (P, P') (Pol), in Bezug auf den Scheitel (A, A') des Paraboloides, symmetrisch liegt. Hieraus ergibt sich unmittelbar auch die Construction der vorgenannten Polarebene.

§. 698.

312. Aufgabe. **Die Berührungscurve eines elliptischen Paraboloides mit einem demselben umschriebenen Kegel ist unter der Voraussetzung zu construieren, dass der Kegelscheitel in einer Hauptebene liegt.**

Den gegebenen Scheitel (P, P') (Taf. XXXXI, Fig. 276) nehmen wir in der zur verticalen Projectionsebene parallelen Hauptebene η an.

Die Ebene der Berührungscurve wird diesfalls, als Polarebene eines in der Hauptebene η liegenden Punktes (P, P') auf dieser Hauptebene senkrecht stehen, also eine vertical-projicierende Ebene repräsentieren. Hieraus folgt aber sofort, dass ihr Schnitt mit der Hauptebene η eine Achse der Berührungscurve sei.

Die Endpunkte der besagten Achse sind leicht zu construieren. Dieselben stellen die beiden in der Hauptebene η liegenden Punkte der Berührungscurve, dar und können mithin nur die Berührungspunkte der von (P, P') aus an die in der Ebene η liegende Hauptparabel geführten Tangenten sein.

Die Verticalprojectionen m und n derselben sind die Berührungspunkte der von P aus an die Parabel (F, A) (Projection jener Hauptparabel) gezogenen Tangenten t_1 und t_2, welche nach der in Aufgabe 207) besprochenen Methode construiert werden können.

Die Horizontalprojectionen m' und n' liegen selbstverständlich in der Horizontaltrace η_h der zur verticalen Projectionsebene parallelen Hauptebene.

Die durch die Punkte (m, m') und (n, n') gehende vertical-projicierende Ebene $B_v B_h$ ist die Ebene der gesuchten Berührungscurve.

Die Verticaltrace B_v derselben fällt, als projicierende Ebene, mit der verticalen Projection mn der Geraden $(mn, m'n')$ zusammen.

Die Berührungscurve selbst ist der Schnitt der Ebene $B_v B_h$ mit dem Paraboloide. Dieselbe kann, da eine Achse $(mn, m'n')$ derselben bereits bekannt ist, leicht construiert werden. Nachdem nämlich die Horizontalprojection der Berührungscurve mit der Ellipse $(a'b', c'd')$ ähnlich und ähnlich gelegen ist, so lässt sich die Horizontalprojection ihrer zweiten Achse unmittelbar aus der Horizontalprojection $m'n'$ der ersten Achse ableiten.

Liegt der Punkt (P, P') innerhalb des Paraboloides auf der Hauptebene η, also innerhalb der in dieser Ebene liegenden Hauptparabel, so kann aus demselben dem Paraboloid kein reeller Kegel umschrieben werden. Die Ebene der Berührungscurve, aufgefasst als die Polarebene des Punktes (P, P'), ist aber reell. Dieselbe steht wieder auf der Hauptebene η senkrecht und geht (nach Satz 399, Band II) durch die Polare des Punktes (P, P') in Bezug auf die in der Hauptebene η liegenden Parabel, was für deren Construction vollkommen hinreichend ist.

§. 699.

313. Aufgabe. **Es ist die Berührungscurve eines elliptischen Paraboloides mit einem demselben umschriebenen Kegel unter der Voraussetzung zu construieren, dass der Kegelscheitel eine allgemeine Lage im Raume besitze.**

Der gegebene Kegelscheitel ist durch seine Projectionen P und P' (Taf. XXXXI, Fig. 277) dargestellt.

Die Berührungscurve wird bestimmt sein, sobald man drei ihrer Punkte kennt. Besagte Curve wird nämlich durch den Schnitt des Paraboloides mit der durch diese drei Punkte gelegten Ebene dargestellt erscheinen.

Es können, wie wir wissen, vier Punkte der Berührungscurve auf höchst einfachem Wege gefunden werden. Vor allem ist bekannt, dass die Berührebenen des Paraboloides in den Punkten jener Hauptparabel, welche in der zur verticalen Projectionsebene parallelen Hauptebene η liegt, zur Ebene η senkrecht stehen, also vertical-projicierend sind, und dass ihre Verticaltracen die Tangenten an die Verticalprojection (F, A) dieser Parabel seien.

Führen wir daher zunächst durch die Verticalprojection P des gegebenen Punktes an die Parabel (F, A) die Tangenten t_1 und t_2, deren Berührungspunkte m und n sein mögen (Construction nach Aufgabe 207), so repräsentieren t_1 und t_2 die Verticaltracen zweier durch

den Punkt (P, P') gehenden, vertical-projicierenden Tangentialebenen des Paraboloides, während die Punkte m und n die Verticalprojectionen der in der Ebene η liegenden Berührungspunkte (m, m') und (n, n') dieser Tangentialebenen darstellen. Es sind somit (m, m') und (n, n') zwei Punkte der Berührungscurve.

Legen wir ferner durch die Achse (Z, Z') des Paraboloides und durch den gegebenen Punkt (P, P') die horizontal-projicierende Ebene $P_v P_h$. Dieselbe schneidet das Paraboloid in einer Parabel (Σ, Σ'), deren Achse ebenfalls (Z, Z'), deren Scheitel (A, A') ist und welche durch jene beiden Punkte (a_1, a'_1) und (b_1, b'_1) geht, in welchen die Horizontaltrace P_h die Horizontalspur $(a'b', c'd')$ des Paraboloides schneidet. Führen wir an diese Parabel (Σ, Σ') vom Punkte (P, P') aus Tangenten, so werden deren Berührungspunkte gleichfalls der Berührungscurve angehören.

Um dieselben zu construieren, projicieren wir vermittelst der zu $(a a_1, a' a'_1)$ parallelen Strahlen die Parabel (Σ, Σ') in die Hauptparabel, (welche in der Ebene η liegt) und gleichzeitig auch den Punkt (P, P') in den Punkt (P_0, P'_0) der Hauptebene η. Ziehen wir sodann von P_0 aus die Tangenten τ^0_1 und τ^0_2 an die Verticalprojection (F, A) der Hauptparabel und projicieren wir die Berührungspunkte r_0 und s_0 derselben, oder noch einfacher die Verbindungsgerade g_0 von r_0 und s_0 in die Ebene $P_v P_h$ nach (r, r') und (s, s'), beziehungsweise (g, g') zurück, so repräsentieren (r, r') und (s, s'), den vorhergehenden Betrachtungen gemäß, zwei weitere Punkte der gesuchten Berührungscurve, und (g, g') als Verbindungsgerade derselben, eine in der Ebene der Berührungscurve liegende Gerade.

Legt man daher durch die beiden Geraden $(mn, m'n')$ und $(rs, r's') = (g, g')$ die Ebene $B_v B_h$, so ist diese letztere die Ebene der gesuchten Berührungscurve.

Die Berührungscurve selbst ist der Schnitt des Paraboloides mit der Ebene $B_v B_h$ und kann auf eine besondere Art leicht vermittelst dreier der vier bekannten Punkte construiert werden.

Wir wissen nämlich einerseits (aus Satz 388), dass die horizontale Projection K' der Berührungscurve (als die eines ebenen Schnittes des Paraboloides) mit der Horizontalspur (Ellipse) $(a'b', c'd')$ des Paraboloides ähnlich gelegen sein muss, und dass andererseits diese Horizontalprojection durch die vier Punkte m', n', r' und s' gehen werde.

Da aber drei Punkte von diesen vieren sowohl zur Bestimmung der Ebene $B_v B_h$ als auch der Berührungscurve (K, K') genügen, so hat man bezüglich der Horizontalprojection K' folgende Aufgabe zu

lösen: „Es sind eine Ellipse $(a'b', c'd')$ und drei Punkte m', n' und s' gegeben; durch letztere ist eine Ellipse $[(a')(b'), (c')(d')]$ zu führen, welche mit der ersteren ähnlich gelegen ist."

Zur Lösung dieser Aufgabe benützen wir die Eigenschaft, dass ähnlich liegende Geraden stets parallel sind, und dass in einem von zwei ähnlich gelegenen Kegelschnitten ein Paar conjugierter Durchmesser stets zu einem Paare conjugierter Durchmesser im anderen Kegelschnitte parallel sei.

Die Sehne $m'n'$ (Taf. XXXXI, Fig. 278) des zu bestimmenden Kegelschnittes liegt in der Achse $a'b'$ des anderen.

Zieht man demnach durch den Mittelpunkt ω von $m'n'$ eine parallele Gerade y zur Achse $c'd'$, so wird dieselbe offenbar bereits die eine Achse der gesuchten Ellipse $[(a')(b'), (c')(d')]$ repräsentieren.

Verbinden wir ferner die Punkte m' und s' durch eine Gerade σ, und suchen wir den ihrer Richtung conjugierten Durchmesser ϱ_1 der Ellipse $(a'b', c'd')$ (mittelst des über $a'b'$ beschriebenen Affinkreises), so wird zu demselben auch der der Richtung σ conjugierte Durchmesser ϱ des gesuchten Kegelschnittes parallel sein, und erhalten wir denselben offenbar, wenn wir durch den Mittelpunkt α der Sehne $m's'$ die Parallele ϱ zu ϱ_1 ziehen. Die letztere Gerade trifft die Achse y bereits in dem Mittelpunkte o' der zu bestimmenden Ellipse.

Führen wir durch o' die Gerade X parallel zu $a'b'$, so erhalten wir auch die Lage der zweiten Achse der zu suchenden Ellipse bestimmt.

Um endlich die Achsenendpunkte zu fixieren, ziehen wir parallel zu der Geraden $o's'$ die Gerade $O's'_1$, deren Schnittpunkt s'_1 mit der Ellipse $(a'b', c'd')$ durch Vermittelung des Affinkreises K_0 bequem construierbar ist. Die Punkte s' und s'_1 sind sodann ähnlich gelegene Punkte beider Ellipsen, und man erhält demzufolge die Achsenendpunkte (a'), (b'), (c') und (d') als die zu a', b', c' und d' ähnlich liegenden Punkte, vermittelst der beziehungsweise zu s'_1a', s'_1b', s'_1c' und s'_1d' parallelen Geraden $s'(a')$, $s'(b')$, $s'(c')$ und $s'(d')$.

Ist auf diese Weise die Horizontalprojection $K' = [(a')(b'), (c')(d')]$ der in der Ebene $B_v B_h$ liegenden Berührungscurve festgestellt, so unterliegt es auch keinerlei Schwierigkeit, ein Paar conjugierter Durchmesser ihrer Verticalprojection K aus dieser Horizontalprojection abzuleiten.

§. 700.

314. Aufgabe. **Es ist die Berührungscurve eines elliptischen Paraboloides mit einem demselben umschriebenen Cylinder unter der**

Voraussetzung zu construieren, dass die Erzeugenden des Cylinders auf der Achse des Paraboloides senkrecht stehen.

Die gegebene zur Achse (Z, Z') des Paraboloides senkrechte, mithin zur horizontalen Projectionsebene parallele Gerade, welche die Richtung der Cylindererzeugenden repräsentiert, sei (g, g') (Taf. XXXX, Fig. 279).

Die Ebene der Berührungscurve eines Paraboloides mit einem umschriebenen Cylinder ist (nach Satz 428, Band II) stets eine Durchmesserebene, und, da diese zur Achse (Z, Z') parallel sein muss, so wird die besagte Ebene im vorliegenden Falle [da die Achse (Z, Z') horizontal-projicierend ist], durch eine horizontal-projicierende Ebene dargestellt erscheinen. Behufs Construction derselben wird mithin die Kenntnis zweier ihrer Punkte vollkommen ausreichen.

Die Berührungscurve selbst ist der geometrische Ort der Berührungspunkte aller parallel zur Geraden (g, g') an das Paraboloid gelegten Tangenten.

Nachdem die Gerade (g, g') zur horizontalen Projectionsebene parallel ist, so wird die durch den Scheitel (A, A') des Paraboloides zu ihr parallel gezogene Gerade ihrer ganzen Länge nach in der Scheiteltangentialebene T_A liegen, und mithin eine Tangente des Paraboloides im Scheitel (A, A') desselben repräsentieren. Hieraus folgt unmittelbar, dass der letztere ein Punkt der Berührungscurve sein werde, dass also diesfalls die Ebene der Berührungscurve speciell durch die Achse (Z, Z') des Paraboloides gehe.

Denken wir uns ferner (mittelst des über $a'b'$ beschriebenen Affinitätskreises K_0) parallel zu g' an die Ellipse $(a'b', c'd')$ die Tangenten γ'_1 und γ'_2 gezogen und deren Berührungspunkte m' und n' festgestellt. Da die Ellipse $(a'b', c'd')$ der Schnitt des Paraboloides mit der horizontalen Projectionsebene ist, so sind γ'_1 und γ'_2 zwei in der horizontalen Projectionsebene liegende, zur Geraden (g, g') parallele Tangenten des Paraboloides, und mithin die Punkte m' und n' zwei in der horizontalen Projectionsebene liegende Punkte der gesuchten Berührungscurve.

Die Ebene der Berührungscurve ist mithin jene horizontal-projicierende Ebene $B_v B_h$, deren Horizontaltrace B_h mit dem Durchmesser $m'n'$ der Ellipse $a'b'c'd'$ zusammenfällt. Die Ebene $B_v B_h$ enthält selbstverständlich die Achse (Z, Z') und daher auch den Scheitel des Paraboloides.

Die Berührungscurve selbst, als Schnitt des Paraboloides mit dieser Ebene, ist eine Parabel, welcher als Achse die Achse (Z, Z')

des Paraboloides, als Scheitel (A, A') jener der genannten Fläche entspricht und überdies durch die Punkte (m, m') und (n, n') der horizontalen Projectionsebene geht.

Diese Ergebnisse oder beziehungsweise die soeben festgestellten Resultate können unter anderem auch zu einer einfachen Lösung des nachstehenden Problemes verwendet werden.

§. 701.

315. Aufgabe. **Parallel zu einer gegebenen Ebene $E_v E_h$ ist an ein elliptisches Paraboloid eine Berührebene zu legen und deren Berührungspunkt zu construieren.**

In der vorausgeschickten Theorie der Flächen haben wir nachgewiesen, dass parallel zu einer Ebene an ein elliptisches Paraboloid nur eine einzige Tangentialebene gelegt werden könne (Satz 375). Wir ermitteln diesfalls die zur Ebene $E_v E_h$ (Taf. XXXXI, Fig. 280) parallele Berührebene und deren Berührungspunkt in nachstehender Weise.

Zunächst denken wir uns dem Paraboloide parallel zu der Horizontaltrace E_h einen Cylinder umschrieben und die Ebene $B_v B_h$ seiner Berührungscurve (wie in der vorhergehenden Aufgabe) bestimmt.

Die Berührungscurve ist, als Schnitt des Paraboloides mit der Ebene $B_v B_h$, eine Parabel (Σ, Σ'), deren Achse (Z, Z'), deren Scheitel (A, A') ist, und welche durch die Punkte (m, m') und (n, n') geht, in welchen die Horizontaltrace B_h die Horizontalspur $(a' b', c' d')$ des Paraboloides schneidet.

An diesen, dem Paraboloide umschriebenen Cylinder kann, da dessen Erzeugenden zur Ebene $E_v E_h$ parallel sind, stets eine Berührebene gelegt werden, welche zu der obgenannten Ebene $E_v E_h$ parallel läuft. Besagte Ebene wird aber auch das Paraboloid in einem Punkte berühren, welcher gleichzeitig der Berührungscurve (Σ, Σ') des umschriebenen Cylinders angehört, und demnach die gesuchte Tangentialebene darstellen.

Um die Construction der letztbezeichneten Ebene durchzuführen, wird bloß zu berücksichtigen sein, dass sie die Ebene $B_v B_h$ der Berührungscurve (Σ, Σ') in einer Tangente der letzteren schneiden müsse, welche zur Schnittgeraden (s, s') der beiden Ebenen $B_v B_h$ und $E_v E_h$ parallel sein wird.

Hiernach haben wir bloß an die Parabel (Σ, Σ'), parallel zur Geraden (s, s'), eine Tangente zu ziehen. Zu diesem Zwecke projicieren wir die genannte Parabel, mittelst der zur Geraden $(ma, m' a')$

parallelen Strahlen, in die zur verticalen Projectionsebene parallele Hauptparabel $(F, A; F', A')$, wobei gleichzeitig auch die Gerade (s, s') in eine Gerade (s_0, s'_0) der Ebene η durch Projection überführt wird.

Zieht man demnach auf bekannte Weise (Aufgabe 208) parallel zu s_0 an die Parabel (F, A) die Tangente t_0 und ermittelt deren Berührungspunkt p_0, so wird man durch einfaches Zurückprojicieren von t_0 und p_0 in die Ebene $B_v B_h$ daselbst die gesuchte Tangente (t, t') der Parabel (Σ, Σ') sowohl, als auch deren Berührungspunkt (p, p') erhalten.

Legt man endlich durch (t, t') parallel zur Ebene $E_v E_h$ die Ebene $T_v T_h$, so wird diese den Cylinder längs der durch den Punkt (p, p') gehenden Erzeugenden und das Paraboloid im Punkte (p, p') selbst berühren, mithin der gestellten Aufgabe genügen.

§. 702.

Die eben gelöste Aufgabe schließt noch ein anderes Problem in sich.

Würde es sich nämlich zu irgend einem Zwecke darum gehandelt haben, den der Stellung der Ebene $E_v E_h$ conjugierten Durchmesser des Paraboloides zu construieren, so hätte man, wie eben geschehen, nur den Berührungspunkt (p, p') des Paraboloides mit der zur Ebene $E_v E_h$ parallelen Tangentialebene zu construieren.

Die durch diesen Berührungspunkt gehende, zur Achse (Z, Z') des Paraboloides parallele, also horizontal-projicierende Gerade ist sodann (dem aufgestellten Satze 435, Band II, zufolge) der verlangte conjugierte Durchmesser.

Auf dem letztbezeichneten Durchmesser liegen überdies die Mittelpunkte aller zur Ebene $E_v E_h$ parallelen Schnitte des Paraboloides. Die horizontalen Projectionen aller dieser Schnitte werden ähnliche, ähnlich gelegene und concentrische Ellipsen sein, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt durch die Horizontalprojection p' des Berührungspunktes (p, p') dargestellt ist.

§. 703.

316. Aufgabe. **Es ist der Pol einer beliebigen Ebene $E_v E_h$ in Bezug auf ein elliptisches Paraboloid zu bestimmen.**

Man kann diesfalls in zweifacher Weise vorgehen, um zum gewünschten Ziele zu gelangen.

Wir wissen nämlich, dass der Pol einer Ebene in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades stets auf dem der Stellung der Ebene conjugierten Durchmesser liege (Satz 407 und 431, Band II).

Construiert man daher, wie in der vorhergehenden Aufgabe den verlangten Durchmesser, so wird der zu bestimmende Pol auf demselben liegen und dessen Horizontalprojection sonach mit p' (Taf. XXXXI, Fig. 280) zusammenfallen.

Bestimmt man ferner den Schnittpunkt (p_1, p'_1) (Taf. XXXXI, Fig. 281) der Achse (Z, Z') mit der gegebenen Ebene $E_v E_h$ und construiert man, wie in Aufgabe 311) gezeigt wurde, die Polarebene p'_v dieses Punktes, so muss auch in dieser letzteren (nach Satz 406, Band II) der gesuchte Pol liegen und wird sich demgemäß als der Schnittpunkt (P, P') derselben mit dem vorgenannten Durchmesser ergeben.

Man kann jedoch auch in nachstehender Weise verfahren, wobei sich einige Vereinfachungen in der Construction herausstellen.

Wir bestimmen diesfalls vor allem die Schnittgerade (s, s') der gegebenen Ebene $E_v E_h$ mit der zur verticalen Projection parallelen Hauptebene η. Diese Gerade (s, s') trifft die Achse (Z, Z') des Paraboloides in dem Punkte (p_1, p'_1).

Ermitteln wir ferner, wie folgt, den Pol der Geraden (s, s') in Bezug auf die in der Hauptebene η liegende, durch ihren Scheitel (A, A') und durch ihren Brennpunkt (F, F') gegebene Hauptparabel.

Ziehen wir zu diesem Behufe vom Brennpunkte F aus eine senkrechte Gerade σ auf die Schnittgerade s, so wird dieselbe die Directrix D in einem Punkte α_1 treffen, während die durch α_1 parallel zur Achse Z geführte Gerade p^2_v die Parabel in dem Berührungspunkte p der zu s parallelen Tangente t_1 trifft, und somit den zur Richtung s conjugierten Durchmesser der Parabel repräsentiert. Auf dem letzteren wird sodann, wie bekannt, der Pol der Geraden s liegen.

Trägt man ferner die Strecke $An = Ap_1$ auf die Achse Z auf, bestimmt man also den zu p_1 in Bezug auf A symmetrischen Punkt n, so ist die Gerade p'_v, welche durch n senkrecht zur Achse Z gezogen wird, die Polare des Punktes p_1. Auf dieser Polare muss nun ebenfalls der Pol der Geraden s liegen. Derselbe ergibt sich mithin als der Schnittpunkt P der beiden Geraden p^2_v und p'_v.

Nach Satz 413, Band II) stellt aber P gleichzeitig auch den Durchstoßpunkt der Hauptebene η mit der Polare der Geraden (s, s') in Bezug auf das Paraboloid dar. Diese Polare muss auf der Hauptebene η senkrecht stehen, da die Gerade (s, s') in derselben liegt. Wir

erhalten dieselbe somit als die durch P gehende vertical-projicierende Gerade.

Auf dieser Polare wird sich ferner (nach Satz 407, Band II) auch der gesuchte Pol der Ebene $E_v E_h$ vorfinden müssen, da die Ebene $E_v E_h$ durch die Gerade (s, s') geht.

Bestimmen wir endlich die der Richtung der Horizontaltrace E_h conjugierte Durchmesserebene $B_v B_h$ des Paraboloides (in Übereinstimmung mit der vorhergehenden Aufgabe), so muss der gesuchte Pol auch in dieser Ebene liegen, nachdem derselbe, wie früher gezeigt wurde, auf dem der Ebene $E_v E_h$ conjugierten, in der Ebene $B_v B_h$ liegenden Durchmesser sich befindet.

Die Horizontalprojection P' des gesuchten Poles ergibt sich daher im Schnitte der Horizontaltrace B_h mit der durch P senkrecht zur Grundlinie gezogenen Geraden. Hiernach ist der Pol der Ebene $E_v E_h$ durch seine Projectionen P und P' dargestellt.

§. 704.

317. Aufgabe. **Es ist die Ebene der Berührungscurve eines einem elliptischen Paraboloide umschriebenen Cylinders unter der Voraussetzung zu construieren, dass die Erzeugenden des Cylinders zu einer beliebig gegebenen Geraden parallel seien.**

Die gegebene Gerade, zu welcher die Erzeugenden des dem Paraboloide umschriebenen Cylinders parallel sein sollen, sei (g, g') (Taf. XXXXI, Fig. 282).

Wie aus der entwickelten Theorie der Flächen zweiten Grades bekannt, wird diesfalls die E b e n e d e r B e r ü h r u n g s c u r v e e i n e D u r c h m e s s e r e b e n e, also eine horizontal-projicierende Ebene sein müssen.

Es wird daher, um besagte Ebene zu construieren, genügen, zwei Punkte derselben zu kennen.

Führen wir an die Parabel, welche durch A als Scheitel und F als Brennpunkt gegeben ist und die Verticalprojection der in der Hauptebene η liegenden Parabel vorstellt, parallel zur Verticalprojection g eine Tangente t_1. Der Berührungspunkt der letzteren ergibt sich in p_1. Besagte Tangente repräsentiert sodann gleichzeitig die Verticaltrace einer vertical-projicierenden, zur Geraden (g, g') parallelen Tangentialebene (Umrisstangentialebene) des Paraboloides, während deren Berührungspunkt p_1 die Verticalprojection des in der Hauptebene η liegenden Berührungspunktes (p_1, p_1') dieser Tangentialebene darstellt. Es wird sonach der Punkt (p_1, p'_1) der Berührungscurve angehören.

Legen wir ferner durch die Achse (Z, Z') des Paraboloides parallel zur Geraden (g, g') die Ebene $P_v P_h$, so schneidet diese das Paraboloid in einer Parabel (Σ, Σ'), welche die Gerade (Z, Z') als Achse, den Punkt (A, A') als Scheitel besitzt, und durch jene beiden Punkte (a_1, a'_1) und (b_1, b'_1) geht, in welchen die Horizontaltrace P_h die Horizontalspur (Ellipse) $(a'b', c'd')$ schneidet.

Führt man an die so bestimmte Parabel (Σ, Σ'), parallel zur Geraden (g, g') eine Tangente, so ist diese offenbar auch eine Tangente des Paraboloides, deren Berührungspunkt also ein Punkt der Berührungscurve.

Um besagte Tangente mit Bequemlichkeit zu construieren, ziehen wir in der Ebene $P_v P_h$ irgend eine Parallele (s, s') zur gegebenen Geraden (g, g') und projicieren vermittelst der zu $(a_1 a, a'_1 a')$ parallelen Strahlen die Parabel (Σ, Σ') und die Gerade (s, s') auf die Hauptebene η, beziehungsweise in die Hauptparabel (F, A) und in die Gerade s_0. Ermitteln wir weiters den Berührungspunkt p_0 der zu s_0 parallelen Tangente t_0 der Parabel (F, A) und projicieren wir denselben in die Ebene $P_v P_h$ zurück, so wird (p, p') daselbst den gesuchten Berührungspunkt (p, p') der zu (g, g') parallelen Tangente der Parabel (Σ, Σ') darstellen, und mithin einen Punkt der Berührungscurve repräsentieren.

Die durch die beiden Punkte (p, p') und (p_1, p'_1) gehende horizontal-projicierende Ebene $B_v B_h$ stellt sodann die geforderte Ebene der Berührungscurve dar.

Die Berührungscurve selbst ergibt sich als Schnitt des Paraboloides mit der Ebene $B_v B_h$. Da die Ebene $B_v B_h$ eine Durchmesserebene des Paraboloides darstellt, so ist die Berührungscurve eine Parabel.

Nebstbei sei hier noch erwähnt, dass sich die Bestimmung des Punktes (p_1, p'_1), wie wir uns sofort überzeugen können, als überflüssig erweisen werde. Die gefundene Ebene $B_v B_h$ ist nämlich, als die Ebene der Berührungscurve des parallel zur Geraden (g, g') umschriebenen Cylinders, die Polarebene des unendlich fernen Punktes U_g dieser Geraden (g, g').

Ferner schneidet die Ebene $B_v B_h$ das Paraboloid in einer Parabel (Π, Π'), deren Achse zur Achse (Z, Z') der Fläche parallel läuft, und deren Scheiteltangente mithin eine zur horizontalen Projectionsebene (mit der Horizontalprojection B_h) parallele Gerade sein muss.

Legen wir demnach durch die Achse (Z, Z') des Paraboloides, parallel zu (g, g') die Ebene $P_v P_h$, so sind die dieser Ebene conjugierten Sehnen und Tangenten des Paraboloides einerseits senkrecht zur

Achse (Z, Z'), mithin horizontal; andererseits müssen dieselben, da die Ebene $P_v P_h$ den Pol U_g der Ebene $B_v B_h$ enthält, in der Ebene $B_v B_h$ selbst liegen, oder zu derselben parallel sein. Hieraus folgt unmittelbar, dass die Scheiteltangente der in der Ebene $B_v B_h$ liegenden Parabel eine Gerade sein müsse, welche der Ebene $P_v P_h$ conjugiert ist. Da weiters diese Scheiteltangente auch das Paraboloid berührt, so muss deren Berührungspunkt nothwendig auf der Schnittparabel (Σ, Σ') der Ebene $P_v P_h$ liegen, und kann dieser somit kein anderer, als der vorgefundene Punkt (p, p') sein.

Dieses Ergebnis führt somit zu dem Schlusse, dass der Punkt (p, p') den Scheitel der Parabel (Π, Π') darstelle.

Berücksichtigen wir ferner, dass alle horizontalen Tangenten des Paraboloides in den Punkten von (Σ, Σ') zu den Tangenten τ der Ellipse im Punkte a'_1 parallel sind (Aufgabe 315), so wird dasselbe von der Scheiteltangente der Parabel (Π, Π') und offenbar auch von der Horizontaltrace B_h der Ebene $B_v B_h$ gelten.

Wenn also parallel zu einer gegebenen Geraden (g, g'), einem elliptischen Paraboloide, ein Cylinder umschrieben wird, so kann man die Ebene $B_v B_h$ der Berührungscurve (Π, Π'), sowie die Curve (Π, Π') selbst, in nachstehender Weise construieren.

Man legt durch die Achse (Z, Z') des Paraboloides eine Ebene $P_v P_h$ parallel zu der Geraden (g, g'). Diese Ebene $P_v P_h$ schneidet das Paraboloid in einer Parabel (Σ, Σ'). Der Berührungspunkt (p, p') dieser Parabel mit der zu (g, g') parallelen Tangente repräsentiert bereits den Scheitel der gesuchten Berührungsparabel (Π, Π').

Die Parabel (Σ, Σ') schneidet ferner die Ellipse $(a'b', c'd')$ in zwei Punkten (a_1, a'_1) und (b_1, b'_1). Die Tangenten τ_1 und τ_2 der Ellipse $(a'b', c'd')$ in diesen beiden Punkten a'_1 und b'_1 bestimmen die Richtung der Scheiteltangente der Berührungscurve im Scheitel (p, p').

Die Ebene $B_v B_h$ der Berührungscurve ist daher jene horizontalprojicierende, durch (p, p') gehende Ebene, welche zu den Tangenten τ_1 und τ_2 parallel läuft. Die Horizontaltrace B_h der genannten Ebene wird somit die durch p' parallel zu τ_1 und τ_2 gezogene Gerade sein.

Nachdem die Berührungscurve (Π, Π') durch den Scheitel und die Scheiteltangente, also auch durch die Achse dargestellt ist, genügt zu ihrer vollständigen Construction ein einziger weiterer Punkt, als welchen man allenfalls den einen der beiden Schnittpunkte von B_h mit der Ellipse $(a'b', c'd')$ betrachten kann.

§. 705.

318. Aufgabe. Durch eine Gerade (g, g') sind an ein elliptisches Paraboloid Berührebenen zu legen und deren Berührungspunkte zu construieren.

Wir bestimmen diesfalls den Schnittpunkt (P, P') (Taf. XXXXI, Fig. 283) der Geraden (g, g') mit der zur verticalen Projectionsebene parallelen Hauptebene η des Paraboloides, und ermitteln hierauf einerseits die Ebene $B_v B_h$ der Berührungscurve des Paraboloides mit dem dem letzteren aus dem Scheitel (P, P') umschriebenen Kegel, so wie andererseits auch die in der besagten Ebene $B_v B_h$ liegende Berührungscurve selbst (Aufgabe 312), wobei wir die letztere direct durch ihre Achsen $(a_1 b_1, a'_1 b'_1)$ und $(c_1 d_1, c'_1 d'_1)$ darstellen.

Diese Curve wird insolange reell sein, als die zu bestimmenden Tangentialebenen es sind. In diesem Falle ist eine nothwendige Bedingung die, dass die Gerade (g, g') ganz außerhalb des Paraboloides liegt, das Paraboloid also in keinen reellen Punkten schneidet.

Es ist hiernach einleuchtend, dass die gesuchten, durch die Gerade (g, g') gehenden Tangentialebenen, da sie den Kegelscheitel (P, P') enthalten, auch den dem Paraboloide (aus P, P') umschriebenen Kegel berühren, und dass ihre Berührungspunkte mit dem Paraboloide auf der eben construierten Berührungscurve $(a_1 b_1, c_1 d_1; a'_1 b'_1, c'_1 d'_1)$ liegen müssen.

Hieraus ist auch unschwer zu erkennen, dass sich die gestellte Aufgabe auf die „durch die Gerade (g, g') an den Kegel $(P, a_1 b_1 c_1 d_1; P, a'_1 b'_1 c'_1 d'_1)$ die beiden Berührebenen zu legen", reduciere.

Bestimmen wir zu diesem Zwecke den Durchstoßpunkt (s, s') der Geraden (g, g') mit der Ebene $B_v B_h$ der Ellipse $(a_1 b_1, c_1 d_1)$. Von s' aus ziehen wir an die Ellipse $(a'_1 b'_1, c'_1 d'_1)$ die Tangenten t'_1 und t'_2 und stellen deren Berührungspunkte p'_1 und p'_2, mittelst des über $a'_1 b'_1$ beschriebenen Affinkreises K'_0 fest. Die Verticalprojectionen t_1 und t_2 dieser Tangenten, sowie auch die Verticalprojectionen p_1 und p_2 ihrer Berührungspunkte fallen in die Trace B_v der Berührebene $B_v B_h$, da letztere vertical-projicierend ist.

Die beiden Ebenen $T^1_v T^1_h$ und $T^2_v T^2_h$, welche durch die Gerade (g, g') und durch die Tangente (t_1, t'_1), beziehungsweise (t_2, t'_2) gelegt werden, sind demnach die durch (g, g') gehenden Tangentialebenen des umschriebenen Kegels, und folglich, auf Grund der angestellten Betrachtungen, gleichzeitig auch des Paraboloides.

Die Berührungspunkte besagter Tangentialebenen mit dem letzteren werden durch die der Berührungscurve $(a_1 b_1, c_1 d_1; a'_1 b'_1, c'_1 d'_1)$ angehörenden Punkte (p_1, p'_1) und (p_2, p'_2) dargestellt.

§. 706.

319. Aufgabe. **Es ist die Polare einer Geraden in Bezug auf ein elliptisches Paraboloid zu ermitteln.**

a) Die Gerade schneidet das Paraboloid in keinen reellen Punkten.

Ist (g, g') (Taf. XXXXI, Fig. 283) die gegebene Gerade, so lassen sich durch dieselbe, der gemachten Voraussetzung gemäß, stets zwei reelle Berührebenen an das Paraboloid legen. Die Berührungspunkte dieser Ebenen sind (nach Satz 409, Band II) gleichzeitig auch jene Punkte, in welchen die Polare der Geraden (g, g') das Paraboloid schneidet.

Man hat daher diesfalls nichts anderes zu thun, als (wie in der vorhergehenden Aufgabe) die beiden Berührungspunkte (p_1, p'_1) und (p_2, p'_2) der durch die Gerade (g, g') an das Paraboloid gehenden Berührebenen zu construieren, und dieselben durch eine Gerade (g_1, g'_1) zu verbinden. Letztere wird sodann die verlangte Polare der Geraden (g, g') repräsentieren.

b) Die Gerade (g, g') schneidet das Paraboloid in zwei reellen Punkten (p_1, p'_1) und (p_2, p'_2).

In diesem Falle, welcher mit der Umkehrung des früheren gleichbedeutend ist, wird die Polare (g_1, g'_1) als die Schnittgerade der beiden Tangentialebenen des Paraboloides in den Punkten (p_1, p'_1) und (p_2, p'_2) zu construieren sein. Letzteres folgt unmittelbar aus dem Satze 409, Band II).

c) Die gegebene Gerade (g, g') berührt das Paraboloid in einem Punkte (p, p').

Unter dieser Voraussetzung ist die Polare (g_1, g'_1) der Geraden (g, g') gleichfalls eine Tangente des Paraboloides in dem nämlichen Punkte (p, p'). Construiert man daher die Tangentialebene $T_v T_h$ des Paraboloides im Punkte (p, p'), so muss die zu bestimmende Polare (g_1, g'_1) in dieser Berührebene liegen.

Da ferner bei einer Tangente einer Fläche zweiten Grades alle Punkte derselben außerhalb der Fläche liegen, so ist auch der Schnittpunkt (P, P') der gegebenen Geraden (g, g') mit der zur verticalen Projectionsebene parallelen Hauptebene η außerhalb der Fläche gelegen. Es ist daher leicht die Polarebene dieses Punktes (P, P') in Bezug auf das Paraboloid zu construieren (siehe Aufgabe 312).

Mit Beziehung auf den Satz 407, Band II) muss aber die Polarebene $B_v B_h$, da deren Pol auf (g, g') liegt, durch die Polare (g_1, g'_1) von (g, g') gehen.

Die gesuchte Polare (g_1, g'_1) wird sich mithin als die Schnittgerade der Ebene $B_v B_h$ mit der vorher gefundenen Tangentialebene $T_v T_h$ ergeben.

d) Die gegebene Gerade g liegt in unendlicher Entfernung, wird also, wie bereits bekannt, durch die unendlich ferne Gerade einer gegebenen Ebene dargestellt.

In diesem Falle sind die durch die Gerade g gehenden Berührebenen des Paraboloides einerseits die unendlich ferne Ebene selbst und andererseits die zu der gegebenen Ebene (Richtebene) parallele Ebene. Die Polare der unendlich fernen Geraden g ist demnach (§. 702) jener Durchmesser des Paraboloides, welcher durch den Berührpunkt der genannten Tangentialebene geht.

§. 707.

320. Aufgabe. **Es ist eine Ebene aufzufinden, welche ein elliptisches Paraboloid in einem Kreise schneidet.**

Da ein elliptisches Paraboloid keine Achse von endlicher Länge besitzt, so hat dasselbe auch keine „Kreisebenen“, d. i. keine Kreisschnittsebenen, welche durch eine der Achsen der Fläche gehen.

Trotz dieser hervorgehobenen Eigenthümlichkeit besitzt aber die genannte Fläche dennoch Kreisschnittsebenen.

Dasjenige Verfahren, welches bei den Flächen zweiten Grades „mit einem Mittelpunkte“ zur Auffindung der Kreisebenen benützt wurde, kann daher im vorliegenden Falle nicht angewendet werden.

Es gibt jedoch zwei verschiedene Methoden, welche zur Construction der Kreisschnittsebenen des elliptischen Paraboloides führen. Die eine dieser Methoden wollen wir hier bloß erwähnen, ohne auf deren constructive Durchführung näher einzugehen.

Denken wir uns zu diesem Behufe das Paraboloid wie gewöhnlich wieder durch die horizontal-projicierende Achse (Z, Z') (Taf. XXXXI, Fig. 284), den Scheitel (A, A') und die Ellipse $(a'b', c'd')$, in welcher dasselbe die horizontale Projectionsebene schneidet, dargestellt.

Construieren wir in den Endpunkten (a, a') und (b, b') der großen Achse der letztgenannten Ellipse die Tangentialebenen des Paraboloides, so sind diese offenbar symmetrisch gegen die durch die kleine Achse $(cd, c'd')$ der Ellipse gehende Hauptebene $\pi_v \pi_h$. Dasselbe gilt offenbar auch von den zugehörigen Berührungspunkten (a, a') und (b, b').

Es wird hiernach auch möglich sein, eine Kugel (S, S') zu construieren, welche die beiden vorerwähnten Tangentialebenen und folglich auch das Paraboloid in den beiden Punkten (a, a') und (b, b') berührt. Diese Kugel wird (nach Satz 449, Band II) das Paraboloid in zwei ebenen, durch die Punkte (a, a') und (b, b') gehenden Curven schneiden.

Nachdem aber „ebene Curven“ auf einer Kugel nur Kreise sein können, so folgt, dass die vorgenannten ebenen Schnitte des Paraboloides „Kreisschnitte“ dieser letztbezeichneten Fläche darstellen werden.

Was die Lage ihrer Ebenen anbelangt, so sind dieselben folgendermaßen zu finden. Dieselben gehen vor allem durch die beiden Punkte, in welchen die Kugel (S, S') das Paraboloid berührt, d. i. durch die große Achse der Ellipse $(a'b', c'd')$. Denken wir uns ferner die Kugel und das Paraboloid mit der zur Grundlinie senkrechten Hauptebene $\pi_v \pi_h''$ geschnitten, so ergeben sich als Schnitte beziehungsweise ein größter Kugelkreis und eine Parabel, deren Achse den Kreismittelpunkt enthält.

Verbinden wir diagonal paarweise die vier Schnittpunkte dieser beiden Curven, so erhält man zwei Geraden, deren jede einem der gesuchten Kreisschnitte, welche hiedurch vollkommen bestimmt sind, angehört.

Dieser Methode jedoch dürfte man sich im allgemeinen wohl kaum bedienen, da die Bestimmung der Schnittpunkte des Kreises mit der Parabel gewisse compliciertere Hilfsconstructionen erfordert, die man jederzeit gerne und mit Recht zu vermeiden sucht.

§. 708.

Zweite Methode.

Das Paraboloid stellen wir durch seine (horizontal-projicierende) Achse (Z, Z') (Taf. XXXXI, Fig. 285), durch seinen Scheitel (A, A') und durch die Schnittellipse $(a'b', c'd')$ mit der horizontalen Projectionsebene dar. Hierbei werden wir uns jedoch die besondere Voraussetzung erlauben, dass die große Achse $a'b'$ dieser Ellipse auf der Grundlinie senkrecht stehe, die kleine Achse $c'd'$ mithin eine zur Grundlinie parallele Lage habe.

Die horizontalen Projectionen aller ebenen Schnitte, also auch aller Kreisschnitte, sind aber (nach Satz 288) ähnlich gelegene Ellipsen und zwar sämmtlich ähnlich gelegen mit der Ellipse $(a'b', c'd')$.

Weiters wissen wir auch bereits, dass, wenn eine Ellipse die orthogonale Projection eines Kreises repräsentiert, jene Kreisebene, deren Trace auf der betreffenden Projectionsebene zur kleinen Achse

der besagten Ellipse senkrecht steht, mit dieser Projectionsebene einen Winkel einschließen müsse, dessen Cosinus durch das Verhältnis der kleinen Achse zur großen Achse der gegebenen Ellipse ausgedrückt erscheint.

Denken wir uns demnach eine Ebene E, welche das Paraboloid in einem Kreise schneidet, so wird — da die große Achse der horizontalen Projection des Schnittkreises parallel zu $a'b'$ sein muss, die horizontale Trace E_h der Kreisschnittsebene folglich gleichfalls zu $a'b'$ parallel, d. i. zur Grundlinie senkrecht ist — die vorerwähnte Ebene E eine vertical-projicierende sein müssen.

Die Ebene E selbst schließt sodann mit der horizontalen Projectionsebene, oder was dasselbe ist, ihre Verticaltrace E_v mit der Grundlinie XX einen Winkel α ein, dessen Cosinus, den früheren Betrachtungen gemäß, dem Achsenverhältnisse $\frac{c'd'}{a'b'}$ gleich ist.

Schneidet daher die an willkürlicher Stelle angenommene Horizontaltrace E_h die Grundlinie XX im Punkte σ, so hat man auf der Grundlinie von σ aus zu beiden Seiten die Strecke $c'd' = \sigma m = \sigma n$ aufzutragen, in den sich so ergebenden Endpunkten m und n dieser Strecken Senkrechte auf die Grundlinie XX zu errichten und diese mit einem Kreise K aus dem Mittelpunkte σ und einem Radius $r = a'b'$ in den Punkten m_1 und n_1 zu durchschneiden.

Der gestellten Forderung entsprechend, ist sodann:

$$Cos\, \alpha = \frac{\sigma m}{\sigma m_1} = \frac{\sigma n}{\sigma n_1} = \frac{c'd'}{a'b'}.$$

Betrachtet man also die Geraden $\sigma m_1 = E_v$ und $\sigma n_1 = E'_v$ als die Verticaltracen von Ebenen, so sind die Kreisschnittsebenen ihrer Stellung nach unmittelbar durch die beiden Ebenen $E_v E_h$ und $E_v' E_h'$ dargestellt.

Nachdem parallel zu irgend einer Ebene nur eine einzige Tangentialebene an ein Paraboloid gelegt werden kann, so gibt es auf der genannten Fläche selbstverständlich auch bloß zwei eigentliche „Kreis-“ oder „Nabelpunkte“, d. s. die Berührungspunkte der zu $E_v E_h$ und $E'_v E'_h$ parallelen Tangentialebenen.

Als Anwendung dieses Ergebnisses wollen wir nachstehendes Problem lösen.

§. 709.

321. Aufgabe. Ein elliptisches Paraboloid ist nach einem Kreise von gegebenem Radius zu schneiden.

Sei wieder (Z, Z') (Taf. XXXXII, Fig. 286) die horizontal-projicierende Gerade, welche die Achse des Paraboloides vorstellt, (A, A') der Scheitel des Paraboloides auf derselben, und $(a'b', c'd')$ jene Ellipse, in welcher das Paraboloid die horizontale Projectionsebene schneidet. Hierbei setzen wir voraus, dass die große Achse $a'b'$ dieser Ellipse senkrecht, die kleine Achse $c'd'$ dagegen parallel zu der Grundlinie X sei.

Ermitteln wir vor allem, in Übereinstimmung mit der vorigen Aufgabe, die Lage der einen Kreisschnittsschar durch eine beliebige, der genannten Schar angehörende Ebene $C_v C_h$ und führen wir sodann, parallel zu dieser Ebene, an das Paraboloid eine Berührungsebene.

Nachdem besagte Berührebene, ebenso wie die Ebene $C_v C_h$, vertical-projicierend ist, so liegt der Berührungspunkt in der zur verticalen Projectionsebene parallelen Hauptebene η. Die Verticalprojection N desselben ergibt sich demgemäß als Berührungspunkt der zu C_v parallelen Tangente T_N an die Verticalprojection (F, A) der in der Hauptebene η liegenden Hauptparabel. Die horizontale Projection N' dieses Punktes liegt selbstverständlich in der Horizontaltrace η_h der genannten Hauptebene.

Der Punkt (N, N') stellt sonach den der Parallelschar $C_v C_h$ entsprechenden Kreis- oder Nabelpunkt des Paraboloides dar. Die durch denselben gehende horizontal-projicierende Gerade ist bekanntlich der der Parallelebenenschar $C_v C_h$ conjugierte Durchmesser des Paraboloides.

Hieraus folgt unmittelbar, dass die Mittelpunkte aller zur Ebene $C_v C_h$ parallelen Kreisschnitte auf dieser Geraden liegen, oder mit anderen Worten, dass die Horizontalprojectionen aller zur Ebene $C_v C_h$ parallelen Kreisschnitte Ellipsen seien, welche der Ellipse $(a'b', c'd')$ ähnlich sind und deren Mittelpunkte sämmtlich mit der Projection N' zusammenfallen.

Construiert man umgekehrt eine beliebige Ellipse, welche ihren Mittelpunkt in N' hat und mit der Ellipse $(a'b', c'd')$ ähnlich gelegen ist, so repräsentiert dieselbe stets die Horizontalprojection eines zur Ebene $C_v C_h$ parallelen Kreisschnittes, nie aber die Horizontalprojection eines anderen ebenen Schnittes.

Von diesen Eigenschaften machen wir behufs Lösung der gestellten Aufgabe in nachstehender Weise Gebrauch.

Wir betrachten die Horizontalprojection N', als den Mittelpunkt o' einer mit $(a'b', c'd')$ ähnlich gelegenen Ellipse $(a'_1 b'_1, c'_1 d'_1)$, deren große Achse $a'_1 b'_1$ (parallel zu $a'b'$) dem gegebenen Durchmesser $2r$ des zu bestimmenden Kreisschnittes gleich angenommen wird. Die

Endpunkte c'_1 und d'_1 der kleinen Achse ergeben sich sodann offenbar mit Hilfe der zu $a'd'$ parallelen Geraden $a'_1 d'_1$ und $b'_1 c'_1$.

Die so construierte Ellipse $(a'_1 b'_1, c'_1 d'_1)$ repräsentiert nun, den gepflogenen Erörterungen gemäß, die horizontale Projection eines zu $C_v C_h$ parallelen Kreisschnittes des Paraboloides.

Da aber gleichzeitig die große Achse $a'_1 b'_1$ dieser Ellipse dem gegebenen Durchmesser $2r$ gleich ist und diese große Achse die Projection des zur Projectionsebene parallelen, also in wahrer Größe erscheinenden Kreisdurchmessers darstellt, so folgt, dass der Kreis auf dem Paraboloide, dessen Projection die Ellipse $(a'_1 b'_1, c'_1 d'_1)$ ist, den Durchmesser $2r$ besitzen, also den gesuchten Kreis repräsentieren müsse.

Es erübrigt jetzt nur noch, die Lage der betreffenden Kreisschnittsebene zu bestimmen.

Da die letztere zur Ebene $C_v C_h$ parallel sein muss, so wird zu ihrer Construction die Kenntnis eines einzigen Punktes hinreichen. Ein solcher Punkt ist höchst einfach festzustellen.

Die Punkte c'_1 und d'_1 sind die Horizontalprojectionen jener Punkte des zu construierenden Kreises, welche gleichzeitig in der Hauptebene η_h liegen und der in der letzteren sich vorfindenden Hauptparabel angehören.

Construieren wir demnach deren Verticalprojectionen c_1 und d_1 als die Schnittpunkte der Parabel (F, A) mit den durch c'_1 und d'_1 senkrecht zur Grundlinie XX gezogenen Geraden. Die Punkte (c_1, c'_1) und (d_1, d'_1) werden nun der gesuchten Kreisschnittsebene $E_v E_h$, deren Verticaltrace E_v sich sofort als die Verbindungsgerade von c_1 und d_1 ergibt, angehören.

Der Umstand, dass $c_1 d_1 = E_v$ parallel zu C_v sein müsse, kann diesbezüglich als Controle für die Genauigkeit der durchgeführten Construction benützt werden.

§. 710.

Bestimmung des Paraboloides aus verschiedenen Elementen.

Übergehen wir nun schließlich noch darauf, die Hauptbestimmungsstücke eines elliptischen Paraboloides festzustellen, wenn dasselbe durch verschiedene Elemente (Hauptebenen, Scheitel, Achse, Punkte, Tangenten oder Tangentialebenen) gegeben ist. Gelegentlich der Besprechung des Hyperboloides haben wir die Lösung derlei Aufgaben stillschweigend übergangen, da die Lösungen und Durchführungen dem Principe nach in voller Übereinstimmung mit jenen des Ellip-

soides sind; das Paraboloid hingegen bildet eine besondere Fläche zweiten Grades und muss demgemäß in dieser Hinsicht auch besonders besprochen werden

§. 711.

322. Aufgabe. Es sind drei wechselseitig auf einander senkrecht stehende Ebenen und zwei Punkte gegeben; die ersteren zwei Ebenen sind als die beiden Hauptebenen, die dritte dagegen ist als die Scheiteltangentialebene eines elliptischen Paraboloides aufzufassen, während die beiden gegebenen Punkte als Punkte der Fläche zu betrachten sind; das Paraboloid ist zu construieren.

Wir ordnen diesfalls die Projectionsebenen derart an, dass die verticale Projectionsebene parallel zur Hauptebene η (Taf. XXXXII, Fig. 287) und die horizontale Projectionsebene parallel zur Scheiteltangentialebene T_A sei. Die zweite Hauptebene stellt sich sodann als eine zur Grundlinie XX senkrechte Ebene $\pi_v \pi_h$ dar. Unter diesen Voraussetzungen mögen ferner (p_1, p'_1) und (p_2, p'_2) die gegebenen Punkte darstellen.

Die Achse (Z, Z') des Paraboloides ergibt sich unmittelbar als Schnitt der beiden Hauptebenen η und $\pi_v \pi_h$, während der Scheitel (A, A') im Schnitte von (Z, Z') mit der gegebenen Scheiteltangentialebene T_A erhalten wird.

Das Paraboloid wird wieder in der für die Vornahme von Constructionen zweckmäßigsten Weise dann dargestellt sein, wenn wir jene Ellipse $(a'b', c'd')$ kennen, in welcher dasselbe die horizontale Projectionsebene schneidet.

Unsere Aufgabe wird daher einfach darin bestehen, „aus den gegebenen Punkten (p_1, p'_1) und (p_2, p'_2) die Achsenendpunkte a', b', c' und d' auf η_h und π_h zu finden“.

Legen wir zu diesem Behufe durch die Achse (Z, Z') und durch den Punkt (p_1, p'_1) die horizontal-projicierende Ebene $P'_v P'_h$. Dieselbe schneidet das Paraboloid in einer Parabel (Σ_1, Σ'_1), welche die Achse (Z, Z') und den Scheitel (A, A') besitzt und durch den Punkt (p_1, p'_1) geht. Die Verticalprojection Σ_1 ist daher eine durch p_1 geführte Parabel mit der Achse Z und dem Scheitel A. Die bezeichneten Stücke bestimmen die Parabel Σ_1 vollständig und kann auch deren Brennpunkt F_1 leicht festgestellt werden.

Ziehen wir durch p_1 eine Senkrechte zu Z, welche diese letztere im Punkte π_1 treffen möge und bestimmen wir weiters den dem Punkte π_1 in Bezug auf A symmetrisch gelegenen Punkt (π_1), so ist bekanntlich $(\pi_1)p_1$ die Tangente T_N der Parabel Σ_1 im Punkte p.

Fällt man von dem Schnittpunkte α_1 dieser Tangente mit der Scheiteltangente T_A eine Senkrechte auf die erstere Tangente T_N, so schneidet dieselbe, wie wir aus Früherem wissen, die Achse Z im Brennpunkte F_1 der Parabel Σ_1. Es wird nunmehr auch keinem Anstande unterliegen, die Schnittpunkte m_1 und n_1 dieser Parabel Σ_1 mit der Grundlinie (vermittelst des Brennpunktes und der Directrix) zu ermitteln.

Diese beiden Schnittpunkte m_1 und n_1 sind die Verticalprojectionen jener Punkte der horizontalen Projectionsebene, in welchen diese von der Parabel (Σ, Σ') getroffen wird; die Horizontalprojectionen m'_1 und n'_1 dieser Punkte, welche sich in der Trace P'_h vorfinden, repräsentieren mithin zwei diametral gegenüberliegende Punkte der zu bestimmenden Ellipse $(a'b', c'd')$.

Zwei weitere diametral gegenüberliegende Punkte m'_2 und n'_2 erhält man, wenn man bezüglich des Punktes (p_2, p'_2) die nämlichen Constructionen wie soeben für den Punkt (p_1, p'_1) vollzieht.

Die zu suchende Ellipse $(a'b', c'd')$ ist somit durch die Lage der Achsen (η_h und π_h) und durch zwei von einander unabhängige Punkte m_1 und m_2 (oder n_1 und n_2) gegeben und können demnach anstandslos vermittelst eines affinen Kreises die Achsenendpunkte bestimmt werden.

§. 712.

323. Aufgabe. **Ein elliptisches Paraboloid ist durch die beiden Hauptebenen, eine Tangentialebene und deren Berührungspunkt gegeben; es ist der Scheitel und die Horizontalspur des Paraboloides zu construieren.**

Als horizontale Projectionsebene wählen wir diesfalls eine Ebene, welche durch den gegebenen Berührungspunkt p (Taf. XXXXI, Fig. 288) geht und auf den beiden Hauptebenen η und π senkrecht steht: als verticale Projectionsebene dagegen eine Ebene, welche zur Hauptebene η parallel ist.

Diesen Voraussetzungen entsprechend, ist die Hauptebene η durch eine zur verticalen Projectionsebene parallele Ebene und die Hauptebene π durch eine zur Grundlinie senkrechte Ebene $\pi_v \pi_h$ dargestellt. Der gegebene Punkt (p, p') liegt in der horizontalen Projectionsebene, während der Tangentialebene $T_v T_h$ desselben eine Horizontaltrace T_h entspricht, welche durch p' geht.

Nach dieser eben getroffenen Vorbereitung unterliegt es auch keinerlei Schwierigkeit, den Scheitel (A, A'), sowie die Horizontalspur $(a'b', c'd')$ des Paraboloides zu construieren.

Die horizontal-projicierende Schnittgerade (Z, Z') der beiden gegebenen Hauptebenen η_h und $\pi_v \pi_h$ stellt bereits die Achse des Paraboloides dar. Besagte Achse wird von der gegebenen Tangentialebene $T_v T_h$ in einem Punkte (s, s') getroffen, dessen Polarebene auf (Z, Z') senkrecht steht, und durch den Berührungspunkt (p, p') der Ebene $T_v T_h$ geht, mithin unmittelbar durch die horizontale Projectionsebene repräsentiert erscheint.

Mit Zugrundelegung des Gesagten muss aber bekanntlich der Scheitel (A, A') des Paraboloides der Mittelpunkt jener Strecke sein, welche von dem Punkte (s, s') und dem Horizontal-Durchstoßpunkte (n, n') der Achse (Z, Z') begrenzt wird.

Was die Ellipse $(a'b', c'd')$ anbelangt, in welcher das Paraboloid die horizontale Projectionsebene schneidet, so repräsentieren die Horizontaltracen η_h und π_h der beiden Hauptebenen die Achsen derselben; p' ist bereits ein Punkt der Ellipse, und die horizontale Trace T_h der gegebenen Tangentialebene $T_v T_h$ repräsentiert die Ellipsentangente in p'. Aus diesen Bestimmungsstücken kann man ohneweiters mittelst eines affinen Kreises K_0 die Achsenendpunkte a', b', c', und d' feststellen.

§. 713.

324. Aufgabe. **Ein elliptisches Paraboloid ist durch die Achse, zwei Punkte und die Tangentialebene in einem dieser Punkte gegeben; es ist der Scheitel und die Horizontalspur des Paraboloides zu bestimmen.**

Die gegebene Achse sei Z, die beiden gegebenen Punkte seien p_1 und p_2, und die Tangentialebene in p_1 sei T_1.

Diese letztere schneidet die Achse Z in einem Punkte h. Die Polarebene dieses Punktes ist, wie man leicht findet, diejenige Ebene H, welche durch den zugehörigen Berührungspunkt p_1 senkrecht zu Z gelegt werden kann.

Nennen wir jenen Punkt, in welchem die besagte Polarebene H die Achse Z trifft, O, so erhält man bekanntlich den Scheitel des Paraboloides als Mittelpunkt A der Strecke Os.

Die Polarebene H wollen wir weiters als die horizontale Projectionsebene betrachten. Das Paraboloid schneidet dieselbe sodann in der zu bestimmenden Ellipse, von welcher bereits der Mittelpunkt O_1 (als Schnittpunkt mit der Achse Z), ein Punkt p_1 und die Tangente t_1 in demselben (die letztere als Schnittgerade der Ebene H mit der gegebenen Tangentialebene T_1) als bekannt vorliegen.

Einen weiteren Punkt erhalten wir folgendermaßen. Denken wir uns durch die Achse Z und durch den zweiten gegebenen Punkt p_2 eine Ebene P gelegt, so schneidet diese das Paraboloid in einer Parabel, welche einerseits die Achse Z und den Scheitel s besitzt und andererseits durch den Punkt p_2 geht.

Durch diese Stücke ist die Parabel vollkommen bestimmt, und man kann sonach auch leicht deren Brennpunkt und die Directrix und hierauf auch die Schnittpunkte m und n derselben mit der Ebene H (oder, was dasselbe ist, mit der Schnittgeraden der beiden Ebenen P und H) bestimmen. Die eben genannten Punkte m und n sind gleichzeitig auch zwei einander diametral gegenüberliegende Punkte der zu bestimmenden Ellipse in H.

Besagte Ellipse ist also durch den Mittelpunkt O, durch zwei Punkte p_1 und m, und die Tangente t_1 in dem Punkte p_1 gegeben. Aus diesen Bestimmungsstücken kann man vorerst ein Paar conjugierter Durchmesser und sodann, wie in Früherem besprochen, die Achsen der Ellipse selbst bestimmen.

§. 714.

325. Aufgabe. **Ein elliptisches Paraboloid ist durch die beiden Hauptebenen, die Scheiteltangentialebene, eine Tangente und deren Berührungspunkt gegeben; es ist die Horizontalellipse desselben zu construieren.**

Die beiden gegebenen Hauptebenen η und π schneiden sich in der Achse Z des Paraboloides, und diese trifft die gegebene Scheiteltangentialebene im Scheitel A der Fläche.

Nehmen wir ferner die durch den Berührungspunkt p der gegebenen Tangente t senkrecht zur Achse Z geführte Ebene H als Horizontalebene an. Dieselbe trifft die Achse Z in einem Punkte O, welcher den Mittelpunkt der in dieser Ebene liegenden Ellipse des Paraboloides repräsentiert. Die Achsen der Ellipse sind jene Geraden, in welchen die Ebene H von den beiden Hauptebenen π und η geschnitten wird. Endlich geht die Ellipse auch durch den gegebenen Punkt p.

Um die Achsenendpunkte derselben construieren zu können, ist sonach noch irgend ein Bestimmungsstück festzustellen. Als solches betrachten wir die Ellipsentangente t_1 im Punkte p. Diese lässt sich wie folgt construieren. Der Pol s der Ebene H, in Bezug auf das Paraboloid, liegt, da diese Ebene auf der Achse Z senkrecht steht, auf dieser Achse, und ist von dem Scheitel A ebenso weit entfernt, wie der letztere von der Ebene H.

Durch den Punkt s müssen aber die Tangentialebenen des Paraboloides in allen Punkten der Ellipse, somit also auch die Tangentialebene in dem gegebenen Punkte p gehen. Weiters muss diese Tangentialebene auch die gegebene Flächentangente t enthalten. Besagte Tangentialebene ist mithin die durch s und t bestimmte Ebene. Dieselbe wird offenbar die Ebene H in der Tangente t_1 der fraglichen Ellipse im Punkte p schneiden.

Die Ellipse ist demnach durch die beiden Achsen, einen Punkt p und die Tangente t_1 in diesem Punkte gegeben; aus diesen Stücken lassen sich, durch Zuhilfenahme eines affinen Kreises leicht die Achsenendpunkte der Ellipse finden.

§. 715.

326. Aufgabe. **Ein elliptisches Paraboloid ist durch den Scheitel, eine Hauptebene, zwei Punkte und die Tangentialebene in einem dieser Punkte gegeben; es ist die Achse, sowie ein zur Achse senkrechter Ellipsenschnitt zu bestimmen.**

Die gegebene Hauptebene sei wieder η und der Scheitel des Paraboloides in derselben sei A; ferner seien p_1 und p_2 die beiden gegebenen Punkte, und T_1 die Tangentialebene in p_1.

Denken wir uns für einen Augenblick die Hauptebene η als Projectionsebene angenommen, und setzen wir gleichzeitig voraus, dass π_1 die orthogonale Projection des Punktes p_1 auf diese Ebene, und t_1 (Taf. XXXXI, Fig. 289) der Schnitt der Ebene T_1 mit derselben Ebene η sei.

Die Ebene η schneidet das Paraboloid in einer Hauptparabel Σ, welche den Scheitel A besitzt und für welche (nach Satz 379) π_1 und t_1 beziehungsweise Pol und Polare repräsentieren.

Verbinden wir den Scheitel A mit dem Punkte π_1. Diese Verbindungsgerade schneide die Gerade t_1 im Punkte s. Dies vorausgesetzt ist offenbar der vierte harmonische Punkt B zu den drei Punkten s, π_1 und A der zweite Schnittpunkt der Geraden $\pi_1 A$ mit der Parabel Σ.

Die Tangenten der Parabel Σ in den Punkten A und B schneiden sich in einem Punkte P, welcher den Pol der Geraden $AB\pi_1$ darstellt. Nachdem diese Gerade durch π_1 geht, so liegt der Pol P derselben auf der Polare t_1 von π_1.

Wenn wir ferner den Pol P mit dem Mittelpunkte o der Sehne AB verbinden, so stellt diese Gerade Po, wie bekannt, den der

Sehne AB conjugierten Durchmesser d der Parabel Σ dar, welcher als solcher auf der Scheiteltangente AP senkrecht stehen muss.

Hieraus folgt unmittelbar die Construction für den Punkt P.

Derselbe ergibt sich nämlich im Schnitte von t_1 mit dem über oA als Durchmesser beschriebenen Kreise. Da zwei solche Schnittpunkte existieren, so gibt es selbstverständlich auch zwei Parabeln Σ, welche den gestellten Bedingungen entsprechen.

Die Gerade PA ist demnach die Scheiteltangente der Parabel Σ, während die durch A zu PA senkrecht gezogene Gerade Z die Achse der Parabel, und mithin auch jene der Fläche darstellt.

Denken wir uns nun durch den zweiten gegebenen Punkt p_2 eine Ebene H senkrecht zu der Achse Z gelegt, so wird diese das Paraboloid in einer Ellipse schneiden, welche durch p_2 geht, und deren eine Achse jene Sehne ist, welche die Ebene H auf der soeben ermittelten Hauptparabel Σ bestimmt.

Aus dieser Achse und dem Punkte p_2 lässt sich nun, mit Hilfe des über der ersteren beschriebenen Affinkreises, ohne jedwede Schwierigkeit, die zweite Achse der Ellipse construieren, die gestellte Aufgabe also anstandslos durchführen.

XXX. Capitel.

Gegenseitiger Schnitt der Flächen zweiten Grades.

§. 716.

Der Schnitt zweier Flächen zweiten Grades ist stets eine Curve vierter Ordnung.

Denn eine beliebige Ebene hat mit der Schnittcurve nicht mehr und nicht weniger als vier Punkte, d. i. jene vier (reellen oder imaginären) Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte gemein, in welchen die besagte Ebene die beiden Flächen schneidet.

Die obbezeichnete Schnittcurve kann aber bei einer besonderen gegenseitigen Lage der beiden Flächen aus Curven niederer Ordnung bestehen.

So haben wir gelegentlich früherer Untersuchungen gefunden (Satz 449, Band II), dass die beiden Flächen, falls sie sich in zwei Punkten berühren, oder was auf dasselbe hinausläuft, falls sie einem

und demselben Kegel zweiten Grades eingeschrieben sind, sich in einer Curve vierter Ordnung schneiden, welche in zwei ebene Curven, d. h. in zwei Kegelschnitte zerfällt, welche durch die beiden Berührungspunkte dieser Flächen gehen.

Untersuchen wir, ob als Schnitt zweier Flächen zweiten Grades auch eine Raumcurve dritter Ordnung auftreten könne.

Da der vollständige Durchschnitt zweier Flächen zweiten Grades eine Curve vierter Ordnung ist, so muss, sobald ein Theil davon eine Raumcurve dritter Ordnung repräsentieren soll, der Rest des Schnittes eine Curve erster Ordnung, d. i. eine gerade Linie sein.

Hieraus folgt unmittelbar, dass ein solcher Fall nur dann eintreten kann, wenn beide Flächen gerade Linien enthalten, also entweder Kegelflächen (Cylinderflächen) zweiten Grades, oder aber windschiefe Flächen zweiten Grades sind.

§. 717.

Betrachten wir den Schnitt zweier Kegel zweiten Grades unter der Voraussetzung, dass beide eine gemeinschaftliche Erzeugende besitzen.

Besagte Flächen haben, außer der vorausgesetzten Erzeugenden, noch eine Curve dritter Ordnung gemein und sind diesbezüglich zwei Fälle zu unterscheiden.

a) Die beiden Kegelscheitel fallen nicht zusammen.

Unter dieser Voraussetzung stellt die Verbindungsgerade ihrer Scheitel die gemeinschaftliche Erzeugende der beiden Flächen dar.

Eine beliebige Ebene schneidet sodann die beiden Kegel in zwei Kegelschnitten, welche vier Punkte gemein haben. Einer derselben ist der Schnittpunkt mit der gemeinschaftlichen Erzeugenden, während die drei übrigen der restlichen Durchschnittscurve dritter Ordnung angehören.

Besitzen insbesondere die beiden Kegel längs der gemeinschaftlichen Erzeugenden die nämliche Tangentialebene, so berühren sich auch die beiden Kegelschnitte in jenem Punkte, welcher dieser Erzeugenden angehört und es existieren demnach nur noch zwei, von diesem Punkte verschiedene Schnittpunkte; der Rest der Schnittcurve beider Kegel ist also ein Kegelschnitt. Aus dieser einfachen Betrachtung folgen sofort die beiden Sätze:

389. „Ist die Verbindungsgerade der Scheitel zweier Kegel zweiten Grades eine gemeinschaftliche Erzeugende derselben, so schnei-

den sich die Kegel außer in dieser Erzeugenden noch in einer Raumcurve dritter Ordnung";

und:

390. „*Ist die Verbindungsgerade der Scheitel zweier Kegel zweiten Grades eine gemeinschaftliche Erzeugende beider Flächen und besitzen die beiden Kegel längs dieser Erzeugenden die nämliche Berührebene, so schneiden sich dieselben außer in dieser doppelt zählenden Erzeugenden noch in einem Kegelschnitte.*"

b) Die beiden Kegel besitzen einen gemeinschaftlichen Scheitel.

Denken wir uns diese beiden Kegel durch eine beliebige Ebene geschnitten, so ergeben sich zwei Kegelschnitte, welch letztere vier (reelle oder imaginäre) gemeinsame Punkte besitzen.

Verbindet man die bezeichneten Punkte mit dem gemeinschaftlichen Kegelscheitel, so erhält man vier Geraden, welche sowohl Erzeugenden des einen als auch des anderen Kegels darstellen.

Nachdem aber diese Erzeugenden zusammengenommen bereits einen Ort der vierten Ordnung repräsentieren, so können die beiden Kegel, außer denselben, keine weiteren Punkte mehr gemein haben; es folgt sonach unmittelbar der Satz:

391. „*Zwei Kegel zweiten Grades, welche einen gemeinschaftlichen Scheitel besitzen, schneiden sich stets in vier (reellen oder imaginären) Erzeugenden.*"

§. 718.

Da ein Cylinder zweiten Grades als ein Kegel mit unendlich fernem Scheitel zu betrachten ist, so kann sich eine Raumcurve dritter Ordnung wohl als Schnitt eines solchen Cylinders mit einem Kegel zweiten Grades, nie aber als Schnitt mit einem zweiten Cylinder ergeben.

Haben nämlich zwei Cylinder eine Erzeugende gemein, so haben sie nothwendig auch den (unendlich fernen) Scheitel gemeinsam; der Rest des Schnittes ist daher keine eigentliche Curve dritter Ordnung, sondern besteht aus drei weiteren Erzeugenden beider Cylinderflächen. Ist jedoch eine der beiden Flächen ein Kegel zweiten Grades, so wird das Gesagte offenbar nicht stattfinden. Wir erhalten mithin den Satz:

392. „*Eine Raumcurve dritter Ordnung kann nie als Schnitt zweier Cylinder zweiten Grades erhalten werden.*"

Oder auch:

393. *„Haben zwei Cylinder zweiten Grades eine Erzeugende gemein, so werden dieselben gleichzeitig noch drei weitere Erzeugenden gemeinsam besitzen.“*

§. 719.

Setzen wir voraus, zwei Regelflächen zweiten Grades R_2 und R'_2 hätten eine gerade Erzeugende g_1 gemein, besäßen aber sonst eine ganz beliebige gegenseitige Lage.

Besagte Flächen werden außer der Geraden g_1 noch einen Ort dritter Ordnung gemein haben müssen, und wir haben demgemäß zu untersuchen, ob dieser Ort eine eigentliche Curve dritter Ordnung sei oder nicht.

Nehmen wir zu diesem Zwecke an, es seien g_2 und g_3 zwei anderweitige beliebige Erzeugenden der einen Regelfläche R_2 und zwar solche, welche dem nämlichen Systeme wie die gegebene gemeinschaftliche Erzeugende g_1 angehören. Ebenso mögen g'_2 und g'_3 zwei beliebige zum Systeme g_1 gehörende Erzeugenden der zweiten Regelfläche vorstellen.

Infolge der beliebigen gegenseitigen Lage der beiden Regelflächen haben auch die fünf Geraden g_1, g_2, g_3, g'_2 und g'_3 eine allgemeine gegenseitige Lage.

Es ist leicht einzusehen, dass die beiden Regelflächen R_2 und R'_2, außer der Geraden g_1, keine weitere Erzeugende, weder des einen noch des anderen Systems gemein haben können.

Eine Erzeugende l, welche nicht zum Systeme g gehört, müsste, als gemeinschaftliche Erzeugende von R_2 und R'_2, sowohl die Geraden g_1, g_2 und g_3, als auch die Geraden g_1, g'_2 und g'_3, mithin alle fünf Geraden schneiden, was aber, infolge der allgemeinen Lage der letzteren, ganz unmöglich ist, woraus unmittelbar hervorgeht, dass die beiden Regelflächen keine Erzeugende gemein haben können, welche dem von den Geraden g verschiedenen Systeme angehören würde.

Die genannten Flächen können aber auch, wie sich leicht nachweisen lässt, keine Erzeugenden gemeinsam besitzen, welche zum Systeme g gehören.

Wäre allenfalls (g) eine derartige Erzeugende, so würde jede von den beiden Geraden l_1 und l_2, welche die vier Geraden g_1, (g), g_2 und g'_2 schneidet, sowohl eine Erzeugende von R_2 repräsentieren (da von derselben g_1, (g) und g_2 geschnitten werden), als auch

eine Erzeugende von R'_2 (nachdem dieselbe g_1, (g) und g'_2 schneidet) darstellen müssen.

Die beiden Regelflächen würden also, dieser Voraussetzung zufolge, wenn sie zulässig wäre, dennoch zwei Erzeugenden gemein haben, welche dem Systeme g nicht angehören. Nachdem dies aber, wie eben nachgewiesen wurde, unmöglich ist, so ist auch die letztere Annahme, als dem Früheren widersprechend, zu verwerfen.

Aus diesen Betrachtungen folgt somit, dass die beiden Regelflächen, außer der Geraden g_1, keine weitere Gerade gemein haben.

Weiters geht aber aus diesen Erörterungen gleichzeitig hervor, dass die besagten Flächen auch keinen Kegelschnitt gemeinschaftlich besitzen können. Denn, wäre letzteres denkbar, so würde derselbe mit g_1 einen Ort dritter Ordnung repräsentieren; der Rest müsste demnach von der ersten Ordnung sein, oder mit anderen Worten, die beiden Regelflächen müssten, außer dem Kegelschnitte und der Geraden g_1, noch eine zweite Gerade gemein haben, welche Annahme gleichfalls unzulässig erscheint.

Hiernach gelangen wir zu dem Schlusse, dass zwei Regelflächen zweiten Grades, welche eine gemeinschaftliche Erzeugende besitzen, sonst aber eine beliebige gegenseitige Lage haben, sich außer in dieser Geraden, nur noch in einer eigentlichen Raumcurve dritter Ordnung schneiden können. Es gilt sonach der Satz:

394. „Zwei Regelflächen zweiten Grades, welche eine gemeinschaftliche Erzeugende besitzen, sonst aber eine beliebige gegenseitige Lage haben, schneiden sich, außer in dieser Erzeugenden, unter allen Umständen immer noch in einer eigentlichen Raumcurve dritter Ordnung.“

§. 720.

Untersuchen wir weiters das Verhalten der Erzeugenden einer Regelfläche gegen eine auf der letzteren liegende Raumcurve C dritter Ordnung.

Diese Curve C^3 sei der Schnitt der Regelfläche R_2 mit einer anderen Regelfläche R'_2, welche mit R_2 eine Erzeugende g_1 gemein habe.

Betrachten wir eine beliebige zum System g_1 gehörende Erzeugende g_2 der Regelfläche R_2, so schneidet dieselbe die zweite Regelfläche R'_2 in zwei Punkten, welche offenbar dem Schnitte beider Regelflächen R_2 und R'_2 angehören müssen. Da aber die Erzeugende g_2 die zu dem nämlichen Systeme gehörende Erzeugende g_1 nicht schneidet, so müssen die beiden Schnittpunkte auf der Curve C^3 liegen.

Jede zum Systeme g_1 gehörende Erzeugende schneidet demnach die Curve C^3 in zwei Punkten, oder jede der genannten Erzeugenden ist eine zweipunktige Secante dieser Raumcurve.

Betrachten wir hingegen eine Erzeugende der Regelfläche R_2, welche nicht zum Systeme g_1 gehört, so wird dieselbe gleichfalls die zweite Regelfläche R_2 in zwei Punkten treffen, welche dem Schnitte beider Regelflächen angehören. Einer dieser Punkte ist selbstverständlich der Schnittpunkt der betrachteten Erzeugenden mit der dem anderen Systeme angehörenden Erzeugenden g_1.

Auf die Curve C^3 entfällt mithin nur ein Schnittpunkt. Hiernach schneiden die nicht zum Systeme g_1 gehörenden Erzeugenden die Raumcurve dritter Ordnung C^3 nur in einem Punkte, oder mit anderen Worten, die besagten Erzeugenden sind einpunktige Secanten dieser Curve. Wir gelangen mithin zu dem Satze:

395. „Jede Raumcurve dritter Ordnung auf einer Regelfläche zweiten Grades besitzt die Erzeugenden des einen Systems als zweipunktige Secanten, die Erzeugenden des zweiten Systems dagegen als einpunktige Secanten.“

Ebenso einfach kann auch die Richtigkeit des nachstehenden Satzes bewiesen werden:

396. „Eine durch eine gegebene Raumcurve dritter Ordnung gehende Regelfläche zweiten Grades ist bestimmt, sobald man zwei beliebige Gerade, deren jede mit der genannten Curve zwei Punkte gemein hat, als Erzeugende der Regelfläche betrachtet.“

Denn die Erzeugenden des zweiten Systems sind sodann, dem vorstehenden Satze gemäß, jene Geraden, welche sowohl die beiden angenommenen Erzeugenden, als auch die Raumcurve in je einem Punkte schneiden.

§. 721.

Setzen wir voraus, zwei Regelflächen zweiten Grades hätten zwei Erzeugende g_1 und g_2, welche dem nämlichen Systeme angehören, gemein.

Wäre ferner g_3 noch irgend eine beliebige Erzeugende desselben Systems für die Regelfläche R_2 und g'_3 eine gleichfalls willkürliche Erzeugende desselben Systems für die zweite Regelfläche R'_2, so wird es zwei Geraden l_1 und l_2 geben, welche die vier Geraden g_1, g_2, g_3 und g'_3 schneiden werden.

Jede dieser genannten Geraden ist sodann, da sie g_1, g_2 und g_3 schneidet, eine Erzeugende der Fläche R_2 und, nachdem dieselbe g_1,

g_2 und g'_3 schneidet, auch eine Erzeugende der Fläche R'_2. Die beiden Geraden l_1 und l_2 sind demnach zwei gemeinschaftliche Erzeugende beider Regelflächen.

Die besagten Erzeugenden l_1 und l_2 repräsentieren sonach mit g_1 und g_2 einen gemeinschaftlichen Ort vierter Ordnung beider Flächen, und können die letzteren somit, außer diesen vier Geraden, keine Punkte mehr gemein haben. Es besteht sonach der Satz:

397. „Haben zwei Regelflächen zweiten Grades zwei demselben Systeme angehörende Erzeugenden gemein, so besitzen dieselben stets noch zwei dem anderen Systeme angehörende gemeinschaftliche Erzeugenden, haben aber sonst keine weiteren Punkte mehr gemein."

Haben zwei Regelflächen drei demselben Systeme angehörende Erzeugenden gemein, so sind dieselben nothwendig identisch, da durch diese drei Erzeugenden nur ein einziges Hyperboloid gelegt werden kann.

§. 722.

Endlich ist noch der Fall zu untersuchen, wenn zwei Regelflächen zweiten Grades zwei Erzeugenden g_1 und l_1 gemein haben, welche verschiedenen Systemen angehören. Diese Regelflächen mögen sonst aber eine ganz beliebige gegenseitige Lage besitzen.

Nehmen wir auf l_1 irgend zwei Punkte a und b an, und ziehen wir durch jeden dieser Punkte zwei Geraden g_2 und g'_2; g_3 und g'_3, welche die gegebene Erzeugende g_1 nicht schneiden, so kann man g_1, g_2 und g_3 als die Leitgeraden für die eine Regelfläche R_2, und g_1, g'_2 und g'_3 als die Leitgeraden für die zweite Regelfläche betrachten.

Nachdem die beiden Regelflächen zwar die gemeinschaftlichen Erzeugenden g_1 und l_1 besitzen, sonst aber eine beliebige gegenseitige Lage einnehmen, so folgt, dass auch die vier Geraden g_2, g_3, g'_2 und g'_3 weder in Bezug auf einander, noch in Bezug auf g_1 einer besonderen Bedingung zu genügen haben.

Es ist nun einleuchtend, dass wenn beide Regelflächen noch eine zweite, dem Systeme l angehörende Erzeugende gemein hätten, diese auch die fünf Geraden g_1, g_2, g_3, g'_2 und g'_3 schneiden müsste, oder mit anderen Worten, die Schnittgerade der Ebenen (g_2, g'_2) und (g_3, g'_3) (d. i. eine Gerade, welche g_2, g'_2, g_3, g'_3 schneidet), müsste die gegebene Gerade g_1 schneiden. Letzteres ist jedoch, infolge der allgemeinen Lage von g_2, g'_2, g_3 und g'_3, offenbar nicht der Fall.

Kömmt aber den beiden Regelflächen R_2 und R'_2 keine zweite Erzeugende des Systems l gemeinschaftlich zu, so können dieselben auch keine zweite Erzeugende des Systems g gemein haben.

Hieraus folgt sofort, dass die beiden vorgenannten Flächen, außer den Erzeugenden g_1 und l_1, nur eine eigentliche Curve zweiter Ordnung, d. i. einen Kegelschnitt gemein haben können. Dieses Ergebnis führt zu dem Satze:

398. „Haben zwei Regelflächen zweiten Grades zwei Erzeugende gemein, welche verschiedenen Systemen angehören, und besitzen diese Flächen eine sonst allgemeine gegenseitige Lage, so schneiden sich dieselben noch in einem eigentlichen Kegelschnitte."

§. 723.

Eine Kegelfläche zweiten Grades kann mit einer Regelfläche zweiten Grades nicht mehr als zwei Erzeugenden gemein haben, da es auf der Regelfläche keinen Punkt gibt, durch welchen mehr als zwei der Fläche angehörende Geraden gehen.

Man erhält daher ohneweiters die Sätze:

399. „Hat eine Regelfläche zweiten Grades mit einer Kegelfläche zweiten Grades eine Erzeugende gemein, so schneiden sich die beiden Flächen außer in dieser Erzeugenden stets noch in einer eigentlichen Raumcurve dritter Ordnung."

Und:

400. „Geht ein Kegel zweiten Grades durch zwei Erzeugende verschiedener Systeme einer Regelfläche zweiten Grades, so schneidet der Kegel die letztere Fläche noch in einem eigentlichen Kegelschnitte."

§. 724.

Der Schnitt zweier Flächen zweiten Grades kann, sobald auch nur eine von ihnen eine Nichtregelfläche ist, nie theilweise aus einer Raumcurve dritter Ordnung bestehen, da der Rest eine gerade Linie sein müsste, was, nachdem eine solche auf der Nichtregelfläche nicht existiert, offenbar unmöglich ist.

Früher schon wurde nachgewiesen, dass der Schnitt zweier Flächen zweiten Grades, einerlei, ob dieselben Kegelflächen, Regelflächen oder nicht geradlinige Flächen sind, stets in zwei Kegelschnitte zerfällt, sobald sich dieselben in zwei Punkten berühren, und dass insbesondere diese beiden Kegelschnitte unendlich nahe an-

einander rücken können, oder mit anderen Worten, dass diese Flächen längs eines Kegelschnittes eine Berührung eingehen. Sind überdies beide Flächen Kegelflächen zweiten Grades, so werden dieselben zusammenfallen.

§. 725.

Raumcurven vierter Ordnung als vollständiger Schnitt zweier Flächen zweiten Grades.

Es erübrigt nunmehr noch die Untersuchung jenes Falles, in welchem die beiden Flächen zweiten Grades eine ganz allgemeine, gegenseitige Lage haben, der Schnitt derselben also eine eigentliche Curve vierter Ordnung ist. Hierbei wollen wir vorderhand voraussetzen, dass keine der vorliegenden Flächen eine Kegelfläche sei.

Vor allem wird der „Rang" der Schnittcurve, d. i. die Anzahl ihrer Tangenten, welche eine beliebige Gerade schneiden, zu bestimmen sein.

Die beiden Flächen seien F_2 und F'_2, deren Durchschnittscurve vierter Ordnung werde durch C^4 repräsentiert. Nehmen wir eine beliebige Gerade g im Raume an, und suchen wir die Zahl jener Tangenten von C^4, welche diese Gerade g schneiden.

Jede Tangente der Curve C^4 ist der Schnitt zweier Tangentialebenen der beiden Flächen F_2 und F'_2, und zwar jener beiden Tangentialebenen, welche diese Flächen in dem nämlichen Punkte der Curve C^4 berühren, in welchen die letztere auch mit der fraglichen Tangente eine Berührung eingeht.

Es ist an und für sich klar, dass, sobald die Tangentialebenen von F_2 und F'_2 in einem Punkte ξ der Curve C^4 die Gerade g in einem und demselben Punkte x treffen, durch diesen Punkt auch die Tangente der Curve C^4 im Punkte ξ, als Schnitt dieser beiden Ebenen, gehen müsse.

Unsere Aufgabe wird also, in anderen Worten ausgedrückt, darin bestehen, zu ermitteln, wie oft es vorkömmt, dass die Ebenen, welche die Flächen F_2 und F'_2 in einem und demselben Punkte ξ der Curve C^4 berühren, die Gerade g in einem und demselben Punkte treffen.

Nehmen wir auf g einen beliebigen Punkt x an, und sehen wir nach, wie viele Ebenen, welche die Fläche F_2 in Punkten der Curve C^4 berühren, durch denselben gehen.

Der Ort der Berührungspunkte aller durch x gehenden Berührebenen der Fläche F_2 ist ein Kegelschnitt. Der letztere trifft die zweite Fläche F'_2 in vier Punkten, welche der Curve C^4 angehören müssen, während die Tangentialebenen der Fläche F'_2 in diesen Punkten die Gerade g in vier Punkten x'_1, x'_2, x'_3 und x'_4 schneiden werden.

Betrachten wir demgemäß die Gerade g als Träger zweier Punktreihen, und nehmen wir als entsprechende Punkte x und x' dieser Reihen solche an, welche von den in einem und demselben Punkte von C^4 gelegten Tangentialebenen der Flächen F_2 und F'_2 herrühren, so ergibt sich aus der vorstehenden Betrachtung, dass einem Punkte x der einen Reihe vier Punkte x' der zweiten Reihe entsprechen. Da aber beide Flächen vom zweiten Grade sind, so folgt, dass auch umgekehrt jedem Punkte x' der zweiten Reihe vier Punkte x der ersten Reihe entsprechen müssen.

Nach dem Chasles'schen Correspondenzprincipe wird es nun im ganzen $4 + 4 = 8$mal vorkommen, dass zwei entsprechende Punkte x und x' zusammenfallen, d. h. dass zwei in dem nämlichen Punkte von C^4 geführte Tangentialebenen von F_2 und F'_2 die Gerade g in einem und demselben Punkte treffen.

Die acht Schnittgeraden dieser acht Paare von Tangentialebenen sind sodann die gesuchten Tangenten der Curve C^4. Es folgt mithin der Satz:

401. „Die Schnittcurve zweier Flächen zweiten Grades ist im allgemeinen eine Curve achten Ranges.“

§. 726.

Die Durchdringungscurve zweier Flächen zweiten Grades besitzt keine wirklichen Doppelpunkte, da einerseits die genannten Flächen keine Doppelcurven besitzen, und andererseits vorausgesetzt wurde, dass dieselben eine ganz allgemeine gegenseitige Lage haben, sich also in keinem Punkte berühren.

Zu bemerken ist jedoch, dass obbesagte Durchdringungscurve eine gewisse Anzahl scheinbarer Doppelpunkte (Doppelpunkte ihrer Projection auf eine Ebene) besitze, mit deren Ermittelung wir uns an späterer Stelle beschäftigen.

Da ferner die Flächen zweiten Grades weder stationäre Curven, noch stationäre Punkte (Cuspidalcurven und Cuspidalpunkte) besitzen, so werden sich auch keine derartigen Punkte in deren Schnittcurven vorfinden.

Bisher kennen wir somit drei Charaktere der Durchschnittscurve zweier Flächen zweiten Grades, und zwar die Ordnung $m = 4$; den Rang $r = 8$ und die Anzahl der stationären Punkte $\beta = 0$.

Hieraus ergeben sich, mit Hilfe der Plücker-Cayley'schen Gleichungen, anstandslos alle übrigen Charaktere und Singularitäten.

Man findet hiernach die Anzahl h der scheinbaren Doppelpunkte aus der Gleichung:

$$r = m\,(m - 1) - 2h - 3\beta,$$

d. i.

$$h = 2.$$

Ferner aus der Gleichung

$$n = 3m\,(m - 2) - 6h - 8\beta$$

die Classe der Curve (Classe ihrer Developpablen)

$$n = 12;$$

aus der Gleichung:

$$m = r\,(r - 1) - 2y - 3n$$

die Classe der doppelt berührenden Developpablen dieser Curve:

$$y = 8;$$

weiters aus der Gleichung:

$$n = r\,(r - 1) - 2x - 3m$$

die Ordnung x der Doppelcurve ihrer Tangentendeveloppablen:

$$x = 16;$$

ferner aus der Gleichung:

$$m - \alpha = 3\,(r - n)$$

die Anzahl α ihrer stationären Tangentialebenen:

$$\alpha = 16;$$

und endlich aus der Gleichung:

$$r = n\,(n - 1) - 2g - 3\alpha$$

die Anzahl g der Doppeltangenten des ebenen Schnittes ihrer Developpablen:

$$g = 38.$$

§. 727.

Zu weiteren Eigenschaften der Durchschnittscurve zweier Flächen zweiten Grades führt folgende Betrachtung.

Denken wir uns zwei Flächen zweiten Grades, welche gemeinschaftliche Achsenebenen, also auch gemeinschaftliche Achsen und einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt besitzen. Diese beiden Flächen F_2 und F'_2 mögen sich in einer Raumcurve C^4 der vierten Ordnung schneiden.

Da jede der drei Haupt- oder Achsenebenen eine Symmetrieebene für die beiden Flächen F_2 und F'_2 vorstellt, so ist besagte Ebene auch eine Symmetrieebene für deren Schnittcurve C^4.

Es lassen sich somit durch diese Durchschnittscurve drei Cylinder legen, deren Erzeugenden zu den drei Achsen parallel sind.

Jeder dieser Cylinder hat mit der Fläche F_2 (oder auch mit der Fläche F'_2) nur die Curve C^4, sonst aber keine weiteren Punkte gemein.

Wäre nämlich außer der Curve C^4 noch ein anderweitiger Schnitt vorhanden, so müsste ein beliebiger Punkt desselben auf irgend einer Erzeugenden des Cylinders liegen. Diese Erzeugende würde daher mit Einschluss der beiden Punkte der Curve C^4, welche auf der ersteren liegen, drei Punkte mit der Fläche F_2 gemein haben, was, vorausgeschickten Erörterungen zufolge, unmöglich ist.

Hieraus ist weiters unschwer zu erkennen, dass die Curve C^4 vierter Ordnung, als vollständiger Durchschnitt der Fläche F_2 zweiten Grades mit einem zu einer Achse der letztbezeichneten Fläche parallelen Cylinder betrachtet werden kann, was offenbar wieder nur dann möglich ist, wenn dieser Cylinder selbst vom zweiten Grade ist.

Hiernach gelangen wir zu dem Schlusse, dass durch die Durchdringungscurve C^4 der vierten Ordnung der beiden Flächen F_2 und F'_2 zweiten Grades, stets drei Cylinder zweiten Grades gelegt werden können, deren Erzeugenden zu den drei gemeinschaftlichen Achsen dieser beiden Flächen parallel sind.

Weil ferner die beiden Flächen zweiten Grades F_2 und F'_2, in Bezug auf ihren gemeinschaftlichen Mittelpunkt centrisch symmetrisch sind, folgt, dass jeder Durchmesser dieser beiden Flächen, welcher durch einen Punkt der Curve C^4 geht, auch noch einen zweiten, dem ersteren diametral entgegengesetzten Punkt dieser Curve enthält.

Alle diese Durchmesser bilden einen Kegel, welcher durch die Curve C^4 geht und dessen Scheitel der Mittelpunkt der beiden Flächen F_2 und F'_2 ist.

Jede Erzeugende dieses Kegels enthält zwei gegen den Scheitel (Mittelpunkt) symmetrisch gelegene Punkte der Curve C^4, welche gleichzeitig dessen Schnittpunkte mit der Fläche F_2 (oder mit der Fläche F'_2) darstellen.

Hieraus folgt, dass die Curve C^4 als der vollständige Durchschnitt der Fläche F_2 (oder der Fläche F'_2) mit dem genannten Kegel anzusehen ist, und dass mithin dieser Kegel, ebenso wie die vorher erwähnten drei durch die Curve C^4 gehenden Cylinder nothwendig vom zweiten Grade sein müsse.

§. 728.

Denken wir uns die beiden Flächen F_2 und F'_2 zweiten Grades sammt ihrer Durchschnittscurve vierter Ordnung, den drei die letztgenannte Curve projicierenden Cylindern und dem Kegel beliebig collinear transformiert, so übergehen diese Flächen wieder in zwei Flächen zweiten Grades, während die Durchschnittscurve C^4 der ersteren in die Durchschnittscurve der letzteren übergeht. Ferner werden die drei Cylinder und der Kegel zweiten Grades, welche die Curve C^4 enthalten, in vier Kegel zweiten Grades überführt, welche die collineartransformierte Curve C^4 enthalten.

Die ursprünglichen zwei Flächen hatten gemeinschaftliche Achsen; ferner repräsentierten der Mittelpunkt und die unendlich fernen Punkte der drei Achsen die Eckpunkte eines besonderen Polartetraeders beider Flächen.

Nachdem nun einerseits polare Eigenschaften durch Collineation nicht geändert werden und nachdem andererseits die Achsen parallel zu den Cylindererzeugenden waren, während der Mittelpunkt den Scheitel des durch C^4 gehenden Kegels darstellte, so ist klar, dass das oberwähnte besondere Polartetraeder durch die collineare Transformation in ein allgemeines gemeinschaftliches Polartetraeder der transformierten Flächen zweiten Grades übergehen wird und dass die Eckpunkte dieses Tetraeders gleichzeitig die Scheitel jener vier Kegel zweiten Grades repräsentieren werden, welche durch die Durchschnittscurve vierter Ordnung gelegt werden können.

Diesen Ergebnissen zufolge kann demnach jetzt schon das eine behauptet werden, dass, wenn zwei Flächen zweiten Grades ein gemeinschaftliches Polartetraeder besitzen, durch die Schnittcurve derselben, welche von der vierten Ordnung ist, stets vier Kegel zweiten Grades gelegt werden können, deren Scheitel die Eckpunkte des genannten Polartetraeders sind.

Es wird sich übrigens zeigen, dass diese Eigenschaft zwei beliebigen Flächen zweiten Grades überhaupt zukömmt, da nachgewiesen werden kann, dass zwei Flächen zweiten Grades stets ein gemein-

schaftliches Polartetraeder besitzen, welche Lage immer die besagten Flächen auch gegen einander haben mögen.

Dieser Beweis kann allenfalls in folgender Weise geführt werden.

Seien diesbezüglich F'_2 und F_2'' zwei beliebige Flächen zweiten Grades und g_1, g_2, g_3 drei beliebige Geraden im Raume, welche durch den nämlichen Punkt a gehen.

Die Polaren dieser drei Geraden in Bezug auf die Flächen F_2' und F_2'' seien beziehungsweise g_1', g_2', g_3' und g_1'', g_2'', g_3''.

Denken wir uns weiters, dass ein Punkt a_1 die Gerade g_1 durchlaufe; die Polarebenen desselben, in Bezug auf die beiden obbezeichneten Flächen drehen sich sodann um die Polaren g_1' und g_1'' dieser Geraden g_1, d. h. sie erzeugen zwei Ebenenbüschel, welche zur Reihe $a_1 \ldots$, also auch unter einander projectivisch sind. Entsprechende Ebenen dieser beiden Büschel, d. h. Ebenen, welche als Polarebenen desselben Punktes a_1 auf g_1 erscheinen, schneiden sich mithin in Geraden $l_1 \ldots$, welche ein windschiefes Hyperboloid erzeugen. Jede Erzeugende l_1 dieses Hyperboloides repräsentiert die Schnittgerade der beiden Polarebenen irgend eines Punktes a_1 von g_1. Nennen wir von diesen Erzeugenden jene, welche als Schnitt der beiden Polarebenen des Punktes a (gemeinschaftlichen Punkt der drei gewählten Geraden g_1, g_2 und g_3) auftritt, kurz l_a.

Ebenso entsprechen der Punktreihe $a_2 \ldots$ auf der Geraden g_2 die Erzeugenden $l_2 \ldots$ eines zweiten Hyperboloides, welches sich als Erzeugnis der beiden projectivischen Ebenenbüschel g_2' und g_2'' ergibt, die von den Polarebenen der Punkte $a_2 \ldots$ auf g_2 gebildet werden. Die vorgenannte Gerade l_a ist, da der Punkt a auch der Reihe $a_2 \ldots$ auf g_2 angehört, gleichzeitig eine Erzeugende dieses Hyperboloides.

Ferner entsprechen der Punktreihe $a_3 \ldots$ auf der dritten Geraden g_3 die Erzeugenden $l_3 \ldots$ eines Hyperboloides, welch letzteres sich als Erzeugnis jener beiden projectivischen Ebenenbüschel g_3' und g_3'' ergibt, die von den Polarebenen der Punkte $a_3 \ldots$ auf g_3 in Bezug auf die beiden gegebenen Flächen gebildet werden. Auch dieses Hyperboloid enthält die Gerade l_a.

Die drei so entstandenen Hyperboloide schneiden sich, da sie die Erzeugende l_a gemein haben, paarweise in drei Raumcurven dritter Ordnung, welche eine gewisse Zahl von Punkten gemein haben werden. Ist einer dieser Punkte, beispielsweise P_1, so gehen durch denselben drei Geraden l_1, l_2 und l_3, welche Erzeugenden der drei Hyperboloide sind. Diesen drei Geraden l_1, l_2, l_3 entsprechen beziehungsweise auf g_1, g_2 und g_3 die Punkte a_1, a_2 und a_3.

Der Entstehungsweise gemäß gehen durch die Geraden l_1, l_2 und l_3, also auch durch deren gemeinschaftlichen Punkt P_1, die Polarebenen der drei Punkte a_1, a_2 und a_3, sowohl in Bezug auf die Fläche F'_2, als auch in Bezug auf die Fläche F''_2.

Hieraus folgt (nach Satz 405, Band II), dass die durch die drei Punkte a_1, a_2 und a_3 gehende Ebene p_1, die Polarebene des Punktes P_1 sowohl in Bezug auf die Fläche F'_2, als auch in Bezug auf die Fläche F''_2 sei.

Ein Gleiches gilt von den übrigen Schnittpunkten der drei Raumcurven dritter Ordnung, deren Zahl, früheren Erörterungen gemäß, gleich vier sein muss. Diese vier Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 sind sodann die Eckpunkte des den beiden Flächen F'_2 und F''_2 gemeinschaftlichen Polartetraeders. Dies Ergebnis liefert somit die Sätze:

402. „*Zwei Flächen zweiten Grades besitzen bei jeder beliebigen gegenseitigen Lage ein gemeinschaftliches Polartetraeder.*"

Und:

403. „*Die Schnittcurve zweier Flächen zweiten Grades ist, bei allgemeiner Lage der letzteren, immer eine Curve vierter Ordnung, durch welche sich stets vier Kegel zweiten Grades legen lassen. Die Scheitel dieser vier Kegel sind die Eckpunkte des den beiden Flächen gemeinschaftlichen Polartetraeders.*"

Betrachten wir einen derartigen Kegel, so finden wir, dass, nachdem jede Erzeugende desselben zwei Punkte der Schnittcurve C^4 beider Flächen enthält, jede Tangentialebene desselben die besagte Curve in zwei Punkten berührt. Hiernach ist weiters unmittelbar zu entnehmen, dass die der Curve doppeltumschriebene Developpable, welche vorher (§. 726) als von der achten Classe gefunden wurde, durch die vier obgenannten Kegel repräsentiert werde.

§. 729.

Die Betrachtung des speciellen Falles, wenn die beiden Flächen zweiten Grades gemeinschaftliche Achsen, also auch gemeinschaftliche Mittelpunkte und gemeinschaftliche Hauptebenen besitzen, führt noch zu einem weiteren Resultate.

Da nämlich die Schnittcurve C^4 dieser beiden Flächen eine gegen die drei Hauptebenen sowohl, als auch gegen den Mittelpunkt der Flächen symmetrische Lage hat, so folgt einerseits, dass durch den Schnittpunkt einer Tangente der Curve C^4 mit einer der Hauptebenen noch eine zweite Tangente, d. i. die mit der ersteren gegen diese Hauptebene symmetrisch liegende, gehe, und andererseits, dass

die Tangenten der Curve C^4, deren Berührungspunkte in Bezug auf den gemeinschaftlichen Mittelpunkt der beiden Flächen symmetrisch liegen, untereinander paarweise parallel sind, oder mit anderen Worten, dass die developpable Tangentenfläche der Schnittcurve C^4 sowohl in jeder der drei gemeinschaftlichen Hauptebenen, als auch in der unendlich fernen Ebene eine Doppelcurve besitze.

In einer Hauptebene kann keine Tangente der Curve C^4 liegen. Denn, wäre dies denkbar, so müsste deren Berührungspunkt mit einem jener vier Punkte zusammenfallen, in welchen sich die in dieser Hauptebene liegenden Hauptkegelschnitte der beiden Flächen schneiden. In jedem dieser vier Punkte ist aber sowohl die Tangentialebene der einen, als auch jene der anderen Fläche auf der betreffenden Ebene senkrecht; es ist mithin auch die Schnittgerade dieser Tangentialebenen, d. i. die Tangente der Curve C^4 in dem bezeichneten Punkte zur Hauptebene senkrecht.

Nachdem keine Tangente der Curve C^4 in einer der Hauptebenen sich vorfinden kann, so wird umsoweniger die Tangente eines der Hauptebene nicht angehörenden Punktes der Curve C^4 in der Hauptebene liegen können.

Hieraus folgt somit, dass der Schnitt der developpablen Tangentenfläche der Curve C^4 mit einer der Hauptebenen, nur aus der in der letzteren liegenden Doppelcurve besteht, und dass mithin die letztgenannte Curve, weil der ebene Schnitt der Tangentendeveloppablen von der achten Ordnung ist (Satz 401), eine Curve vierter Ordnung sein müsse.

Das Gleiche gilt offenbar auch von den beiden anderen Hauptebenen und den in denselben liegenden Doppelcurven, sowie endlich auch, da die Schnittcurve C^4 keine Tangenten in unendlicher Entfernung besitzt, von der in der unendlich fernen Ebene liegenden Doppelcurve.

Die vier Doppelcurven vierter Ordnung in diesen Ebenen bilden demnach zusammen einen Ort der sechzehnten Ordnung, welcher Umstand, mit Rücksicht auf das früher gefundene Resultat $x = 16$ (§. 726) beweist, dass außer diesen vier Doppelcurven vierter Ordnung, die Tangentenfläche keine weitere Doppelcurve mehr besitze.

Transformieren wir collinear, so übergehen die Flächen zweiten Grades wieder in zwei Flächen zweiten Grades; die Schnittlinie und deren Tangentendeveloppable der ersteren Flächen übergehen bezie-

hungsweise in die Schnittcurve und deren Tangentendeveloppable der letzteren, während die drei Hauptebenen und die unendlich ferne Ebene in die vier Seitenebenen des den transformierten Flächen gemeinschaftlichen Polartetraeders überführt werden. Man erhält hiernach den Satz:

404. „Die developpable Tangentenfläche der Schnittcurve zweier Flächen zweiten Grades besitzt vier ebene Doppelcurven vierter Ordnung, welche in den vier Seitenebenen des den beiden Flächen gemeinschaftlichen Polartetraeders liegen.“

§. 730.

Denken wir uns eine Fläche zweiten Grades und eine mit ihr concentrische Kugel, so ist die Durchschnittscurve beider wieder eine Curve vierter Ordnung, welche gegen jede der drei Hauptebenen sowohl, als auch gegen den den beiden Flächen gemeinschaftlichen Mittelpunkt symmetrisch ist.

Besagte Curve ist demnach (Satz 403) gleichzeitig auch der Schnitt der Kugel mit einem Kegel, dessen Scheitel der Mittelpunkt der Kugel ist, oder mit anderen Worten: die vorbezeichnete Durchschnittscurve ist ein sphärischer Kegelschnitt.

Als Specialfall des Satzes 403) erhalten wir sonach den Satz:

405. „Die Schnittcurve einer Fläche zweiten Grades mit einer ihr concentrischen Kugel ist stets ein sphärischer Kegelschnitt.“

§. 731.

Denken wir uns weiters eine Raumcurve C^4 vierter Ordnung, als Schnitt zweier Flächen F'_2 und F''_2 zweiten Grades, und außerdem einen beliebigen Punkt p im Raume.

Durch p legen wir eine beliebige Ebene e, welche diese Raumcurve in den vier Punkten a, b, c und d schneiden wird. Die fünf Punkte p, a, b, c und d bestimmen somit eindeutig einen Kegelschnitt K.

Verändern wir stetig in irgend einer Weise die Lage der Ebene e, so wird hierbei der Kegelschnitt K eine Fläche erzeugen, welche selbstverständlich durch den Punkt p und durch die Curve C^4 geht. Es ist nun leicht zu zeigen, dass diese Fläche eine Fläche zweiten Grades sei.

Zum Zwecke dieses Nachweises wird es genügen, zu zeigen, dass diese Fläche mit der einen oder der anderen der beiden Flächen F'_2 und F''_2 außer der Curve C^4 keine weiteren Punkte gemein haben könne.

Setzen wir diesbezüglich voraus, es wäre s ein solcher Punkt, und legen wir durch s und durch p eine Ebene e, so wird diese die Fläche F'_2 in einem Kegelschnitte K' und die fragliche Fläche in einem Kegelschnitte K treffen. Diese beiden Kegelschnitte haben einerseits diejenigen vier Punkte a, b, c und d, in welchen die Ebene e die Raumcurve C^4 trifft, und andererseits den als beiden Flächen gemeinschaftlich vorausgesetzten Punkt s gemein; es müssten also die Kegelschnitte K und K' identisch sein.

Wäre dies wirklich der Fall, so müsste der Punkt p, da er auf dem Kegelschnitte K liegt, auch auf der Fläche F'_2 liegen, was, bei der allgemeinen Annahme desselben, von vornherein ausgeschlossen ist. Hieraus erhellt also, dass die fragliche Fläche mit der Fläche F'_2, außer der Curve C^4, keine Punkte gemein haben könne, dass dieselbe also nothwendig eine Fläche zweiten Grades sein müsse.

Wir sehen hiernach, dass durch die Schnittcurve zweier Flächen zweiten Grades unendlich viele derartige Flächen gelegt werden können, und dass weiters durch jeden beliebigen Punkt im Raume nur eine solche Fläche gehe, dass diese Flächen also Flächenbüschel (zweiten Grades) bilden. Dieses Ergebnis führt, im Vereine mit dem schon früher gefundenen Satze 403) zu der Eigenschaft:

406. „Durch die Durchschnittscurve vierter Ordnung, welche als Schnitt zweier Flächen zweiten Grades erhalten wird, gehen stets unendlich viele Flächen zweiten Grades, welche ein Flächenbüschel zweiten Grades bilden. Unter den Flächen dieses Büschels gibt es immer vier Kegelflächen.“

§. 732.

Sei C^4 wieder die Schnittcurve zweier Flächen zweiten Grades. Nehmen wir einen beliebigen Punkt P im Raume an, so lassen sich durch denselben stets zwei, aber auch nur zwei Geraden ziehen, von welchen jede derselben die Curve C^4 in zwei Punkten a_1, a_2 und b_1, b_2 schneidet. [Siehe Ergebnis (§. 726) $h = 2$.]

Suchen wir zu den drei Punkten P, a_1, a_2 den vierten harmonischen Punkt α, wobei a_1 und a_2 als conjugierte Punkte zu betrachten sind, bestimmen wir ferner ebenso den vierten harmonischen Punkt β zu P, b_1, b_2 (wobei b_1 und b_2 conjugiert sind), und ziehen wir endlich die Gerade $p = \alpha\beta$.

Denken wir uns nun eine beliebige Fläche F_2 zweiten Grades, in jenem Büschel, welches durch die Curve C^4 bestimmt ist, construiert, so ist einleuchtend, dass die Polarebene des Punktes P, in Bezug auf diese Fläche F_2, durch die Punkte α und β, also auch durch die

Gerade p gehen müsse. Dasselbe gilt offenbar auch von der Polarebene des Punktes P in Bezug auf jede andere Fläche des Flächenbüschels zweiten Grades.

Die Polarebenen des Punktes P in Bezug auf alle Flächen des Büschels bilden daher ein Ebenenbüschel, dessen Achse die Gerade p ist, welche nunmehr als Schnitt zweier solcher Polarebenen anstandslos construiert werden kann. Mithin ergibt sich der Satz:

407. „Die Polarebenen eines Punktes in Bezug auf alle Flächen eines Flächenbüschels zweiten Grades bilden ein Ebenenbüschel.“

§. 733.

Denken wir uns eine beliebige Gerade g im Raume, so entspricht jedem Punkte P derselben im vorgenannten Flächenbüschel, als Schnitt aller Polarebenen dieses Punktes P, eine Gerade p. Diese Gerade p wird sich als der Schnitt der Polarebenen π' und π'' des Punktes P, in Bezug auf irgend zwei Flächen F'_2 und F''_2 des Flächenbüschels, ergeben.

Durchläuft der Punkt P die Gerade g, so erzeugen (Satz 414, Band II) dessen Polarebenen π' und π'' zwei zu der Reihe $P\ldots$, also auch untereinander projectivische Ebenenbüschel, deren Achsen die Polaren g' und g'' von g in Bezug auf die Flächen F'_2 und F''_2 sind.

Die Schnittgeraden $p\ldots$. entsprechender Ebenen dieser beiden Büschel erzeugen daher ein Hyperboloid, welchem die Polaren g' und g'', als Erzeugende des zweiten Systems, angehören.

Das Hyperboloid bleibt, als Ort der Geraden p, dasselbe, von welchem Paare F'_2 und F''_2 von Flächen des Büschels man auch immer ausgehen mag.

Sind demnach F^{III}_2 und F^{IV}_2 zwei beliebige andere Flächen des Büschels, so werden die Geraden $p\ldots$ wieder das nämliche Hyperboloid erzeugen. Auf demselben werden sich sodann gleichfalls auch die Polaren g^{III} und g^{IV} der Geraden g in Bezug auf F^{III}_2 und F^{IV}_2 vorfinden.

Hieraus folgt aber, dass überhaupt alle Polaren $g', g''\ldots$ sämmtlicher Flächen F'_2, $F''_2\ldots$ des Büschels dem Hyperboloide, welches von den Geraden p gebildet wird, angehören, und dass dieselben die Erzeugenden des einen Systems, die Geraden p hingegen die Erzeugenden des zweiten Systems desselben repräsentieren.

Dieser Beweis kann allenfalls auch in folgender Form geführt werden.

Sei g die gegebene Gerade. Wählen wir auf derselben drei beliebige Punkte P_1, P_2, P_3. Die Polarebenen eines jeden dieser Punkte, in Bezug auf alle Flächen des Büschels schneiden sich in je einer Geraden p_1, p_2, p_3.

Bestimmen wir die Polare der Geraden g in Bezug auf eine beliebige Fläche des Büschels, so muss (Satz 405, Band II) diese Polare die Schnittgerade der Polarebenen der drei Punkte P_1, P_2, P_3, in Bezug auf diese Fläche des Büschels sein.

Nachdem aber diese Polarebenen durch die drei Geraden p_1, p_2 und p_3 gehen, so müssen diese letzteren von der gesuchten Polare geschnitten werden. Dies beweist aber, dass die Polaren der Geraden g, in Bezug auf alle Flächen des Büschels C^4, die drei Geraden p_1, p_2 und p_3 schneiden, also die Erzeugenden eines Hyperboloides darstellen müssen, dessen zweites System von Erzeugenden die Geraden p repräsentieren. Daher der Satz:

408. „Die Polaren einer Geraden in Bezug auf alle Flächen eines Flächenbüschels zweiten Grades sind die Erzeugenden eines und desselben Systems eines Hyperboloides. Die Erzeugenden des zweiten Systems sind jene Geraden, welche die Achsen der Ebenenbüschel repräsentieren, die von den Polarebenen der Punkte der gegebenen Geraden, in Bezug auf die Flächen des Büschels, erzeugt werden."

§. 734.

Es erübrigt noch, den geometrischen Ort der Pole einer Ebene in Bezug auf alle Flächen eines Flächenbüschels zu ermitteln.

Die gegebene Ebene sei Π. Nehmen wir in dieser Ebene zwei beliebige Geraden g_1 und g_2 an.

Die Polaren dieser Geraden, in Bezug auf alle Flächen des Büschels, gehören zwei windschiefen Hyperboloiden als Erzeugende an. Diese Hyperboloide haben eine Erzeugende p, d. i. die Achse jenes Ebenenbüschels gemein, welches von den Polarebenen des gemeinschaftlichen Punktes P von g_1 und g_2 in Bezug auf die Flächen des Systems gebildet wird; dieselben schneiden sich daher noch in einer Raumcurve dritter Ordnung.

Denken wir uns den Pol der Ebene Π, in Bezug auf irgend eine Fläche F_2 des Büschels, bestimmt. Besagter Pol muss (nach Satz 407, Band II) sowohl auf der Polare der Geraden g_1, als auch auf der

Polare der Geraden g_2 in Bezug auf diese Fläche F_2, also auf zwei Erzeugenden der beiden Hyperboloide liegen, was nur dann möglich ist, wenn derselbe der vorgenannten Raumcurve dritter Ordnung angehört. Diese letztere ist daher der geometrische Ort der Pole der Ebene Π, in Bezug auf alle Flächen des Büschels. Hieraus folgt der Satz:

409. „Die Pole einer beliebigen Ebene, in Bezug auf alle Flächen eines Büschels zweiten Grades, bilden eine Raumcurve dritter Ordnung.“

Speciell für die unendlich ferne Ebene folgt aus dem vorstehenden Satze:

410. „Die Mittelpunkte aller Flächen eines Flächenbüschels zweiten Grades bilden eine Raumcurve dritter Ordnung.“

§. 735.

Wir wissen, dass eine Raumcurve dritter Ordnung drei unendlich ferne Punkte besitze, welche alle reell sein können, von denen aber einer stets reell sein muss. Da aber eine Fläche zweiten Grades, welche einen unendlich fernen Mittelpunkt besitzt, ein Paraboloid ist, so folgt, auf Grund des eben bewiesenen Satzes der nachstehende:

411. „In einem Flächenbüschel zweiten Grades gibt es drei Paraboloide, welche alle reell sein können, deren eines aber stets reell sein muss.“

§. 736.

Wir haben nachgewiesen, dass zwei Flächen zweiten Grades stets ein gemeinschaftliches Polartetraeder entspreche, und dass die vier Ecken desselben die Scheitel von vier Kegeln zweiten Grades seien, welche durch die Schnittcurve C^4 dieser beiden Flächen gehen.

Es lässt sich leicht zeigen, dass dieses Tetraeder auch ein Polartetraeder für alle Flächen des durch diese zwei Flächen bestimmten Flächenbüschels zweiter Ordnung ist.

Ein Eckpunkt dieses Tetraeders sei P_1. Denken wir uns drei Erzeugende $P_1 a_1 a_2$, $P_1 b_1 b_2$ und $P_1 c_1 c_2$ jenes Kegels zweiten Grades construiert, welcher P_1 zum Scheitel hat und durch die Curve C^4 geht. Die drei Paare von Schnittpunkten der genannten drei Erzeugenden mit der Curve C^4 seien a_1, a_2; b_1, b_2 und c_1, c_2. Die bezeichneten Punkte gehören sämmtlichen Flächen des Flächenbüschels an, da alle Flächen durch die Curve C^4 gehen.

Bestimmt man daher zu P_1, a_1, a_2; P_1, b_1, b_2; P_1, c_1, c_2 die vierten harmonischen Punkte α, β, γ und legt man durch diese letzteren eine Ebene Π_1, so ist einleuchtend, dass dieselbe die Polarebene des Punktes P_1 in Bezug auf irgend eine beliebige dem Büschel angehörende Fläche, also überhaupt die Polarebene in Bezug auf alle Flächen des Büschels repräsentiere. Dasselbe gilt von den übrigen drei Eckpunkten des Tetraeders. Mithin besteht der Satz:

412. „Die sämmtlichen Flächen eines Flächenbüschels zweiten Grades besitzen ein gemeinschaftliches Polartetraeder. Die Eckpunkte dieses Polartetraeders sind die Scheitel jener vier Kegelflächen zweiten Grades, welche dem Flächenbüschel angehören.“

§. 737.

Seien P_1, P_2, P_3 und P_4 die Ecken des gemeinschaftlichen Polartetraeders der Flächen des Flächenbüschels zweiten Grades.

Denken wir uns dieses Flächenbüschel collinear transformiert, wobei wir die eine Ebene des Tetraeders, etwa die Ebene $P_2P_3P_4$, als Gegenebene und als Collineationscentrum C jenen Punkt wählen, welcher mit den in dieser Ebene liegenden drei Tetraedereckpunkten P_2, P_3, P_4 verbunden, drei auf einander senkrecht stehende Geraden ergibt, so entspricht collinear der Ebene $P_2P_3P_4$ die unendlich ferne Ebene und dem oberwähnten Flächenbüschel ein zweites Flächenbüschel, dessen Flächen denselben Mittelpunkt und die nämlichen Achsen besitzen.

Der Mittelpunkt ist nämlich der dem Punkte P_1 collinear entsprechende Punkt, während die Achsen der Büschel durch die den Geraden P_1P_2, P_1P_3 und P_1P_4 collinear entsprechenden Geraden repräsentiert erscheinen.

In gleicher Weise kann man auch jede andere Seitenebene des gemeinschaftlichen Polartetraeders als Gegenebene betrachten. Hiedurch kann das obgenannte Flächenbüschel auf vierfache Weise collinear in ein „centrisches“ verwandelt werden. Wir gelangen hiermit zu dem Satze:

413. „Jedes beliebige Flächenbüschel zweiten Grades kann collinear auf vierfache Weise in ein centrisches Flächenbüschel, d. i. in ein solches verwandelt werden, dessen sämmtliche Flächen dieselben Hauptachsen besitzen. Es genügt zu diesem Zwecke, die eine Ebene des gemeinschaftlichen Polartetraeders als Gegenebene und den Punkt, von welchem aus die Seiten des in dieser Ebene liegenden Polardreieckes unter rechten Winkeln erscheinen, als Collineationscentrum anzunehmen.“

§. 738.

Specielle Arten von Flächenbüscheln zweiten Grades sind jene, welche durch eine degenerierte Curve vierter Ordnung gehen.

Schneiden sich nämlich zwei Flächen zweiten Grades in zwei Kegelschnitten, so kann man durch die letzteren noch unendlich viele derartige Flächen legen. Durch jeden Punkt im Raume wird stets nur eine einzige solche Fläche gehen. Dieses Ergebnis kann durch nachstehenden Satz zum Ausdrucke gebracht werden:

414. „*Durch zwei auf einer Fläche zweiten Grades liegende Kegelschnitte kann man stets unendlich viele Flächen zweiten Grades legen, welche ein Flächenbüschel zweiten Grades bilden. In diesem Büschel gibt es zwei Kegelflächen zweiten Grades. Die Scheitel derselben sind zwei Eckpunkte des gemeinschaftlichen Polartetraeders. Die Ebenen, welche beziehungsweise durch diese Scheitel und die Schnittgerade der Ebenen jener Kegelschnitte gehen, sind zwei Seitenebenen des Polartetraeders.*“

Fallen die beiden Kegelschnitte unendlich nahe aneinander, so folgt unmittelbar der Satz:

415. „*Sämmtliche Flächen zweiten Grades, welche sich längs eines Kegelschnittes berühren, bilden ein Flächenbüschel zweiten Grades. Der diesen Flächen gemeinschaftlich umschriebene Kegel zweiten Grades gehört dem Büschel an. Der Scheitel des Kegels ist ein Eckpunkt des gemeinschaftlichen Polartetraeders; die Ebene des Berührungskegelschnittes ist die demselben conjugierte Seitenebene des Polartetraeders.*“

§. 739.

Als Folge der angestellten Betrachtungen gelangen wir hier nebstbei sehr einfach zu einem merkwürdigen Resultate.

Denken wir uns nämlich die Ebene Π_1 des Berührungskegelschnittes K und den Pol P_1 dieser Ebene, das ist den Scheitel jenes Kegels bestimmt, welcher sämmtlichen Flächen des Büschels längs des Kegelschnittes K umschrieben ist, und nehmen wir weiters in der Ebene Π_1 ein beliebiges Polardreieck des Kegelschnittes K an. Sind die Ecken desselben P_2, P_3 und P_4, so stellt $P_3 P_4$ die Polare von P_2 in Bezug auf den Kegelschnitt K dar.

Die Polarebene Π_2 des Punktes P_2 in Bezug auf irgend eine Fläche des Büschels, also auch in Bezug auf alle Flächen des Büschels muss (nach Satz 406, Band II) durch den Punkt P_1 und (infolge des

Satzes 407, Band II) durch die Polare $P_3 P_4$ gehen. Besagte Polarebene ist daher die Ebene der drei Punkte P_1, P_3, P_4.

In gleicher Weise findet man, dass P_3 der Pol der Ebene $P_1 P_2 P_4$ und P_4 der Pol der Ebene $P_1 P_2 P_3$ in Bezug auf alle Flächen des Büschels ist, oder mit anderen Worten, dass $P_1 P_2 P_3 P_4$ ein allen Flächen des Büschels gemeinschaftliches Polartetraeder repräsentiere.

Zu gleichem Resultate gelangt man auch, wenn irgend ein beliebiges anderes Polardreieck des Kegelschnittes K angenommen wird. Hiernach gilt der Satz:

416. „Das Flächenbüschel, welches von allen Flächen zweiten Grades gebildet wird, die einen und denselben Kegelschnitt berühren, besitzt unendlich viele Polartetraeder. Diese Polartetraeder haben den Scheitel des dem Büschel angehörenden Kegels zum gemeinschaftlichen Eckpunkt. Die übrigen drei Eckpunkte sind jedesmal Eckpunkte eines Polardreieckes des Berührungskegelschnittes.

XXXI. Capitel.

Die zwei Flächen zweiten Grades gemeinschaftlich umschriebene Developpable. Scharen von Flächen zweiten Grades. Confocale Flächen zweiten Grades.

§. 740.

Denken wir uns zwei beliebige Flächen F_2' und F_2'' zweiten Grades, sowie auch deren Schnittcurve C^4 polarreciprok transformiert, wobei wir eine beliebige dritte Fläche zweiten Grades, etwa eine Kugel, als Directrix der Reciprocität annehmen.

Hierbei verwandeln sich die Flächen F_2' und F_2'' in zwei andere Flächen zweiten Grades, die wir S_2' und S_2'' nennen wollen, während die Schnittcurve C^4 von F_2' und F_2'' in die den transformierten Flächen S_2' und S_2'' gemeinschaftlich umschriebene Developpable D_4 übergeht.

Bezüglich dieser Developpablen kann sofort eine Reihe von Sätzen aufgestellt werden, zu deren Rechtfertigung nicht erst eine besondere Beweisführung nothwendig sein wird, da diese bloß die den Sätzen „über die Schnittcurve zweier Flächen zweiten

Grades“ reciprok entsprechenden Sätze sind; es wird demnach genügen, diese Sätze kurz anzuführen, eventuell einigermaßen zu erläutern.

Zunächst ergibt sich, mit Rücksicht auf die Resultate der in §. 725) und 726) angestellten Betrachtungen der Satz:

417. „*Die zwei Flächen zweiten Grades gemeinschaftlich umschriebene Developpable ist von der vierten Classe und vom achten Range; die Cuspidalcurve derselben ist eine Raumcurve zwölfter Ordnung.*

Die Developpable besitzt eine Doppelcurve achter Ordnung. Dem ebenen Schnitt derselben kommen zwei Doppeltangenten zu. Die ihrer Rückkehrcurve doppelt umschriebene Developpable ist von der sechzehnten Classe, besitzt achtunddreißig scheinbare Doppelpunkte und sechzehn stationäre Punkte.“

§. 741.

Fasst man eine Fläche zweiten Grades als einen zwei-stufigen Ort von Punkten auf, so muss die ihr reciprok entsprechende Fläche zweiten Grades als Enveloppe eines zwei-stufigen Systems von Ebenen — der Polarebenen jenes Punktes aufgefasst werden.

Degeneriert die eine dieser Flächen in einen Kegel zweiten Grades, so artet die ihr polarreciprok entsprechende Fläche in einen ebenen Kegelschnitt aus.

Je nachdem man den Kegel als das Erzeugnis von Punkten, Geraden oder Tangentialebenen betrachtet, hat man den reciproken Kegelschnitt als das Erzeugnis von Tangentialebenen, Tangenten oder Punkten aufzufassen. Ferner entspricht dem Scheitel des Kegels reciprock die Ebene des Kegelschnittes.

Hierauf gestützt, erhält man, da polare Eigenschaften durch Reciprocität erhalten bleiben, den dem Satze 403) reciprok entsprechenden Satz:

418. „*Die Ebenen des gemeinschaftlichen Polartetraeders zweier Flächen zweiten Grades schneiden die diesen Flächen gemeinschaftlich umschriebene Developpable in vier Kegelschnitten, welche zusammen die Doppelcurve achter Ordnung dieser Developpablen repräsentieren.*“

Der letzte Theil dieses Satzes ist an und für sich evident, wenn man berücksichtigt, dass diese Kegelschnitte polarreciprok jenen vier Kegeln zweiten Grades entsprechen, welche durch die Schnittcurve

zweier Flächen zweiten Grades gehen, und dass diese Kegel die doppelt umschriebene Developpable der letztgenannten Schnittcurve sind.

§. 742.

Nachdem die gemeinschaftlich umschriebene Developpable zweier Flächen zweiten Grades der Schnittcurve zweier Flächen zweiten Grades entspricht, so werden den unendlich vielen Flächen eines Flächenbüschels zweiten Grades reciprok unendlich viele Flächen zweiten Grades entsprechen, welche sämmtlich einer und derselben Developpablen und zwar jener eingeschrieben sind, welche der Grundcurve, d. i. der gemeinsamen Curve aller Flächen des Büschels polarreciprok entspricht.

Jede Fläche ist diesfalls durch die Bedingung, „eine gegebene Ebene zu berühren", ein-deutig bestimmt, da die ihr reciproke Fläche durch die Angabe eines Punktes festgestellt ist.

Alle diese Flächen zusammen pflegt man eine Flächenschar zweiten Grades zu nennen.

Dies liefert den, dem Satze 406) reciproken Satz:

419. „Einer developpablen Fläche zweiten Grades, welche zwei Flächen zweiten Grades umschrieben ist, lassen sich noch unendlich viele derartige Flächen einschreiben, welche zusammen eine Flächenschar zweiten Grades bilden. In dieser Flächenschar gibt es insbesondere vier Kegelschnitte, deren Ebenen die Seitenebenen des den beiden ursprünglichen Flächen zweiten Grades gemeinschaftlichen Polartetraeders sind und welche degenerierte Flächen zweiten Grades repräsentieren."

§. 743.

Ferner entspricht dem Satze 407) reciprok der Satz:

420. „Die Pole einer Ebene in Bezug auf alle Flächen einer Flächenschar zweiten Grades liegen auf einer geraden Linie."

Ist die Ebene insbesondere die „unendlich ferne Ebene" so ergibt sich unmittelbar der Specialsatz:

421. „Der Ort der Mittelpunkte aller Flächen einer Flächenschar zweiten Grades ist eine gerade Linie."

Diese Gerade enthält sodann selbstverständlich auch die Mittelpunkte der vier Doppelkegelschnitte der umschriebenen Developpablen, da diese, wie früher gezeigt wurde, als degenerierte, der Developpablen eingeschriebene, also der Flächenschar angehörende

Flächen zweiten Grades zu betrachten sind. Es besteht daher der Satz:

422. „*Die Mittelpunkte der vier Doppelkegelschnitte einer Developpablen vierter Classe und achten Ranges liegen auf einer und derselben Geraden, welche auch die Mittelpunkte aller dieser Developpablen eingeschriebenen Flächen zweiten Grades enthält.*“

§. 744.

Da weiters jede gerade Linie einerseits einen reellen unendlich fernen Punkt besitzt und andererseits eine Fläche zweiten Grades mit einem unendlich fernen Mittelpunkte, wie bekannt, ein Paraboloid ist, so ergibt sich als unmittelbare Folge der beiden letzten Sätze der Satz:

423. „*Unter den Flächen einer Flächenschar zweiten Grades gibt es stets ein, aber auch nur ein reelles Paraboloid, dessen Achse zu der Geraden, welche die Mittelpunkte aller Flächen enthält, parallel ist.*“

Ebenso ergibt sich aus dem Satze 408) der reciproke Satz:

424. „*Die Polaren einer Geraden in Bezug auf alle Flächen einer Flächenschar zweiten Grades erzeugen ein windschiefes Hyperboloid*“;

und aus dem Satze 409) der folgende:

425. „*Die Polarebenen eines Punktes in Bezug auf alle Flächen einer Flächenschar zweiten Grades sind Schmiegungsebenen einer Raumcurve dritter Ordnung.*“

Endlich folgt aus dem Satze 412) der nachstehende:

426. „*Das Polartetraeder, welches zwei Flächen zweiten Grades gemeinschaftlich ist, stellt auch ein Polartetraeder für alle Flächen jener Flächenschar zweiten Grades dar, welche durch die beiden Flächen zweiten Grades bestimmt wird, oder mit anderen Worten, allen Flächen der erwähnten Schar ist ein gewisses Polartetraeder gemeinschaftlich.*“

§. 745.

Ebenso wie die Schnittcurve vierter Ordnung, von zwei Flächen zweiten Grades herrührend, in zwei Kegelschnitte degenerieren kann, so wird reciprok auch die zwei Flächen zweiten Grades gemeinschaftlich umschriebene Developpable in zwei diesen Flächen gemeinschaftlich umschriebene Kegel degenerieren können.

Sind also einer Fläche zweiten Grades zwei Kegel umschrieben, oder was, da sich dieselben in den beiden Schnittpunkten ihrer Berührungskegelschnitte berühren, gleichbedeutend ist, schneiden sich zwei Kegel zweiten Grades in zwei Kegelschnitten, so kann man denselben unendlich viele Flächen zweiten Grades einschreiben, welche eine besondere Flächenschar zweiten Grades repräsentieren.

Die beiden Kegelschnitte, welche die umschriebenen Kegel gemein haben, sind als zwei degenerierte Flächen der erwähnten Flächenschar zu betrachten.

Die Kegelschnittsebenen sind zwei Ebenen des der Schar gemeinschaftlichen Polartetraeders. Die denselben gegenüber liegenden Eckpunkte sind deren Schnittpunkte mit der Verbindungsgeraden der beiden Kegelscheitel. Fassen wir das Erörterte kurz zusammen, so erhalten wir den Satz:

427. „Schneiden sich zwei Kegel zweiten Grades in zwei Kegelschnitten, so kann man ihnen gemeinschaftlich unendlich viele Flächen zweiten Grades einschreiben, zu welchen, als degenerierte Flächen, auch die beiden Kegelschnitte gehören. Die Ebenen der letzteren sind zwei Seitenebenen des gemeinschaftlichen Polartetraeders. Die Schnittpunkte dieser Seitenebenen mit der Verbindungsgeraden der beiden Kegelscheitel repräsentieren zwei Eckpunkte dieses Tetraeders."

§. 746.

Fallen die beiden Kegel, also auch die beiden Kegelschnitte, welche diese letzteren gemein haben, zusammen, so wird die Flächenschar eine noch speciellere; dieselbe übergeht nämlich in jene, welche von allen Flächen zweiten Grades gebildet wird, die den Kegel längs jenes Kegelschnittes berühren. Der letztere selbst repräsentiert sodann eine degenerierte Fläche der Schar, während die Ebene desselben eine Ebene des Polartetraeders und der Kegelscheitel den gegenüber liegenden Eckpunkt dieses Tetraeders darstellt. Hiernach der Satz:

428. „Sämmtliche Flächen zweiten Grades, welche einen und denselben Kegel zweiten Grades längs eines und desselben Kegelschnittes berühren, bilden eine besondere Flächenschar zweiten Grades. Der gemeinschaftliche Berührungskegelschnitt repräsentiert sodann eine degenerierte Fläche der Schar. Die Ebene dieser degenerierten Fläche ist eine Seitenebene des gemeinschaftlichen Polartetraeders. Der Kegelscheitel ist der dieser Ebene gegenüber liegende Eckpunkt des Tetraeders."

§. 747.

Aus vorhergegangenen Betrachtungen erhellte, dass die Flächen zweiten Grades, welche sich längs eines Kegelschnittes berühren, ein besonderes Flächenbüschel zweiten Grades bilden.

Die eben hervorgehobene Eigenschaft ist das räumliche Analogon zu dem „ebenen System von Kegelschnitten“, welche zwei feste Geraden in zwei festen Punkten berühren, da man dieses System mit derselben Berechtigung als Kegelschnittsbüschel, wie als Kegelschnittsschar betrachten kann.

Wir haben weiters gefunden, dass die zwei Flächen zweiten Grades gemeinschaftlich umschriebene Developpable vier Doppelkegelschnitte besitze.

Dieselbe ist demnach identisch mit jener Developpablen, welche durch zwei beliebig im Raume gegebene Kegelschnitte bestimmt ist, oder mit anderen Worten: identisch mit der Enveloppe all jener Ebenen, welche diese beiden Kegelschnitte berühren.

Ferner haben wir, als die allgemeinen Eigenschaften dieser Developpablen untersucht wurden (§. 529—540, Band II) gezeigt, dass die beiden gegebenen Leitkegelschnitte Doppelcurven besagter Developpablen sind, und dass dieselbe noch zwei weitere Doppelkegelschnitte besitze.

Aus der Identität der dort behandelten Fläche mit der eben untersuchten Developpablen ergibt sich mit Rücksicht auf Satz 529, Band II) der folgende:

429. „Der developpablen Fläche, welche zwei Kegelschnitten (von allgemeiner gegenseitiger Lage) gemeinschaftlich umschrieben ist, können unendlich viele Flächen zweiten Grades eingeschrieben werden. Die Ebenen der beiden Leitkegelschnitte, sowie die Ebenen der sich weiterhin noch ergebenden zwei Doppelkegelschnitte der Developpablen bilden zusammen ein Tetraeder, welches ein gemeinschaftliches Polartetraeder für alle eingeschriebenen Flächen zweiten Grades repräsentiert.“

§. 748.

Confocale Flächen zweiten Grades.

Setzen wir nun insbesondere voraus, dass der eine der vier Doppelkegelschnitte der imaginäre unendlich ferne Kreis K_i sei.

In diesem Falle ist die unendlich ferne Ebene eine Seitenebene $P_2 P_3 P_4$ des gemeinschaftlichen Polartetraeders $P_1 P_2 P_3 P_4$ aller der Developpablen eingeschriebenen Flächen zweiten Grades, und der ihr gegenüber liegende Eckpunkt P_1, als Pol der unendlich fernen Ebene, der Mittelpunkt all dieser Flächen zweiten Grades.

Nachdem ferner das Dreieck $P_2 P_3 P_4$ in der unendlich fernen Ebene, welches von den drei übrigen Eckpunkten des Polartetraeders gebildet wird, ein Polardreieck in Bezug auf den in dieser Ebene liegenden Doppelkegelschnitt, im vorliegenden Falle also, in Bezug auf den imaginären Kreis K_i ist, so folgt (nach Satz 140), dass die drei Geraden $P_1 P_2$, $P_1 P_3$ und $P_1 P_4$ wechselseitig auf einander senkrecht stehen, dass also diesfalls alle der Developpablen eingeschriebenen Flächen zweiten Grades die nämlichen Hauptachsen besitzen. Hiernach ergibt sich der Satz:

430. „Ist einer der vier Doppelkegelschnitte einer Developpablen vierter Classe und achten Ranges der unendlich ferne imaginäre Kreis, so sind alle Flächen zweiten Grades, welche dieser Developpablen eingeschrieben werden können, concentrisch und besitzen dieselben Achsen.“

§. 749.

Der eben besprochenen, besonderen Flächenschar zweiten Grades kömmt überdies eine große Zahl wichtiger und interessanter Eigenschaften zu, von welchen wir die für unsere Zwecke wichtigsten hier näher erörtern wollen.

Hier wird in erster Linie zu berücksichtigen sein, dass der imaginäre, unendlich ferne Kreis, als Doppelcurve der Developpablen, eine der letzteren ebenfalls eingeschriebene (degenerierte) Fläche zweiten Grades darstelle.

Zufolge des Satzes 420) liegen die Pole einer beliebigen Ebene ε in Bezug auf alle Flächen zweiten Grades, welche der betreffenden Schar angehören auf einer Geraden. Das Gleiche gilt aber auch, nach der vorstehenden Bemerkung, von dem Pole dieser Ebene in Bezug auf den imaginären Kreis K_i.

Die eben genannte Gerade, auf welcher der besagte Pol liegt, ist daher der Ebene ε, in Bezug auf den Kreis K_i, conjugiert und muss daher (nach Satz 139) auf dieser Ebene E senkrecht stehen. Demnach gilt der Satz:

431. „Der Ort der Pole einer beliebigen Ebene in Bezug auf alle Flächen der in Rede stehenden Flächenschar zweiten Grades ist eine Gerade, welche auf der Ebene senkrecht steht.“

§. 750.

Sämmtliche Flächen der Schar besitzen, wie wir gesehen haben, dieselben Achsen und folglich auch die nämlichen Hauptebenen.

Nehmen wir daher eine beliebige, zu einer dieser Hauptebenen senkrechte Ebene E an, so werden die Pole dieser Ebene in Bezug auf alle Flächen der Schar in dieser Hauptebene liegen, und zwar, mit Rücksicht auf den eben bewiesenen Satz, in einer Geraden, welche auf der Ebene E, also auch auf deren Schnittgeraden e mit der Hauptebene senkrecht steht.

Die Hauptebene schneidet sämmtliche Flächen der Schar in deren Hauptschnitten.

Die Polare irgend eines Punktes der Hauptebene, in Bezug auf einen solchen Hauptschnitt, ist (nach Satz 399, Band II) der Schnitt der letzteren mit der Polarebene des Punktes in Bezug auf die durch diesen Hauptschnitt gehende Fläche zweiten Grades. Diese Betrachtung führt zu dem Satz:

432. „Die Pole einer Geraden in einer Hauptebene, in Bezug auf die in dieser Ebene liegenden Hauptschnitte aller Flächen der Schar, liegen in einer zu dieser Geraden senkrechten Geraden.“

§. 751.

Aus dem eben angeführten Satze kann ohne jedwede Schwierigkeit eine charakteristische Eigenschaft der in Rede stehenden Flächenschar zweiten Grades abgeleitet werden.

Die in einer der Hauptebenen liegenden Hauptschnitte der Flächenschar seien H_1, H_2, H_3.... Diesen Hauptschnitten entsprechen, da (nach Satz 430) die sämmtlichen Flächen concentrisch sind und dieselben Achsen besitzen, ein gemeinschaftlicher Mittelpunkt M und die gemeinsamen Achsen X und Y.

Eine beliebige Gerade in der genannten Ebene sei p; deren Pole in Bezug auf die Hauptschnitte H_1, H_2, H_3... seien P_1, P_2, P_3.... Nach dem vorher bewiesenen Satze liegen diese Pole sämmtlich in einer zur Geraden p senkrechten Geraden r. Diese Gerade r möge die eine der Hauptachsen, etwa X, in dem Punkte F treffen.

Wir wissen, dass die Senkrechte von einem Punkte auf dessen Polare, in Bezug auf einen Kegelschnitt, die Brennpunktachse in dem Brennpunkte dieses Kegelschnittes trifft.

Im vorliegenden Falle ist r die Senkrechte von P_1 auf die Polare p in Bezug auf den Kegelschnitt H_1, und ebenso auch die Senk-

rechte von dem Punkte P_2 auf dessen Polare p, in Bezug auf den Kegelschnitt H_2 u. s. w.; es wird demnach der Punkt F, in welchem die Gerade r die gemeinschaftliche Achse X trifft, ein gemeinschaftlicher Brennpunkt für alle Hauptschnitte H_1, H_2, H_3... sein. Nachdem diese Hauptschnitte gleichzeitig concentrisch sind, so ist all denselben auch der zweite Brennpunkt gemeinschaftlich.

Ein Gleiches gilt bezüglich aller drei Systeme von Hauptschnitten.

Wir erhalten daher den für die zu untersuchende Flächenschar charakteristischen Satz:

433. „Jedes System von Hauptschnitten einer Flächenschar zweiten Grades, welcher Schar selbstverständlich auch der imaginäre Kreis im Unendlichen als (degenerierte) Fläche angehört, besitzt dieselben Brennpunkte, repräsentiert also ein System confocaler Kegelschnitte."

§. 752.

Die bezeichnete Schar von Flächen zweiten Grades wird daher eine „Schar confocaler Flächen zweiten Grades" genannt.

Die Doppelkegelschnitte der gemeinschaftlich umschriebenen Developpablen, welche diesfalls in den drei Hauptebenen liegen und von welchen einer imaginär ist (die Doppelkegelschnitte können offenbar nur paarweise imaginär werden) pflegt man die „Focalcurven" oder „Focalkegelschnitte" dieser Flächenschar sowohl, als auch die ihrer einzelnen Flächen zu nennen.

Jede dieser Focalcurven ist mit den in der nämlichen Hauptebene, der die besagte Curve angehört, liegenden Kegelschnitten (Hauptschnitten) confocal, da dieselbe gleichzeitig als degenerierte Fläche der Schar und mithin auch als ihr eigener Hauptschnitt zu betrachten ist.

Die Scheitel der Focalcurven sind leicht zu bestimmen.

Seien nämlich P_1 und P_2 zwei Hauptebenen der Schar confocaler Flächen und X die Achse dieser Schar, in welcher sie sich schneiden.

Die Brennpunkte der Schar von confocalen Hauptschnitten in der Ebene P_1, also auch die Brennpunkte der in P_1 liegenden Focalcurve Φ_1 seien $F_1{}^1$ und $F_2{}^1$, während die Brennpunkte der confocalen Schar in der Ebene P_2 und folglich auch die der Focalcurve Φ_2 in der nämlichen Ebene durch $F_1{}^2$ und $F_2{}^2$ dargestellt werden. Weiters wollen wir voraussetzen, dass die vier Brennpunkte $F_1{}^1$, $F_2{}^1$; $F_1{}^2$, $F_2{}^2$ auf

der Achse X liegen. Um diesbezüglich die Vorstellung dessen, was hier angedeutet wurde, zu unterstützen, braucht man nur anzunehmen, dass X die längste Achse eines der vorerwähnten Schar angehörenden Ellipsoides repräsentiere.

Die Scheitel des Focalkegelschnittes Φ_1 in der Ebene P_1 liegen auf der Achse X.

Denken wir uns in einem dieser Scheitel, den wir vorderhand S_1 nennen, die Scheiteltangente t_1 gezogen, so ist diese offenbar die Polare des Scheitels S_1 in Bezug auf den Focalkegelschnitt Φ_1 und daher die durch dieselbe gehende, zur Achse X senkrechte Ebene σ, die Polarebene des Scheitels S_1 in Bezug auf den Kegelschnitt Φ_1, wenn dieser als Fläche der confocalen Schar aufgefasst wird.

Die vorbezeichnete Ebene σ steht aber auch auf der Ebene P_2 senkrecht und schneidet dieselbe in einer durch S_1 gehenden zu X senkrechten Geraden t_2.

Berücksichtigt man nun den Satz 420), so wird man finden, dass X der Ort der Pole von t_2 in Bezug auf alle in der Ebene P_2 liegenden Hauptschnitte sei. Infolge dessen ist der Punkt S_1, in welchem t_2 von X getroffen wird, identisch mit dem Brennpunkte F_1^2 (oder F_2^2) der in P_2 liegenden Hauptschnitte, also auch des Focalkegelschnittes Φ_2. Hiernach ergibt sich der Satz:

434. „Die Focalcurve in einer Hauptebene ist confocal mit den in dieser Hauptebene liegenden Hauptschnitten und die Scheitel derselben sind die Brennpunkte der beiden anderen Focalcurven."

§. 753.

Mit Zugrundelegung des Satzes 425) können wir als bekannt voraussetzen, dass die Polarebenen eines Punktes P im Raume, in Bezug auf alle Flächen einer Flächenschar zweiten Grades, also auch in Bezug auf eine Schar confocaler Flächen, eine Developpable dritter Classe umhüllen.

Durch den Punkt P im Raume selbst gehen drei Tangentialebenen dieser Developpablen. Diese Ebenen sind, wie an und für sich klar, auch die Polarebenen des Punktes P in Bezug auf drei gewisse Flächen der vorerwähnten Schar. Da besagte Ebenen den Pol P selbst enthalten, so gehen diese drei Flächen durch P und werden daselbst von den genannten drei Ebenen berührt.

Hieraus ist zu ersehen, dass durch einen Punkt P im Raume stets drei Flächen F_1, F_2, F_3 einer confocalen Schar gehen.

Seien T_1, T_2 und T_3 die Berührungsebenen derselben im Punkte P, oder mit anderen Worten, die Polarebenen des Punktes P in Bezug auf diese drei Flächen und führen wir durch P eine Gerade g_1 senkrecht zur Ebene T_1, so enthält diese (nach Satz 431) die Pole der Ebene in Bezug auf alle Flächen der Schar, also auch in Bezug auf die Flächen F_2 und F_3.

Da aber diese Pole (nach Satz 407, Band II) auch in den Ebenen T_2 und T_3 liegen müssen, aber selbstverständlich von P verschieden sind, so folgt, dass die beiden Ebenen T_2 und T_3 die Gerade g_1 enthalten, also auf T_1 senkrecht stehen.

In gleicher Weise findet man auch, dass T_2 normal zu T_1 und T_3 stehe, oder kurz, dass die drei Ebenen T_1, T_2 und T_3 wechselseitig auf einander senkrecht seien, dass sich mithin die, diese Ebenen in P tangierenden Flächen F_1, F_2 und F_3 in dem Punkte P rechtwinklig durchschneiden. Diese Ergebnisse zusammengefasst, erhält man den Satz:

435. „Durch jeden Punkt im Raume gehen drei Flächen einer confocalen Schar, welche sich in demselben rechtwinklig durchschneiden."

§. 754.

Denken wir uns der einen von den drei Flächen, längs ihres Durchschnittes mit der zweiten, eine Developpable umschrieben, so enthält dieselbe die Normalen der letzteren.

Hieraus erkennt man aber sofort, dass die so erhaltenen Schnittcurven „Krümmungslinien" der Flächen zweiten Grades sind, d. h. Curven darstellen, längs welcher die Normalen der Fläche eine Developpable erzeugen. Mithin folgt der Satz:

436. „Die Krümmungslinien einer Fläche zweiten Grades sind die beiden Scharen zu einander rechtwinkliger Schnittcurven (vierter Ordnung) dieser Fläche mit der Schar der ihr confocalen Fläche zweiten Grades."

§. 755.

Construction der Durchschnittscurve zweier Flächen zweiten Grades.

Sind die beiden zum Schnitte gebrachten Flächen zweiten Grades Kegelflächen, so ist, wie bereits bekannt, die Construction ihrer Schnittcurve höchst einfach durchzuführen, da man direct vermittelst der durch die beiden (im Endlichen oder Unendlichen liegenden) Kegelscheitel gehenden Hilfsebenen die Schnittpunkte einzelner Erzeugenden unter einander, ohne jedwede Schwierigkeit, festzustellen ver-

mag. Wenn auch nicht compliciert, so doch weniger einfach gestaltet sich die Construction der Durchschnittscurve dann, wenn bloß eine oder gar keine der sich schneidenden Flächen eine Kegelfläche ist.

Hätte man beispielsweise den Durchschnitt eines Kegels zweiten Grades mit einer Kugel zu construieren, so kann man zweckmäßig entweder Hilfsebenen benützen, welche durch den Scheitel des Kegels und nebstbei durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, oder auch von Ebenen Gebrauch machen, welche durch den Kegelscheitel gelegt, gleichzeitig auf einer Projectionsebene senkrecht stehen. In beiden Fällen werden die betreffenden Hilfsebenen die Kugel nach Kreisen, den Kegel dagegen in Erzeugenden schneiden, deren jeweilige Schnittpunkte der gesuchten Schnittcurve angehören.

Einfacher jedoch führt nachstehender Vorgang zu gleichem Ziele. Man ermittelt eine Kreisebene des Kegels und schneidet beide Flächen, die Kugel sowohl, als auch den Kegel mit Ebenen, welche dieser Kreisebene parallel sind. Die Hilfsschnitte sind sodann beiderseits Kreise, welche im gegenseitigen Schnitte Punkte der gesuchten Schnittcurve ergeben.

Vortheilhaft wird es diesfalls sein, von der Transformation der Projectionsebenen Gebrauch zu machen, indem man hierbei so transformiert, dass die genannten Hilfsebenen zu einer der Projectionsebenen parallel werden, die Hilfskreise somit in ihrer wahren Gestalt erscheinen.

Ist die eine Fläche irgend eine Rotationsfläche, die andere dagegen eine Kugel, so wird es zweckdienlich erscheinen, die Hilfsebenen so zu wählen, dass dieselben zu der Rotationsachse der erstgenannten Fläche senkrecht stehen, da sich in diesem Falle die Hilfsschnitte gleichfalls beiderseits als Kreise ergeben und darstellen werden.

Sind beide Flächen Rotationsflächen mit parallelen Achsen, so behält das eben angedeutete Verfahren seine volle Giltigkeit.

Für Rotationsflächen, deren Achsen sich schneiden, werden wir an späterer Stelle eine überhaupt auf alle Arten von Rotationsflächen anwendbare, für die Schnittbestimmung derartiger Flächen gemeinsame Methode kennen lernen.

Ist die eine Fläche eine Kugel, die andere hingegen eine allgemeine Fläche zweiten Grades, so wird man natürlicherweise als Hilfsflächen, resp. Hilfsebenen, zweckmäßig die Kreisschnittsebenen der letzteren wählen, indem dadurch wieder erreicht wird, dass die Hilfsschnitte in beiden Flächen Kreise sind.

Hierbei wird man behufs Vereinfachung der Construction wieder transformieren und diese Transformation so vollführen, dass die erwähnten Hilfsebenen zu einer der beiden Projectionsebenen parallel werden.

Was den allgemeinsten Fall, d. i. die Bestimmung des Schnittes zweier allgemeinen Flächen bei beliebiger gegenseitiger Lage anbelangt, so sieht man sofort ein, dass es keine Hilfsebenen gäbe, welche beide Flächen in gleich leicht construierbaren Curven schneiden, da infolge der allgemeinen Lage die Kreisschnittsebenen der einen Fläche nicht auch gleichzeitig Kreisschnittsebenen der anderen Flächen sein werden.

Besagte Schnittbestimmung lässt sich jedoch anstandslos auf die vorher erörterten vereinfachten Constructionen reducieren, nachdem wir ohneweiters die eine der gegebenen Flächen, falls dieselbe ein Ellipsoid ist, durch affine Transformation in eine Kugel (Satz 387, §. 643) verwandeln können. Hierbei übergeht die zweite Fläche selbstverständlich wieder in irgend eine Fläche zweiten Grades. Man bestimmt sodann die Durchschnittscurve der letzteren durch Zuhilfenahme ihrer Kreisschnittsebenen mit der Kugel und transformiert die Schnittcurve beider affin zurück.

Offenbar kann aber der Schnitt der beiden Flächen auch in der Weise bestimmt werden, dass man die nach vorausgeschickten Betrachtungen (§. 728) entwickelten Operationen thatsächlich constructiv durchführt, dass man also zwei von den vier Kegeln zweiten Grades, welche durch die Schnittcurve gehen, wirklich construiert. Dabei wird man selbstverständlich den drei Geraden g_1, g_2 und g_3, als auch ihrem gemeinschaftlichem Punkte a, stets solche Lagen zu geben bemüht sein, welche der Construction möglichst förderlich sind und zu deren Vereinfachung beitragen.

Um keine der üblichen Projectionsarten zu übergehen, sei schließlich auch noch der bereits früher (Capitel XIV, §. 230) angeführten stereographischen Projectionsmethode in aller Kürze Erwähnung gethan und durch bloße Schlagworte das Eigenthümliche derselben angedeutet.

XXXII. Capitel.

Die stereographische Projection, ihre Verallgemeinerung für Flächen zweiten Grades und ihre specielle Anwendung als Kartenprojection.

§. 756.

Denkt man sich einen Punkt einer Kugeloberfläche als Scheitel eines projicierenden Strahlenbündels, so können durch letzteres sämmtliche Punkte der Kugeloberfläche auf eine beliebig gewählte Ebene eindeutig bezogen, die Kugelfläche also auf dieser Ebene „als Bildebene“ abgebildet werden. Wählt man diese Bildebene parallel zur Tangentialebene der Kugel in dem obgenannten Projectionscentrum, so entsteht die „stereographische Projection“ im engeren Sinne des Wortes.

Wie bereits an anderer Stelle (§. 230) kurz bemerkt wurde, ist diese Projectionsart identisch mit der inversen Transformation einer Kugel und der auf ihr liegenden Gebilde in eine Ebene.

Dies im Auge behaltend, ergeben sich sofort die beiden Fundamentaleigenschaften dieser Abbildungsmethode, indem sie im Grunde genommen nur als veränderte Form der dort abgeleiteten Sätze, in nachstehendem Gewande auftreten:

437. „*Alle Kreise der Kugeloberfläche erscheinen in der Abbildung wieder als Kreise. Der Mittelpunkt des Kreisbildes ist die Projection der Spitze jenes Kegels, welcher der Kugel längs des Originalkreises umschrieben werden kann.*“

Und:

438. „*Der Winkel, welchen zwei auf der Kugelfläche liegende Curven mit einander einschließen, wird durch die stereographische Projection nicht geändert, d. h. das auf der Kugel liegende Original und seine stereographische Projection sind in ihren kleinsten Theilen einander ähnlich; die Abbildung ist daher eine conforme.*“

§. 757.

Es soll nun untersucht werden, inwieweit sich die Eigenschaften der stereographischen Projection auf allgemeine Flächen zweiter Ordnung ausdehnen lassen.

Denkt man sich wieder einen Punkt einer Fläche zweiter Ordnung als Scheitel eines projicierenden Bündels, so kann durch dieses, da jeder Strahl außer dem Projectionscentrum nur noch einen einzigen

Punkt der Fläche enthalten kann, die Fläche wieder auf eine beliebig gewählte Ebene ein-deutig bezogen werden.

So wie sich in der stereographischen Projection der Kugel bei einer gewissen Stellung der Bildebene sämmtliche Kugelkreise wieder in Kreisen, also in unter sich ähnlichen Kegelschnitten abbilden, so wird sich auch im Laufe der Entwicklung zeigen, dass es bei der entsprechenden Projection allgemeiner Flächen zweiter Ordnung eine Stellung der Bildebene gibt, für welche alle auf der Fläche liegenden ebenen Curven in unter sich ähnlichen Kegelschnitten abgebildet erscheinen.

Diese besondere Stellung der Bildebene ist, wie bei der Kugel, die der tangierenden Ebene im Projectionscentrum, und die Kegelschnitte, als welche sich sodann die ebenen Curven der Fläche abbilden, sind sämmtlich den Schnitten der Fläche mit den zur Bildebene parallelen Ebenen, also auch untereinander ähnlich.

Schon durch die affine Transformation der für eine Kugel construierten stereographischen Projection ließen sich gewisse Schlüsse für diese Verallgemeinerung ziehen. Da man aber durch affine Transformation der Kugel bloß das dreiachsige Ellipsoid erhalten kann, so soll, als für alle Flächen zweiter Ordnung giltig, die allgemeine Ableitung der in Rede stehenden Eigenschaft gegeben werden. Hierzu dient der Satz 448, Band II), welcher lautet:

„*Wenn zwei Flächen zweiter Ordnung eine Curve zweiter Ordnung gemein haben, so ist der Rest des Schnittes ebenfalls eine Curve zweiter Ordnung.*“

§. 758.

Denken wir uns einen ebenen Schnitt s (Taf. XXXXII, Fig. 290) einer Fläche zweiter Ordnung von einem Punkte C der Fläche als Centrum projiciert, so liegt der vorerwähnte Fall des Schnittes zweier Flächen zweiter Ordnung — der Fläche F und des Kegels (C,s) — vor. Beide Flächen haben den ebenen Schnitt s mit einander gemein, der Rest des Schnittes muss daher wieder eine ebene Curve sein.

In dem betrachteten Falle übergeht die letztgenannte Curve in den Punkt C, die Ebene derselben in die Tangentialebene t der Fläche, die Curve selbst dagegen in die Indicatrix des Punktes C, d. i. in den unendlich kleinen Schnitt C' der Fläche mit der Ebene t.

Aus dem Satze, dass die Schnitte paralleler Ebenen mit Flächen zweiter Ordnung ähnliche Kegelschnitte sind, folgt, dass, wenn man die Fläche F und den Kegel (C, s) mit einer zur Tangentialebene in

C parallelen Ebene B_e zum Schnitte bringt, beide Schnitte ähnlich und ähnlich gelegen sein müssen.

Wählen wir nun als Bildebene eine zur Tangentialebene t parallele Ebene B_e, so wird durch dieselbe der die Curve s projicierende, sowie überhaupt jeder, irgend eine ebene Curve der Fläche von C aus, als Projectionscentrum, projicierende Kegel in einer zu der vorher genannten Curve C' ähnlichen und ähnlich gelegenen Curve geschnitten. Die so erhaltenen Bilder sämmtlicher ebenen Curven der Fläche sind mithin untereinander ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte und hängt die Gestalt derselben bloß von jener der unendlich kleinen Curve C', also von der Wahl des Projectionscentrums auf der Fläche ab.

Der Mittelpunkt eines solchen Bildes ist auch hier die Projection der Spitze desjenigen Kegels, welcher der Fläche längs der Originalcurve umschrieben erscheint.

Der diesbezügliche Beweis lässt sich auf folgende Weise sehr einfach herstellen.

Der Scheitel M (Taf. XXXXII, Fig. 291) des der Fläche längs der Curve s umschriebenen Kegels ist gleichzeitig der Pol der Ebene E dieser Curve (Satz 401, Band II); das Projectionscentrum C dagegen ist (nach Satz 418, Band II) der Pol der ihm entsprechenden Tangentialebene t. Der Schnitt P der beiden Ebenen E und t ist daher die Polare der Verbindungsgeraden CM. Mit Zugrundelegung des Satzes 413, Band II) repräsentiert sodann der Schnittpunkt R von E mit MC den Pol von P in Bezug auf die Curve s. Hieraus folgt aber unmittelbar, dass CR oder CM der der Ebene t conjugierte Durchmesser derjenigen Kegelfläche sei, welche s zur Leitlinie besitzt, und dass mithin weiters jede zu t parallele Ebene, also auch B_e den Kegel in einer Curve s' schneiden müsse, deren Mittelpunkt M' der Schnittpunkt von CM mit B_e ist.

Hieraus ist zu ersehen, dass sich die erst angeführte Eigenschaft der stereographischen Projection in allen ihren Consequenzen für allgemeine Flächen zweiter Ordnung verfolgen lasse.

Was die zweit angeführte Eigenschaft der stereographischen Projection — die der Gleichheit der Winkel zwischen Bild und Original — anbelangt, so lässt sich dieselbe nicht verallgemeinern. Letzteres wird unmittelbar klar, sobald man die stereographische Projection einer Kugel affin transformiert, wobei sich bekanntlich einander gleiche Winkel nur bei besonderer Lage wieder in gleiche Winkel verwandeln.

§. 759.

Verfolgen wir jedoch die Consequenzen der erst angeführten Eigenschaft für die stereographische Projection allgemeiner Flächen zweiter Ordnung.

Wie wir gesehen haben, hängt die Gestalt der stereographischen Bilder ebener Curven nur von der Indicatrix der Fläche im Projectionscentrum, d. i. von dem unendlich kleinen Schnitte der Fläche mit der Tangentialebene im Centrum ab. Für Flächen zweiter Ordnung mit elliptischen Punkten, d. i. für das Ellipsoid, das elliptische Paraboloid und das zweischalige oder zweimantelige Hyperboloid, sind daher die stereographischen Bilder ebener Curven der Fläche sämmtlich Ellipsen und sind diese der Indicatrix oder dem zur Indicatrix parallelen Diametralabschnitte — folglich auch untereinander — ähnlich.

Je nach der Wahl des Projectionscentrums auf der Fläche wird sich die Excentricität dieser Bildellipse ändern. Für das dreiachsige Ellipsoid wird beispielsweise die Excentricität dieser Ellipsen am größten, wenn das Projectionscentrum in einem der Endpunkte des mittleren Hauptdurchmessers angenommen wird.

Wird dagegen das Projectionscentrum C in einem der Nabelpunkte N (Taf. XXXXII, Fig. 292), deren es auf jeder Fläche zweiten Grades mit elliptischen Punkten gibt, angenommen, so projicieren sich, weil die Indicatrix des Nabelpunktes ein Kreis ist, die sämmtlichen ebenen Curven der Fläche in Kreisen.

Solcher Nabelpunkte gibt es für das Ellipsoid und das zweischalige Hyperboloid vier, für das elliptische Paraboloid zwei. Dieselben liegen auf dem Hauptschnitte des kleinsten Parameters symmetrisch. Hierbei ist die Abscisse x des Nabelpunktes N ausgedrückt durch

$$\frac{x}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}.$$

Sind diese Flächen Rotationsflächen, so vereinigen sich je zwei dieser Nabelpunkte in den Endpunkten der Rotationsachse. (Siehe Satz 368 und §. 386).

Für die Kugel dagegen ist jeder Punkt ein Nabelpunkt. Hieraus ist gleichzeitig zu entnehmen, dass sich die Eigenthümlichkeiten der stereographischen Projection einer Kugel als Specialfälle aus diesen allgemeinen Betrachtungen anstandslos ergeben.

§. 760.

Jener Fall der stereographischen Projection, in welchem das Projectionscentrum mit einem Nabelpunkte zusammen-

fällt, verdient besonders hervorgehoben zu werden; einerseits, weil er für die Kugel Anwendung findet, anderseits aber, weil sich auf diese Art am leichtesten und genauesten ein auf der Fläche aus ebenen Curven gebildetes Netz auf die Bildebene projicieren lässt und weiters, weil sich diesfalls Punkte der Fläche mit beliebiger Genauigkeit in dasselbe eintragen lassen.

Zur Bildung dieses Netzes auf der Fläche werden zwei Systeme ebener Curven angenommen, die in zwei Ebenenbüscheln liegen. Gewöhnlich wird als Achse eines dieser Ebenenbüschel ein Durchmesser der Fläche, als Achse des andern Büschels dagegen die Polare dieses Durchmessers in Bezug auf die Fläche angenommen. Das erste dieser Systeme ist sodann ein System von Diametralschnitten, das zweite ein System von zum entsprechenden Diameter conjugierten Parallelschnitten (Meridiane und Parallelkreise bei der Kugel).

Auf der Bildebene erscheint dieses Netz in zwei Kreisbüscheln projiciert, deren Potenzgeraden die bezüglichen Centralprojectionen der Achsen der erwähnten Ebenenbüschel sind.

Die Flächen zweiter Ordnung mit hyperbolischen Punkten, (das hyperbolische Paraboloid und das windschiefe Hyperboloid) besitzen keine Nabelpunkte; die Indicatrix besteht dann aus den zwei geraden Erzeugenden der Fläche, welche durch das Projectionscentrum gehen. Die stereographischen Bilder ebener Curven werden also in diesem Falle ähnliche Hyperbeln — Hyperbeln mit constanter Asymptotenrichtung — werden. Besagte constante Asymptotenrichtung ist die Richtung der beiden Erzeugenden der Fläche, welche durch das Projectionscentrum führen. Diese Bildhyperbeln müssen jedoch nicht immer in demselben Scheitelraum der Asymptoten liegen, sondern können auch conjugierte Hyperbeln als Bilder auftreten.

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass für Flächen zweiter Ordnung mit parabolischen Punkten, also für Kegelflächen, die stereographische Projection ebener Curven, weil die Indicatrix parabolisch ist, Parabeln sein werden. Letzteres ist übrigens von vornherein klar, da die Bildebene in diesem Falle zu einer Erzeugenden des projicierenden Kegels parallel ist, der Schnitt daher eine Parabel sein muss. Alle Parabeln aber sind ähnliche Figuren. Auch der Satz bezüglich des Mittelpunktes M (Taf. XXXXII, Fig. 293) des stereographischen Bildes erweist sich hier unmittelbar als richtig; derselbe fällt nämlich in unendliche Entfernung.

§. 761.

Anwendung der stereographischen Projection auf die Abbildung der Erdoberfläche. Die Kartenprojection.

Wie allgemein bekannt, kann mit Außerachtlassung eines für gewöhnliche Verhältnisse äußerst geringen Fehlers die Erde als vollkommene Kugelfläche aufgefasst und unter diesem Gesichtspunkte das die Erdoberfläche überspannende Netz der Meridiane und Parallelkreise leicht dargestellt werden. Mit Benützung der entwickelten Eigenschaften ist dieses Netz in der Abbildung leicht zu construieren. Die Meridiane und Parallelkreise werden sich in zwei Kreisbüscheln projicieren.

Infolge der Eigenschaft der Winkelgleichheit zwischen Original und Bild wird auch im Bilde jeder Parallelkreis die sämmtlichen Meridiane rechtwinklig durchschneiden und umgekehrt. Es bilden daher (Taf. XXXXII, Fig. 294) die Parallelkreise und die Meridiane im Bilde zwei orthogonale Systeme von Kreisen, resp. von Büscheln. Die Achse des einen Büschels x ist die gemeinsame Potenzgerade des anderen Büschels. Besagte Potenzgeraden sind, wie bereits früher erwähnt wurde, die stereographischen Projectionen der Achsen der zwei Ebenenbüschel, nach welchen die Netzeintheilung der Oberfläche bewerkstelligt wird, für das Meridianbüschel demnach die Projection der allen Meridianen gemeinsamen Erdachse, für das Parallelkreisbüschel aber die Projection der den Parallelkreisebenen gemeinsamen unendlich fernen Geraden oder die Projection des durch das Centrum gehenden Parallelkreises.

Das Meridianbüschel im Bilde hat zwei reelle Schnittpunkte, es sind dies die Projectionen der Punkte N, S; das Parallelkreisbüschel dagegen besitzt imaginäre Schnittpunkte, d. s. die Projectionen der in der gemeinsamen unendlich fernen Geraden der Parallelkreisebenen gelegenen imaginären Kreispunkte. Die reellen Schnittpunkte des Meridianbüschels sind die Nullkreise für das Parallelkreisbüschel.

Dieses System der sich in allen Punkten rechtwinklig durchschneidenden Kreise wird die Bildebene in ihrer ganzen Ausdehnung bedecken und somit die gesammte Kugeloberfläche darstellen. Die unendlich ferne Gerade der Bildebene, welche auch als Kreis aufgefasst werden kann, wird den unendlich kleinen Kreis der Kugel im Projectionscentrum repräsentieren; alle durch das Projectionscentrum gehenden Kreise der Kugel werden sich in Geraden projicieren u. s. w.

Selbstverständlich sind dies bloß allgemeine Grundsätze der centralen Projection in specieller Auffassung.

§. 762.

Construction der Meridian- und Parallelkreisnetze für gegebene Fälle.

Die Bildebene werden wir diesfalls stets durch den Mittelpunkt der Kugel gehend, dem Projectionscentrum conjugiert (polar gegenüberliegend) annehmen.

Man unterscheidet, je nachdem das Projectionscentrum in einem Pole, in einem Punkte des Äquators oder in einem beliebigen Punkte der Oberfläche angenommen wird, eine stereographische Polar-, Äquatorial- oder Horizontalprojection.

Für die stereographische Polarprojection [Projectionscentrum im Südpole S (Taf. XXXXII, Fig. 295)] werden die Bilder der Meridiane Gerade sein, welche durch den Hauptpunkt N (Projection des Nordpoles) gehen. Die Parallelkreise erscheinen diesfalls als concentrische Kreise. Punkte derselben in der Achse x erhält man durch Vermittlung einer Umlegung des Projectionscentrums um die besagte Achse nach (C). Der Äquator Q ergibt sich im Schnitte der Kugel mit der Bildebene.

Bei der stereographischen Äquatorial- oder Meridianprojection (Taf. XXXXII, Fig. 296) wird das Centrum C in einem Punkte des Äquators gedacht. Der Schnitt der Bildebene mit der Kugel sei der Meridian o. Behufs Construction der Meridiane 10, 20, 30... stützt man sich auf die Bestimmung, dass dieselben durch die Punkte NS gehen und mit dem Meridiane o bei S, beziehungsweise bei N die Winkel von 10^0, 20^0, 30^0... einschließen. Zieht man daher bei S eine Gerade t_1, welche gegen die Tangente t um 10^0 geneigt erscheint, so ist dies die Tangente für den Meridian 10; eine Senkrechte auf die bezeichnete Tangente gibt im Schnitte mit q den Mittelpunkt o_1 des ersten Meridiankreises. Besagte Senkrechten auf die bezüglichen Tangenten schließen wieder ihrerseits mit der Geraden NS die Winkel 10^0, 20^0, 30^0... ein. Dieselben werden einfach erhalten, wenn man S der Reihe nach mit den Punkten 70, 50, 30... des Meridianes o verbindet. (Satz über Centri- und Peripheriewinkel, welche auf gleichen Bögen aufstehen.)

Zur Controle kann man auch die Schnittpunkte der Meridiane mit dem Äquator q direct bestimmen. Bezeichnete Punkte liegen in dem Schnitte derjenigen Geraden mit q, welche von S nach den

respectiven Punkten 10, 20, 30 des Meridianes geführt werden. Die Erklärung dieser Construction ergibt sich durch Vermittlung einer einfachen Umlegung des Centrums um q nach S.

Die Parallelkreise gehen durch die Punkte 10, 20, 30... des Hauptmeridanes. Die Mittelpunkte dieser Kreise sind die Projectionen der der Kugel längs derselben umschriebenen Kegelscheitel. Im vorliegenden Falle sind es die Scheitel ω_1, ω_2, ω_3... jener Kegel, welche in der Bildebene auf der Geraden NS liegen.

Bei der stereographischen Horizontalprojection (Taf. XXXXII, Fig. 297) wird das Centrum in irgend einem Punkte der Erdoberfläche gedacht.

Die Erdoberfläche erscheint demnach als auf der Horizontalebene des dem gewählten Centrum C diametral gegenüberstehenden Punktes Ω abgebildet. Dieser letztere Punkt Ω wird sodann Mittelpunkt der Karte. In Fig. 297, Taf. XXXXII ist der Punkt Ω von der nördlichen Breite 50 und der östlichen Länge 30 als Mittelpunkt der Karte angenommen.

Um zunächst den Nord- und Südpol, sowie Punkte der Parallelkreise zu erhalten, denken wir uns den durch das Projectionscentrum C gehenden Meridian um ΩX in die Bildebene umgelegt. Hierbei gelangt das Centrum C nach (C), während der dem Mittelpunkte Ω der Karte entsprechende Punkt nach (Ω) fällt. Theilt man nunmehr diesen umgelegten Meridian in Grade, so erhält man 40 Grade von dem Punkte (Ω) nach aufwärts den umgelegten Nordpol (N), während sich diametral gegenüber liegend der umgelegte Südpol (S) ergibt. Im Schnitte der projicierenden Geraden $(C)(N)$, $(C)(S)$ mit ΩX erhält man den Nord- und Südpol im Bilde.

In der Fig. 297, Taf. XXXXII wurde der Parallelkreis 30 construiert. Punkte dieses Parallelkreises ergeben sich im Schnitte der projicierenden Geraden $(30)(C)$ mit ΩX. Der Mittelpunkt ω_3 des besagten Kreises wird durch die Projection des Scheitels σ_3 des umschriebenen Kegels dargestellt. Für die Meridiankreise liegt die Bestimmung vor, dass sie sämmtlich durch NS gehen, dass also deren Mittelpunkte in der Geraden Y liegen, welche die Strecke NS orthogonal im Halbierungspunkte durchschneidet. Die Mittelpunkte derselben können nach der hiefür bestehenden allgemeinen Regel construiert werden. Die umschriebenen Kegel übergehen hierbei selbstverständlich in Cylinderflächen. Die Mittelpunkte der Meridianbilder sind demnach die Schnitte jener projicierenden Geraden, welche zu den entsprechenden Cylindererzeugenden parallel, also zu den entspre-

chenden Meridianebenen normal sind, mit der Bildebene. All diese projicierenden Geraden liegen demnach in einer durch C gehenden, zur Erdachse normalen Ebene. In der Umlegung um $X\Omega$ erscheint die dem Centrum entsprechende Fallinie dieser Ebene in (K) dargestellt, während sich ihr Schnitt mit der Bildebene in der Geraden Y ergibt. Von C, als Centrum, sind nun in dieser Ebene Geraden zu führen, welche mit einander die Winkel von 10 zu 10° bilden. Letzteres kann einfach durch Vermittlung einer neuen Umlegung der obbezeichneten Ebene in die Bildebene um die Trace Y, wobei C nach C_0 gelangt, vollführt werden. Die Mittelpunkte der Meridianbilder ergeben sich hiernach in den Punkten o_1, o_2, o_3 In Fig. 298, Taf. XXXXII ist die Construction dieses Kartennetzes vollständig ausgeführt.

Wie den angestellten, kurz gefassten Betrachtungen zu entnehmen, wurde die Construction der stereographischen Netze unter Voraussetzung der vollkommenen Kugelgestalt der Erde vollführt, welche Annahme jedoch der Wirklichkeit, vom theoretischen Standpunkte aus, nicht genau entspricht, indem die Erde, wie bekannt, ein Rotationsellipsoid ist. Unter diesem Gesichtspunkte wäre, streng genommen, eigentlich nur die stereographische Polarprojection richtig, nachdem sich diesfalls das Projectionscentrum in einem der Endpunkte der Rotationsachse, also in einem Nabelpunkte der Fläche befindet. Allein der Fehler, den die gemachte Voraussetzung mit sich bringt, ist so gering, dass er, wollte man theoretisch genau die Erdoberfläche als Ellipsoid auffassen, von den möglichen und mitunter unvermeidlichen Constructionsfehlern, wenn nicht übertroffen, so doch gewiss erreicht würde. Selbst im ungünstigsten Falle, d. i. bei der Äquatorialprojection, wo die Excentricität der Bildellipsen am größten ist, entsprechen diesen letzteren die Achsenverhältnisse des Erdmeridianes: $3 \cdot 2721 : 3 \cdot 2611 = 1 \cdot 003$. Diese Verhältniszahl, welche sich bei dem kleinen Maßstabe, in welchem die Karten angefertigt werden, von der Einheit nur um eine so unbedeutende Größe unterscheidet, bedingt aber, dass auch in diesem Falle die Constructionsfehler jene, welche mit der getroffenen Annahme im Zusammenhange stehen, gewiss überwiegen würden.

Die stereographische Projection wird vorzüglich zur Darstellung größerer Theile der Erdoberfläche, wie beispielsweise zur Darstellung der östlichen, westlichen, nördlichen und südlichen Halbkugel, zur Darstellung der Halbkugeln der größten Land- und Wassermassen u. s. w. verwendet und bietet in dieser Eigenschaft insoferne Vortheile, als das Netz leicht construierbar und die dargestellten Länder wegen

der Gleichheit der Winkel zwischen Bild und Original der Wirklichkeit bezüglich der Form ziemlich genau entsprechen. Wegen allzu großer Flächenvergrößerung gegen die Ränder der Karte werden jedoch in dieser Projectionsart niemals mehr als höchstens zwei Dritttheile der Gesammtoberfläche der Erde dargestellt. Zur Darstellung kleiner Theile der Erdoberfläche eignet sich die stereographische Projection nicht, weil dann wegen der entsprechenden Vergrößerung des Maßstabes die Radien der Meridian- und Parallelkreisbilder zu groß würden, als dass letztere bequem construiert werden könnten.

Quellen- und Literatur-Verzeichnis.

Zu Cap. I — VIII. Eigenschaften der Regelflächen zweiten Grades auf Grund ihrer projectivischen Erzeugung. Siehe J. Steiner, „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander" und in De la Gournérie, „Traité de géométrie descriptive", die Theorie der windschiefen Flächen zweiten Grades.

Bezüglich des orthogonalen und des gleichseitigen Hyperboloides, sowie auch des hyperbolisch-gleichseitigen Paraboloides siehe: Schröter's „Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und Raumcurven der dritten Ordnung".

§. 107—112. Siehe Brasseur, „Mémoire sur divers lieux géométriques du deuxième degrée".

Zu Cap. XIII—XVII. Siehe Reye, „Synthetische Geometrie der Kugeln und der linearen Kugelsysteme".

Die Methode der inversen Transformation hat Möbius als „Kreisverwandtschaft" und Thomsen als „Methode der elektrischen Bilder" entwickelt.

Die Originalabhandlung über die Cyclide findet man in Dupin's „Applications de géométrie et de mécanique".

Anschauliche stereographische Abbildungen der Cycliden hat Maxwell im 9. vol. des Quarterly Journal pag. 111 geliefert.

Zu Cap. XVIII—XXII. Synthetische Untersuchungen über die Rotationsflächen und dreiachsigen Flächen findet man in Poncelet, „Propriétés projectives des figures; Staudt, „Geometrie der Lage und Beiträge zur Geometrie der Lage"; Reye, „Geometrie der Lage"; Fiedler, „Darstellende Geometrie"; De la Gournérie, „Traité de géométrie descriptive".

Zu Cap. XXIII. §. 442—494. „Über Kugelberührung" siehe: Olivier, „Développements de géométrie descriptive".

Zu Cap. XXIV—XXVIII. Bezüglich der „Constructionen von und an Flächen zweiten Grades" vergleiche: Fiedler's „Darstellende Geometrie". Über Rotationsflächen zweiten Grades: De la Gournérie, „Traité de géométrie descriptive".

Die Construction der Flächen zweiten Grades aus neun Punkten ist nicht aufgenommen. Siehe hierüber: Niemtschik, „Die Constructionen doppelt berührender Kegelschnitte mit Zuhilfenahme von Flächen zweiten Grades". (Sitzungsberichte der Wiener kais. Akademie der Wissenschaften.) Heger, „Die Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten".

Zu Cap. XXIX—XXXI. Vergleiche: Fiedler, „Darstellende Geometrie"; Staudt, „Beiträge zur Geometrie der Lage"; De la Gournérie, „Traité de géométrie descriptive" und „Surfaces réglées tétraédrales".

Zu Cap. XXXII. Siehe: Baltzer's „Mathematik"; Reusch, „Stereographische Projection"; Gretschel, „Kartenprojection".

Verlag von **Carl Gerold's Sohn** in **Wien.**

Bisher erschienen von demselben Werke:

Darstellende und projective Geometrie

nach dem

gegenwärtigen Stande dieser Wissenschaft

mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse höherer Lehranstalten und das Selbstudium

von **Prof. Dr. Gustav Ad. V. Peschka,**

k. k. Regierungsrath, ord. öffentl. Hochschul-Professor in Brünn.

I. Band. gr. 8. mit einem Atlas von 34 Tafeln in Folio. 9 fl. = 18 Mk.

II. Band. gr. 8. mit einem Atlas von 11 Tafeln in Folio. 8 fl. 50 kr. = 17 Mk.

Studien

über die

Integration linearer Differential-Gleichungen.

Von

Simon Spitzer.

gr. 8. Preis 1 fl. 40 kr. = 3 Mk.

Erste Fortsetzung. gr. 8. Preis 1 fl. = 2 Mk.

Zweite Fortsetzung (Schluss). gr. 8. 1 fl. 60 kr. = 3 Mk. 40 Pf.

Neue Studien

über die

Integration linearer Differential-Gleichungen.

Von

Simon Spitzer.

8. Preis 3 fl. = 6 Mk.

Erste Fortsetzung. 8. Preis 2 fl. = 4 Mk.

Zweite Fortsetzung. 8. Preis 1 fl. 80 kr. = 3 Mk. 60 Pf.

Dritte Fortsetzung (Schluss). 8. Preis 1 fl. 80 kr. = 3 Mk. 60 Pf.

Verlag von **Carl Gerold's Sohn** in **Wien**.

Logarithmisch - trigonometrische Tafeln
in
graphischer Manier bearbeitet.

(Vierstellige Phototyp-Ausgabe.)

Von

Anton Tichy.

16. Preis 60 kr. = 1 Mk. 20 Pf.

Geschichte der französischen Literatur im XVII. Jahrhundert.

Von

Ferdinand Lotheissen.

I. Band. gr. 8. Preis 3 fl. 60 kr. = 7 M. 20 Pf.
II. Band. gr. 8. Preis 5 fl. 40 kr. = 10 M. 80 Pf.
III. Band. gr. 8. Preis 4 fl. 50 kr. = 9 M.
IV. Band. gr. 8. Preis 4 fl. 50 kr. = 9 M.

BOSNIEN,
LAND UND LEUTE.

Historisch - ethnographisch - geographische Schilderung

von

Adolf Strausz

königl. ungarischer Honvedlieutenant.

2 Bände. gr. 8. Preis à 3 fl. 50 kr. = 7 Mk.

Krystallographische Untersuchungen an homologen u. isomeren Reihen.

Eine von der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien mit dem A. Freiherrn v. Baumgartner'schen Preise gekrönte, durch einen methodologischen Theil vermehrte Schrift.

Von

Dr. Aristides Brezina

Custos am k. k. mineralogischen Hof-Cabinete, Privatdocent an der Universität Wien.

I. Theil: **Methoden.**

Mit einer lithogr. Tafel und 94 in den Text gedruckten Holzschnitten.
gr. 8. Preis 8 fl. = 16 Mk.

Verlag von **Carl Gerold's Sohn** in Wien.

Untersuchungen im Gebiete linearer Differential-Gleichungen.

Von

Simon Spitzer.

Erstes Heft. gr. 8.

Preis 1 fl. 50 kr. = 3 Mark.

Elemente der theoretischen Mechanik.

Von

Dr. G. Salcher,

Professor an der k. k. Marine-Akademie zu Fiume.

Mit 6 Tafeln.

gr. 8. Preis 2 fl. 60 kr. = 5 M. 20 Pf.

Hilfstafeln

zur

präcisen Berechnung 20-stelliger Logarithmen zu gegebenen Zahlen

und

der Zahlen zu 20-stelligen Logarithmen.

Von

A. Steinhauser,

k. k. Regierungsrath.

gr. 8. Preis 6 fl. = 12 Mark.

Strahlende Electroden-Materie

und

der sogenannte vierte Aggregatzustand.

Von

Dr. J. Puluj.

Mit 56 Figuren.

gr. 8. Preis 1 fl. 40 kr. = 2 Mk. 80 Pf.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Peschka, Gustav A. von

Darstellende und projective Geometrie nach dem gegenwärtigen Stande dieser Wissenschaft mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse höherer Lehranstalten und das Selbststudium
Bd.: 3

1884

Math.p. 418 db-3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11651531-9